ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИКИ

Н. БУРБАКИ

ОБЩАЯ ТОПОЛОГИЯ

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ГРУППЫ

ЧИСЛА И СВЯЗАННЫЕ С НИМИ ГРУППЫ И ПРОСТРАНСТВА

Группа французских математиков, объединенная под псевдонимом «Бурбаки», поставила перед собой цель — написать под общим заглавием «Элементы математики» полный трактат современной математической науки.

Много томов этого трактата уже вышло во Франции. Они вызвали большой интерес математиков всего мира как новизной изложения, так и высоким научным уровнем.

Книга рассчитана на математиков — научных работников, аспирантов и студентов старших курсов.

Н. БУРБАКИ

ОБЩАЯ ТОПОЛОГИЯ

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ГРУППЫ

ЧИСЛА И СВЯЗАННЫЕ С НИМИ ГРУППЫ И ПРОСТРАНСТВА

ACTUALITÉS SCIENTIFIQUES ET INDUSTRIELLES

N. BOURBAKI

ÉLÉMENTS DE MATHÉMATIQUE

PREMIÈRE PARTIE

LIVRE III

TOPOLOGIE GÉNÉRALE

TROISIÈME ÉDITION REVUE ET AUGMENTÉE

HERMANN

ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИКИ

Н. БУРБАКИ

ОБЩАЯ ТОПОЛОГИЯ

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ГРУППЫ. ЧИСЛА И СВЯЗАННЫЕ С НИМИ ГРУППЫ И ПРОСТРАНСТВА

ПЕРЕВОД С 3-го ФРАНЦУЗСКОГО ИЗДАНИЯ
С. Н. КРАЧКОВСКОГО

ПОД РЕДАКЦИЕЙ
Д. А. РАЙКОВА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1969

517.6
Б 91
УДК 513.83

Н. Бурбаки

Общая топология

(Топологические группы. Числа и связанные
с ними группы и пространства)

М., 1969 г., 392 стр. с илл.

Редактор *Д. А. Райков*.

Техн. редактор *К. Ф. Брудно* Корректоры *Т. С. Плетнева*, *Н. Б. Румянцева*.

Сдано в набор 1/XI 1968 г. Подписано к печати 24/VI 1969 г. Бумага $60 \times 90^{1}/_{16}$.
Физ. печ. л. 24,5+1 вкл. Условн. печ. л. 24,87 Уч.-изд. л. 22,25.
Тираж 30 000 экз. Цена книги 1 р. 85 к. Заказ 611

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Московская типография № 16 Главполиграфпрома Комитета по печати при Совете
Министров СССР Москва, Трехпрудный пер., 9

$\frac{2-2-3}{69-68}$

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие к третьему изданию третьей и четвертой глав 10

Глава III. **Топологические группы (элементарная теория)** . . . 11

§ 1. Групповые топологии 11
1. Топологические группы 11
2. Окрестности точки в топологической группе 14
3. Изоморфизмы и локальные изоморфизмы 17
Упражнения 19
§ 2. Подгруппы; факторгруппы; гомоморфизмы; однородные пространства; произведения групп 21
1. Подгруппы топологической группы 21
2. Связные компоненты топологической группы 23
3. Всюду плотные подгруппы 24
4. Пространства с операторами 25
5. Однородные пространства 27
6. Факторгруппы 29
7. Подгруппы и факторгруппы факторгруппы 31
8. Непрерывные представления и строгие морфизмы 33
9. Произведение топологических групп 35
10. Полупрямые произведения 38
Упражнения 41
§ 3. Равномерные структуры групп 48
1. Левая и правая равномерные структуры топологической группы 48
2. Равномерные структуры подгрупп, факторгрупп и произведений групп 51
3. Полные группы 52
4. Пополнение топологической группы 53
5. Равномерная структура и пополнение коммутативной группы 56
Упражнения 58
§ 4. Группы, действующие совершенно в топологическом пространстве. Компактность в топологических группах и пространствах операторов 60
1. Группы, действующие совершенно в топологическом пространстве 60
2. Свойства групп, действующих совершенно 63
3. Группы, действующие свободно в топологическом пространстве 65
4. Локально компактные группы, действующие совершенно 66
5. Группы, действующие непрерывно в локально компактном пространстве 68
6. Локально компактные однородные пространства 71
Упражнения 73

§ 5. Бесконечные суммы в коммутативных группах 80
1. Суммируемые семейства в коммутативной группе 80
2. Критерий Коши 81
3. Частичные суммы. Ассоциативность 83
4. Суммируемые семейства в произведении групп 86
5. Образ суммируемого семейства при непрерывном отображении 86
6. Ряды 87
7. Коммутативно сходящиеся ряды 89
Упражнения 91
§ 6. Топологические группы с операторами; топологические кольца; топологические тела 92
1. Топологические группы с операторами 92
2. Топологическая прямая сумма устойчивых подгрупп . . 94
3. Топологические кольца 97
4. Подкольца. Идеалы. Факторкольца. Произведения колец 99
5. Пополнение топологического кольца 99
6. Топологические модули 102
7. Топологические тела 105
8. Равномерные структуры топологического тела 107
Упражнения 108
§ 7. Проективные пределы топологических групп и колец 117
1. Проективные пределы алгебраических структур 118
2. Проективные пределы топологических групп и пространств с операторами 120
3. Аппроксимация топологических групп 124
4. Применение к проективным пределам 130
Упражнения 132
Исторический очерк к главе III 135
Библиография 136

Глава IV. **Вещественные числа** 137

§ 1. Определение вещественных чисел 137
1. Упорядоченная группа рациональных чисел 137
2. Рациональная прямая 138
3. Числовая прямая и вещественные числа 139
4. Свойства интервалов из **R** 141
5. Длина интервала 142
6. Аддитивная равномерная структура в **R** 143
Упражнения 143
§ 2. Основные топологические свойства числовой прямой 147
1. Аксиома Архимеда 147
2. Компактные множества в **R** 147
3. Верхняя грань множества в **R** 148
4. Характеризация интервалов 149
5. Связные множества в **R** 149
6. Гомеоморфизмы интервала на интервал 152
Упражнения 153
§ 3. Поле вещественных чисел 159
1. Умножение в **R** 159
2. Мультипликативная группа **R*** 160
3. Корни n-й степени 162
Упражнения 162
§ 4. Расширенная числовая прямая 164
1. Гомеоморфизм открытых интервалов числовой прямой **R** 164
2. Расширенная прямая 165

3. Сложение и умножение в $\overline{\mathbf{R}}$ 167
Упражнения 169
§ 5. Числовые функции 171
1. Числовые функции 171
2. Числовые функции, определенные на фильтрующемся множестве 172
3. Пределы справа и слева функции вещественной переменной 174
4. Грани числовой функции 175
5. Огибающие семейства числовых функций 177
6. Верхний и нижний пределы числовой функции по фильтру 178
7. Алгебраические операции над числовыми функциями . . 182
Упражнения 185
§ 6. Непрерывные и полунепрерывные числовые функции 188
1. Непрерывные числовые функции 188
2. Полунепрерывные функции 189
Упражнения 194
§ 7. Бесконечные суммы и произведения вещественных чисел . . . 198
1. Суммируемые семейства положительных конечных чисел в $\mathbf{R}$ 199
2. Суммируемые семейства конечных чисел произвольного знака в $\mathbf{R}$ 202
3. Произведение двух бесконечных сумм 203
4. Перемножаемые семейства в $\mathbf{R}^*$ 203
5. Суммируемые семейства и перемножаемые семейства в $\overline{\mathbf{R}}$. 205
6. Ряды и бесконечные произведения вещественных чисел 207
Упражнения 210
§ 8. Употребительные разложения вещественных чисел 214
1. Приближенные значения вещественного числа 214
2. Разложения вещественных чисел по базисной последовательности 215
3. Определение вещественного числа его разложением . . . 216
4. Сравнение разложений 218
5. Разложения с основанием a 218
6. Мощность множества $\mathbf{R}$ 219
Упражнения 220
Исторический очерк к главе IV 225
Библиография 236

Глава V. **Однопараметрические группы** 238

§ 1. Подгруппы и факторгруппы группы $\mathbf{R}$ 238
1. Замкнутые подгруппы группы $\mathbf{R}$ 238
2. Факторгруппы группы $\mathbf{R}$ 239
3. Непрерывные представления группы $\mathbf{R}$ в себя 240
4. Локальное определение непрерывного представления группы $\mathbf{R}$ в топологическую группу 241
Упражнения 243
§ 2. Измерение величин 244
Упражнения 251
§ 3. Топологическая характеризация групп $\mathbf{R}$ и $\mathbf{T}$ 252
Упражнения 254
§ 4 Показательные функции и логарифмы 256
1. Определение a^x и $\log_a x$ 256
2. Изменение функций a^x и $\log_a x$ 258
3. Перемножаемые семейства чисел >0 260
Упражнения 261
Исторический очерк к главе V 262
Библиография 264

Глава VI. **Числовые и проективные пространства** 265

§ 1. Числовое пространство $\mathbf{R}^n$ 265
1. Топология пространства $\mathbf{R}^n$ 265
2. Аддитивная группа $\mathbf{R}^n$ 266
3. Векторное пространство $\mathbf{R}^n$ 267
4. Аффинные линейные многообразия в $\mathbf{R}^n$ 268
5. Топология векторных пространств и алгебр над полем $\mathbf{R}$ 271
6. Топология пространств матриц над $\mathbf{R}$ 273
Упражнения 273
§ 2. Евклидово расстояние; шары и сферы 277
1. Евклидово расстояние в $\mathbf{R}^n$ 277
2. Движения 278
3. Евклидовы шары и сферы 279
4. Стереографическая проекция 282
Упражнения 284
§ 3. Вещественные проективные пространства 286
1. Топология вещественных проективных пространств . . . 287
2. Проективные линейные многообразия 290
3. Погружение числового пространства в проективное пространство 292
4. Применение к продолжению числовых функций 293
5. Пространства проективных линейных многообразий . . . 294
6. Грассманианы 298
Упражнения 299
Исторический очерк к главе VI 302
Библиография 304

Глава VII. **Аддитивные группы $\mathbf{R}^n$** 305

§ 1. Подгруппы и факторгруппы группы $\mathbf{R}^n$ 305
1. Дискретные подгруппы группы $\mathbf{R}^n$ 306
2. Замкнутые подгруппы группы $\mathbf{R}^n$ 309
3. Ассоциированные подгруппы 312
4. Отделимые факторгруппы группы $\mathbf{R}^n$ 316
5. Подгруппы и факторгруппы группы $\mathbf{T}^n$ 316
6. Периодические функции 318
Упражнения 319
§ 2. Непрерывные представления группы $\mathbf{R}^n$ и ее факторгрупп . . 325
1. Непрерывные представления группы $\mathbf{R}^m$ в группу $\mathbf{R}^n$ . . 325
2. Локальное определение непрерывного представления группы $\mathbf{R}^n$ в топологическую группу 326
3. Непрерывные представления $\mathbf{R}^m$ в $\mathbf{T}^n$ 328
4. Автоморфизмы группы $\mathbf{T}^n$ 329
Упражнения 330
§ 3. Бесконечные суммы в группах $\mathbf{R}^n$ 333
1. Суммируемые семейства в $\mathbf{R}^n$ 333
2. Ряды в $\mathbf{R}^n$ 335
Упражнения 335
Исторический очерк к главе VII 337
Библиография 339

Глава VIII. **Комплексные числа** 340

§ 1. Комплексные числа; кватернионы 340
1. Определение комплексных чисел 340
2. Топология поля $\mathbf{C}$ 342
3. Мультипликативная группа $\mathbf{C}^*$ 344

4. Тело кватернионов 344
Упражнения 346
§ 2. Измерение углов; тригонометрические функции 348
1. Мультипликативная группа $\mathbf{U}$ 348
2. Углы между полупрямыми 350
3. Измерение углов между полупрямыми 352
4. Тригонометрические функции 353
5. Угловые секторы 356
6. Углы между прямыми 357
Упражнения 359
§ 3. Бесконечные суммы и произведения комплексных чисел . . . 360
1. Бесконечные суммы комплексных чисел 360
2. Перемножаемые семейства в $\mathbf{C}^*$ 361
3. Бесконечные произведения комплексных чисел 363
Упражнения 364
§ 4. Комплексные числовые и проективные пространства 365
1. Векторное пространство $\mathbf{C}^n$ 365
2. Топология векторных пространств и алгебр над полем $\mathbf{C}$ 366
3. Комплексные проективные пространства 367
4. Пространства комплексных проективных линейных многообразий 369
Упражнения 370
Исторический очерк к главе VIII 373
Библиография 378

Указатель обозначений 379

Указатель терминов 381

Таблица соответствия второго и третьего изданий 391

Определения и аксиомы главы III . . . . .вклейка

ПРЕДИСЛОВИЕ К ТРЕТЬЕМУ ИЗДАНИЮ ТРЕТЬЕЙ И ЧЕТВЕРТОЙ ГЛАВ

Наиболее важные изменения сравнительно с первым изданием относятся к главе III. Ее § 2 полностью переделан и сконцентрирован на идее группы, действующей в топологическом пространстве непрерывно; в первом издании это понятие выступало только в некоторых частных случаях. Кроме того, к главе III добавлены два новых параграфа. Один из них посвящен понятию группы, действующей в пространстве *совершенно*, что является обобщением классической концепции «собственно разрывной» группы; с этим понятием естественно связана бо́льшая часть свойств *компактности* в топологических группах. Другой посвящен проективным пределам топологических групп и колец, с каждым днем приобретающим все большее значение в приложениях.

Н. Б.

Нанкаго, весна 1960 г.

ГЛАВА III

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ГРУППЫ
(элементарная теория)

§ 1. Групповые топологии

1. Топологические группы

В первых четырех параграфах этой главы закон композиции записывается, как правило, *мультипликативно* и e означает нейтральный элемент; перевод результатов в аддитивную форму (удерживаемую — напомним это — исключительно для *коммутативных* групп) предоставляется чаще всего читателю.

Определение 1. *Топологической группой называют множество G, наделенное структурой группы и топологией, удовлетворяющими следующим двум аксиомам:*

(GT_I) *Отображение $(x, y) \mapsto xy$ произведения $G \times G$ в G непрерывно.*

(GT_{II}) *Отображение $x \mapsto x^{-1}$ группы G в себя (симметрия группы G) непрерывно.*

Говорят, что структура группы и топологическая структура, заданные в множестве G, *согласуются*, если они удовлетворяют аксиомам (GT_I) и (GT_{II}).

Примеры. 1) *Дискретная* топология в группе G согласуется со структурой группы; топологическую группу с дискретной топологией называют *дискретной* группой.

Также *слабейшая* топология (гл. I, § 2, n° 2) в G согласуется со структурой группы в G.

самая слабая топология это та в которой единств. открытыми м-вами явл. $\varnothing$ и все пр-во.

°2) В главе IV мы увидим, что топология рациональной прямой **Q** (соотв. числовой прямой **R**) согласуется со структурой *аддитивной группы* в **Q** (соотв. в **R**).°

3) Пусть G — топологическая группа; ее топология согласуется со структурой группы G^0, противоположной G; группа G^0, наделенная этой топологией, называется топологической группой, *противоположной* топологической группе G.

Аксиомы (GT_I) и (GT_{II}) равносильны следующей аксиоме:

(GT') *Отображение* $(x, y) \mapsto xy^{-1}$ *произведения* $G \times G$ *в* G *непрерывно.*

В самом деле, (GT_I) и (GT_{II}), очевидно, влекут (GT'). Обратно, (GT') влечет (GT_{II}), ибо отображение $x \mapsto ex^{-1} = x^{-1}$ тогда непрерывно, а (GT') и (GT_{II}) влекут (GT_I), ибо $(x, y) \mapsto x\,(y^{-1})^{-1} = xy$ тогда непрерывно.

Для любого элемента a из G *левый перенос* $x \mapsto ax$ (соотв. *правый перенос* $x \mapsto xa$) в силу (GT_I) непрерывен; следовательно, это *гомеоморфизм* G на себя. Отображения $x \mapsto axb$ (где a и b пробегают G) образуют, таким образом, *группу гомеоморфизмов* пространства G; отображения $x \mapsto axa^{-1}$ (соотв. $x \mapsto ax$, $x \mapsto xa$), где a пробегает G, составляют ее подгруппу. Точно так же аксиома (GT_{II}) показывает, что симметрия $x \mapsto x^{-1}$, являющаяся инволютивным отображением G на себя, есть *гомеоморфизм* G на себя.

Если A — открытое (соотв. замкнутое) множество в G, то для любой точки x из G множества xA, Ax и A^{-1} *) открыты (соотв. замкнуты), ибо они получаются из A посредством указанных гомеоморфизмов. Если A *открыто*, то AB и BA при любом B *открыты*, как объединения открытых множеств (аксиома (O_I)). Если V — окрестность нейтрального элемента e в G, то для любого непустого множества A из G множества VA и AV являются его *окрестностями*; действительно, если W — открытая окрестность e, содержащаяся в V, то WA и AW открыты и содержат A.

Напротив, AB не обязательно замкнуто при замкнутом A, даже если B замкнуто (см. § 4, следствие 1 предложения 1).

---

*) Напомним, что $A \cdot B$ или AB, где A и B — подмножества группы G, означает множество композиций xy, где x пробегает A, а y пробегает B; A^{-1} означает множество элементов x^{-1}, где x пробегает A. Если B сводится к единственному элементу x, то вместо $\{x\} \cdot A$ (соотв. $A \cdot \{x\}$) пишут $x \cdot A$ или xA (соотв. $A \cdot x$ или Ax).

°Например, в аддитивной группе **R** числовой прямой подгруппа **Z** целых рациональных чисел замкнута; замкнута также и подгруппа $\theta\mathbf{Z}$, образованная всеми целыми кратными $n\theta$ *иррационального* числа θ; однако подгруппа $\mathbf{Z}+\theta\mathbf{Z}$ группы **R**, являющаяся множеством всех вещественных чисел вида $m+n\theta$ (где m и n пробегают все целые значения), не замкнута в **R**, как мы это увидим в § 1 главы V.

Рассмотрим еще в аддитивной группе $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ множество A всех пар (x, y) таких, что $x \geqslant 0$, $0 \leqslant y \leqslant 1-\frac{1}{x+1}$, и множество B всех пар $(x, 0)$, где x пробегает **R**; эти множества замкнуты, однако $A+B$, будучи множеством всех пар (x, y) таких, что $0 \leqslant y < 1$, не замкнуто в $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$.°

Пусть E — топологическое пространство, а f и g — его отображения в топологическую группу G. Если f и g непрерывны в точке $x_0 \in E$, то это же имеет место по теореме о сложной функции (гл. I, § 2, теорема 2) для f^{-1} и fg *); в частности, непрерывные отображения E в G образуют *подгруппу* группы G^E всех отображений E в G.

Точно так же пусть f и g — отображения множества E, *фильтрующегося* по фильтру $\mathfrak{F}$, в *отделимую* топологическую группу G. Если $\lim_{\mathfrak{F}} f$ и $\lim_{\mathfrak{F}} g$ существуют, то существуют также $\lim_{\mathfrak{F}} f^{-1}$ и $\lim_{\mathfrak{F}} fg$, причем (гл. I, § 7, следствие 1 предложения 9)

$$\lim_{\mathfrak{F}} f^{-1} = (\lim_{\mathfrak{F}} f)^{-1}, \tag{1}$$

$$\lim_{\mathfrak{F}} fg = (\lim_{\mathfrak{F}} f)(\lim_{\mathfrak{F}} g). \tag{2}$$

Когда G — *коммутативная* группа в *аддитивной* записи, аксиома (GT′) выражает, что $(x, y) \longmapsto x-y$ есть непрерывное отображение. Если f и g — отображения топологического пространства E в G, непрерывные в точке x_0, то, следовательно, и $f-g$ непрерывно в этой точке. Соответственным образом переписываются также формулы (1) и (2).

---

*) Напомним, что f^{-1} есть отображение $x \longmapsto (f(x))^{-1}$, а fg — отображение $x \longmapsto f(x)\,g(x)$; не следует смешивать эти отображения с $\overset{-1}{f}$ и $f \circ g$ (когда эти последние определены) (Теор. мн., Сводка результ., § 2, n°n° 6 и 11).

2. *Окрестности точки в топологической группе*

Пусть $\mathfrak{V}$ — фильтр окрестностей нейтрального элемента e в топологической группе G и a — произвольная точка из G; поскольку $x \mapsto ax$ и $x \mapsto xa$ — гомеоморфизмы, фильтр окрестностей точки a совпадает с семейством $a\mathfrak{V}$ множеств aV, где V пробегает $\mathfrak{V}$, а также с семейством $\mathfrak{V}a$ множеств Va. Таким образом, фильтр окрестностей *произвольной* точки топологической группы известен, как только известен фильтр окрестностей *нейтрального элемента* e этой группы.

Выражая непрерывность xy и x^{-1} при $x = y = e$, получаем (гл. I, § 2, n° 1) следующие свойства:

(GV_I) *Каково бы ни было $U \in \mathfrak{V}$, существует $V \in \mathfrak{V}$, для которого $VV \subset U$.*

(GV_{II}) *Каково бы ни было $U \in \mathfrak{V}$, также $U^{-1} \in \mathfrak{V}$.*

Всякий фильтр $\mathfrak{V}$ в G, удовлетворяющий (GV_I) и (GV_{II}), удовлетворяет также

(GV_a) *Каково бы ни было $U \in \mathfrak{V}$, существует $V \in \mathfrak{V}$, для которого $VV^{-1} \subset U$.*

В самом деле, согласно (GV_I) существует $W \in \mathfrak{V}$, для которого $WW \subset U$, а по (GV_{II}) существует такое $V \in \mathfrak{V}$, что $V \in W \cap W^{-1}$, откуда $V^{-1} \subset W$ и потому $VV^{-1} \subset WW \subset U$.

Обратно, если фильтр $\mathfrak{V}$ в G удовлетворяет (GV_a), то отсюда следует в первую очередь, что *e принадлежит любому множеству $U \in \mathfrak{V}$*, ибо если $V \in \mathfrak{V}$ таково, что $VV^{-1} \subset U$, то, поскольку V не пусто, для любого $x \in V$ имеем $xx^{-1} = e \in U$. Условие (GV_a) влечет тогда $V^{-1} \subset VV^{-1} \subset U$, чем доказано, что $U^{-1} \in \mathfrak{V}$ для любого $U \in \mathfrak{V}$. Наконец, если $V \in \mathfrak{V}$ и $W \in \mathfrak{V}$ таковы, что $VV^{-1} \subset U$ и $W \subset V \cap V^{-1}$, то $WW \subset U$. Таким образом, мы убедились в итоге, что (GV_a) *равносильно* совокупности (GV_I) и (GV_{II}).

Наконец, так как $x \mapsto axa^{-1}$ есть гомеоморфизм, *сохраняющий* e, то $\mathfrak{V}$ обладает следующим свойством:

(GV_{III}) *$aVa^{-1} \in \mathfrak{V}$ для любых $a \in G$ и $V \in \mathfrak{V}$.*

Эти три свойства фильтра $\mathfrak{V}$ являются характеристическими. Точно говоря:

Предложение 1. *Пусть G — группа и $\mathfrak{V}$ — фильтр в G, удовлетворяющий аксиомам* (GV_I), (GV_{II}) *и* (GV_{III}). *Существует, и притом единственная, топология, согласующаяся со структурой*

группы в G и имеющая $\mathfrak{B}$ фильтром окрестностей нейтрального элемента e. Для этой топологии фильтр окрестностей произвольной точки $a \in G$ совпадает с каждым из фильтров $a\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{B}a$.

Если требуемая топология существует, то согласно предыдущему фильтр окрестностей точки a совпадает с каждым из фильтров $a\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{B}a$, что доказывает *единственность* этой топологии. Ее существование будет установлено, если мы докажем: 1° что фильтры $a\mathfrak{B}$ являются фильтрами окрестностей для некоторой топологии в G; 2° что эта топология согласуется со структурой группы в G.

1) Как было показано выше, фильтр $a\mathfrak{B}$ удовлетворяет аксиоме (V_{III}) (гл. I, § 1, n° 2) в силу (GV_I) и (GV_{II}); чтобы убедиться в том, что это — фильтр окрестностей точки a для некоторой топологии в G, следует показать, что выполнена аксиома (V_{IV}). Пусть V — произвольное множество из $\mathfrak{B}$ и W — такое множество из $\mathfrak{B}$, что $WW \subset V$; каково бы ни было $x \in aW$, имеем $xW \subset aWW \subset aV$, т. е. aV принадлежит фильтру $x\mathfrak{B}$, откуда и следует (V_{IV}).

2) Покажем теперь, что топология, определенная фильтром окрестностей $a\mathfrak{B}$, удовлетворяет аксиоме (GT′). Пусть a и b — две произвольные точки из G и $x = au$, $y = bv$; требуется показать, что xy^{-1} сколь угодно близко к ab^{-1}, если u и v достаточно близки к e. Но $(ab^{-1})^{-1}(xy^{-1}) = buv^{-1}b^{-1}$, и для произвольно взятой окрестности U точки e имеем $buv^{-1}b^{-1} \in U$, если $uv^{-1} \in b^{-1}Ub = V$, причем V принадлежит $\mathfrak{B}$ согласно (GV_{III}). Но на основании (GV_I) и (GV_{II}) существует $W \in \mathfrak{B}$, для которого $WW^{-1} \subset V$; таким образом, чтобы иметь $xy^{-1} \in (ab^{-1})U$, достаточно взять $u \in W$, $v \in W$, чем доказательство и завершается.

Часто встречающимся способом введения топологии, согласующейся со структурой группы в G, является задание фильтра, удовлетворяющего аксиомам (GV_I), (GV_{II}) и (GV_{III}); соответствующие условия для *базиса фильтра* $\mathfrak{B}$ будут:

(GV'_I) *Каково бы ни было $U \in \mathfrak{B}$, существует $V \in \mathfrak{B}$, для которого $VV \subset U$.*

(GV'_{II}) *Каково бы ни было $U \in \mathfrak{B}$, существует $V \in \mathfrak{B}$, для которого $V^{-1} \subset U$.*

(GV'_{III}) *Каковы бы ни были $a \in G$ и $U \in \mathfrak{B}$, существует $V \in \mathfrak{B}$, содержащееся в aUa^{-1}.*

Окрестность точки e называется *симметричной*, если она совпадает со своим образом при симметрии $x \mapsto x^{-1}$; для любой окрестности V нейтрального элемента e множества $V \cup V^{-1}$, $V \cap V^{-1}$ и VV^{-1} являются его симметричными окрестностями; на основании (GV_{II}) симметричные окрестности образуют *фундаментальную систему окрестностей* e. Точно так же, когда V пробегает фундаментальную систему окрестностей e, то на основании (GV_I) и множества V^n (где n — фиксированное целое число $\neq 0$) образуют фундаментальную систему окрестностей e.

Замечание. Если G — *коммутативная* группа, то $xAx^{-1} = A$ для любого множества A и любого элемента x из G; условие (GV_{III}) (соотв. (GV'_{III})) автоматически выполняется для любого фильтра (соотв. базиса фильтра) в G. Напротив, если G не является коммутативной группой, то (GV_{III}) не вытекает из (GV_I) и (GV_{II}) (см. упражнение 5).

Для коммутативной группы G, записываемой *аддитивно*, аксиомы, характеризующие фильтр $\mathfrak{B}$ окрестностей начала в топологии, согласующейся со структурой группы G, будут, таким образом, следующие:

(GA_I) *Каково бы ни было $U \in \mathfrak{B}$, существует $V \in \mathfrak{B}$, для которого $V + V \subset U$.*

(GA_{II}) *Каково бы ни было $U \in \mathfrak{B}$, также $-U \in \mathfrak{B}$.*

Предложение 2. *Для того чтобы топологическая группа G была отделима, необходимо и достаточно, чтобы множество $\{e\}$ было замкнуто.*

Необходимость условия очевидна; обратно, если оно выполнено, то диагональ Δ в $G \times G$, являющаяся прообразом множества $\{e\}$ относительно непрерывного отображения $(x, y) \mapsto xy^{-1}$, есть замкнутое множество, и, значит (гл. I, § 8, предложение 1), G отделима.

Следствие. *Для того чтобы топологическая группа G была отделима, необходимо и достаточно, чтобы пересечение всех окрестностей нейтрального элемента e сводилось к e.*

Необходимость условия очевидна; обратно, если оно выполнено, то множество $\{e\}$ замкнуто: действительно, если $x \neq e$,

то существует окрестность V точки e такая, что $x^{-1} \notin V$, и, значит, $e \notin xV$, чем показано, что x не может быть точкой прикосновения для $\{e\}$.

Пример. *Определение групповой топологии множеством подгрупп.* Если $\mathfrak{B}$ — *базис фильтра* в группе G, состоящий из ее *подгрупп*, то ясно, что он удовлетворяет аксиомам ($\mathrm{GV'_I}$) и ($\mathrm{GV'_{II}}$), ибо для любой подгруппы H группы G имеем $HH^{-1} = H$. Поэтому, как только базис фильтра $\mathfrak{B}$ удовлетворяет аксиоме ($\mathrm{GV'_{III}}$) (выполняющейся, в частности, когда все группы из $\mathfrak{B}$ — нормальные делители, что всегда имеет место, когда G — *коммутативная* группа), он является *фундаментальной системой окрестностей* e для топологии, согласующейся со структурой группы в G. Для того чтобы определенная таким образом топология была *отделима*, необходимо и достаточно, согласно предложению 2, чтобы *пересечение всех подгрупп, принадлежащих* $\mathfrak{B}$, *сводилось* к e. Наиболее интересны те случаи, когда подгруппа $\{e\}$ *не принадлежит* $\mathfrak{B}$ (иначе топология, определенная посредством $\mathfrak{B}$, была бы дискретной); если это условие выполнено, то топология, определенная посредством $\mathfrak{B}$, может быть отделимой только в случае, когда $\mathfrak{B}$ — *бесконечное множество*.

Поскольку пересечение двух подгрупп есть подгруппа, топологию в группе G можно определить, исходя из *произвольного* множества $\mathfrak{F}$ подгрупп; достаточно рассмотреть сначала множество $\mathfrak{G}$ подгрупп aHa^{-1}, где H пробегает $\mathfrak{F}$, а a пробегает G, и затем множество $\mathfrak{B}$ пересечений всевозможных *конечных* наборов подгрупп, принадлежащих $\mathfrak{G}$; $\mathfrak{B}$ будет базисом фильтра, удовлетворяющим аксиоме ($\mathrm{GV'_{III}}$).

Рассмотрим, в частности, аддитивную группу некоторого *кольца* A; всякое множество $\mathfrak{F}$ *идеалов* кольца A (Алг., гл. I, § 8, n° 5) определяет топологию, согласующуюся со структурой этой аддитивной группы; эта топология отделима, если пересечение всех идеалов из $\mathfrak{F}$ есть нулевой идеал; она не дискретна, если никакое *конечное* число идеалов из $\mathfrak{F}$ не имеет своим пересечением нулевой идеал. Определенные таким способом топологии играют большую роль в теории чисел (см. упражнения к §§ 6 и 7 этой главы).

3. *Изоморфизмы и локальные изоморфизмы*

Согласно общим определениям (Теор. мн., гл. IV, § 1, n° 5), *изоморфизм* f топологической группы G *на* топологическую группу G' есть биективное отображение группы G на G', являющееся одновременно *изоморфизмом структуры группы в* G на структуру группы в G' и *гомеоморфизмом* G на G'. Иначе говоря, для того чтобы f было изоморфизмом G на G', необходимо и достаточно,

чтобы: 1° f было биективно; 2° $f(xy)=f(x)f(y)$, каковы бы ни были x и y из G; 3° f было взаимно непрерывно.

Например, для любой точки a из G отображение $x \mapsto axa^{-1}$ есть изоморфизм G на G, т. е. (там же) *автоморфизм* топологической группы G; он называется *внутренним автоморфизмом*.

Если топология $\mathcal{T}$ согласуется со структурой группы в G, то она согласуется также со структурой *противоположной* группы (Алг., гл. I, § 6, n° 1). Симметрия $x \mapsto x^{-1}$ есть *изоморфизм* топологической группы G на топологическую группу G^0, получающуюся путем наделения группы, противоположной G, топологией $\mathcal{T}$.

Определение 2. *Пусть даны топологические группы G и G'; локальным изоморфизмом G в G' называют гомеоморфизм f окрестности V нейтрального элемента из G на окрестность V' нейтрального элемента из G', удовлетворяющий следующим условиям:*

1° $f(xy)=f(x)f(y)$ *для любой пары точек x, y из V таких, что $xy \in V$.*

2° *Если g — отображение, обратное к f, то $g(x'y') = g(x')g(y')$ для любой пары точек x', y' из V таких, что $x'y' \in V'$.*

Отображение g является тогда локальным изоморфизмом G' в G.

Говорят, что топологические группы G и G' локально изоморфны, если существует локальный изоморфизм G в G'.

Две изоморфные топологические группы, очевидно, локально изоморфны, но обратное, вообще говоря, неверно.

°Например, в § 1 главы V мы увидим, что топологические группы **R** и **T** локально изоморфны, но не изоморфны.$_\circ$

Всякое *сужение* локального изоморфизма G в G' на окрестность нейтрального элемента из G является по-прежнему локальным изоморфизмом G в G'.

Локальный изоморфизм G в G называется также *локальным автоморфизмом* группы G.

Вообще говоря, гомеоморфизм f окрестности V нейтрального элемента группы G на окрестность V' нейтрального элемента группы G', удовлетворяющий условию 1° определения 2, не обяза-

тельно удовлетворяет условию 2° (см. упражнение 7). Однако G и G' все же тогда *локально изоморфны*; точнее говоря:

Предложение 3. *Пусть G и G' — топологические группы и f — гомеоморфизм окрестности V нейтрального элемента группы G на окрестность V' нейтрального элемента группы G', удовлетворяющий условию 1° определения 2; тогда f является продолжением локального изоморфизма G в G'.*

В самом деле, нетрудно видеть, что если W — такая окрестность нейтрального элемента группы G, что $WW \subset V$, то сужение f на W есть локальный изоморфизм G в G.

Упражнения

1) Всякая топология, согласующаяся со структурой *конечной* группы G, получается путем принятия за окрестности нейтрального элемента всех множеств, содержащих некоторый фиксированный нормальный делитель H группы G.

2) *Полутопологической* группой называется группа G, наделенная топологией, в которой переносы $x \longmapsto ax$, $x \longmapsto xa$ при любом $a \in G$ и симметрия $x \to x^{-1}$ непрерывны в G *).

а) Для того чтобы фильтр $\mathfrak{B}$ в группе G был фильтром окрестностей нейтрального элемента e для топологии, обращающей G в полутопологическую группу, необходимо и достаточно, чтобы $\mathfrak{B}$ удовлетворял аксиомам $(\mathrm{GV_{II}})$ и $(\mathrm{GV_{III}})$, а семейство фильтров $\mathfrak{B}(x) = x\mathfrak{B} = \mathfrak{B}x$ $(x \in G)$ — аксиоме $(\mathrm{V_{IV}})$ главы I, § 1, n° 2.

б) Показать, что в бесконечной группе G топология, для которой открытыми множествами служат $\varnothing$ и дополнения всевозможных конечных множеств из G, обращает G в неотделимую полутопологическую группу, в которой $\{e\}$ замкнуто, но не согласуется со структурой группы в G.

°в) Определить на числовой прямой $\mathbf{R}$ топологию, мажорирующую обычную, для которой $\mathbf{R}$ было бы полутопологической, но не топологической группой. [Рассмотреть убывающую последовательность (r_n) чисел > 0, стремящуюся к нулю, и взять пересечения симметричных интервалов $]-a, a[$ с дополнением множества точек $\pm r_n$.]°

3) Пусть A — множество в полутопологической (соотв. топологической) группе G. Показать, что пересечение множеств AV или множеств VA (соотв. множеств VAV), где V пробегает фильтр окрестностей точки e, есть замыкание $\overline{A}$ множества A.

---

*) Если G *локально компактна*, то эти условия влекут согласованность топологии в G со структурой группы (гл. X, 2-е изд., § 3, упражнение 25).

4) *Паратопологической* группой называется группа G, наделенная топологией, удовлетворяющей аксиоме $(\mathrm{GT_I})$ *).

а) Для того чтобы фильтр $\mathfrak{V}$ в группе G был фильтром окрестностей точки e для топологии, обращающей G в паратопологическую группу, необходимо и достаточно, чтобы $\mathfrak{V}$ удовлетворял аксиомам $(\mathrm{GV_I})$ и $(\mathrm{GV_{III}})$, а $e \in V$ для любого $V \in \mathfrak{V}$; соответствующая топология тогда единственна. Для ее отделимости необходимо и достаточно, чтобы пересечение множеств VV^{-1}, где V пробегает $\mathfrak{V}$, сводилось к точке e.

б) Пусть в группе $\mathbf{Z}$ целых чисел V_n для каждого $n > 0$ означает множество, состоящее из 0 и всех целых $m \geqslant n$. Показать, что V_n образуют фундаментальную систему окрестностей нуля для неотделимой топологии в $\mathbf{Z}$, обращающей $\mathbf{Z}$ в паратопологическую группу, в которой $\{0\}$ замкнуто.

в) Для того чтобы паратопологическая группа G была топологической группой, необходимо и достаточно, чтобы для любого $A \subset G$ пересечение множеств AV (или множеств VA), где V пробегает фильтр окрестностей точки e, было замыканием $\overline{A}$ множества A. [Чтобы убедиться в достаточности условия, принять за A дополнение открытой окрестности точки e.]

5) Пусть $\mathfrak{V}$ — фильтр в группе G, удовлетворяющий аксиомам $(\mathrm{GV_I})$ и $(\mathrm{GV_{II}})$.

а) В G существует, и притом единственная, топология $\mathscr{T}_s$ (соотв. $\mathscr{T}_d$), в которой фильтром окрестностей любой точки $a \in G$ служит $a\mathfrak{V}$ (соотв. $\mathfrak{V}a$).

Пусть G_s (соотв. G_d) — топологическое пространство, получающееся при наделении G топологией $\mathscr{T}_s$ (соотв. $\mathscr{T}_d$). Для любого $a \in G$ левый перенос $x \longmapsto ax$ (соотв. правый перенос $x \longmapsto xa$) есть непрерывное отображение G_s в G_s (соотв. G_d в G_d). Симметрия $x \longmapsto x^{-1}$ есть непрерывное отображение G_s в G_d и G_d в G_s.

б) Следующие условия равносильны: 1° $\mathfrak{V}$ удовлетворяет аксиоме $(\mathrm{GV_{III}})$; 2° $x \longmapsto xa$ есть непрерывное отображение G_s в G_s для любого $a \in G$; 3° $x \longmapsto x^{-1}$ есть непрерывное отображение G_s в G_s.

°в) Пусть G_0 — группа $\mathbf{GL}(2, \mathbf{Q}_p)$ квадратных матриц второго порядка над p-адическим телом $\mathbf{Q}_p$. Обозначим через H_n для каждого целого $n > 0$ множество всех матриц вида $I + p^n U$, где U — матрица второго порядка, элементами которой являются целые p-адические числа. Показать, что все $H_n^{\mathbf{N}}$ — подгруппы группы $G = G_0^{\mathbf{N}}$, пересечение которых сводится к нейтральному элементу. Вывести отсюда, что если $\mathfrak{V}$ — фильтр, имеющий базис, образованный подгруппами $H_n^{\mathbf{N}}$, то соответствующие топологии $\mathscr{T}_s$ и $\mathscr{T}_d$ в G отделимы; показать, что эти топологии различны.$_\circ$

---

*) См. предыдущую сноску.

6) Пусть G — топологическая группа и V — открытая окрестность точки e в G. Показать, что множество тех $x \in V$, для которых $x^2 \in V$, является объединением всех окрестностей W точки e, для которых $W^2 \subset V$.

°7) Пусть φ — каноническое отображение $\mathbf{R}$ на $\mathbf{T} = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ и f — сужение отображения $x \mapsto \varphi(3x)$ на окрестность $V = \left[-\frac{1}{8}, +\frac{1}{8}\right]$ нуля в $\mathbf{R}$; показать, что f есть гомеоморфизм V на $f(V)$, удовлетворяющий условию 1° определения 2, но не является локальным изоморфизмом $\mathbf{R}$ в $\mathbf{T}$.$_\circ$

*8) Пусть G — отделимая топологическая группа и $s \neq e$ — точка из G. Показать, что существуют симметричная окрестность V точки e, для которой $s \notin V^2$, и покрытие группы G, состоящее самое большее из 17 множеств вида $a_k V b_k$ $(1 \leqslant k \leqslant 17)$. [Рассмотреть максимальный элемент множества тех симметричных окрестностей V точки e, для которых $s \notin V^2$. Это подведет к рассмотрению множества S тех $x \in G$, для которых $x^2 = s$; заметить, что если x, y — элементы из S такие, что $xy^{-1} \in S$, то необходимо $s^2 = e$, и если третий элемент z из S таков, что $xz^{-1} \in S$ и $yz^{-1} \in S$, то он необходимо перестановочен с xy^{-1}, а $xy^{-1}z^{-1} \notin S$.] Если группа G коммутативна, то можно заменить 17 на 5.

9) Показать, что в группе G верхняя грань всякого семейства топологий, согласующихся со структурой группы G, также согласуется с этой структурой.

§ 2. Подгруппы; факторгруппы; гомоморфизмы; однородные пространства; произведения групп

1. *Подгруппы топологической группы*

Пусть G — топологическая группа и H — ее подгруппа. В силу (GT′) топология, индуцированная в H из G, согласуется со структурой группы H; говорят, что определенная так структура *топологической группы в H индуцирована* структурой топологической группы из G. Если не оговорено противное, то, рассматривая подгруппу H группы G как топологическую группу, мы всегда будем иметь в виду эту индуцированную структуру.

Предложение 1. *Замыкание $\overline{H}$ подгруппы H топологической группы G есть подгруппа группы G. Если H — нормальный делитель, то $\overline{H}$ — тоже нормальный делитель.*

В самом деле, если a и b — точки прикосновения для H, то и ab^{-1} есть точка прикосновения для H, ибо отображение

$(x, y) \longmapsto xy^{-1}$ непрерывно на $G \times G$ и переводит $H \times H$ в $\overline{H}$ (гл. I, § 2, теорема 1). Таким же образом на основании непрерывности отображения $x \longmapsto axa^{-1}$ убеждаемся в том, что если H — нормальный делитель, то и $\overline{H}$ — нормальный делитель.

В частности, замыкание N множества $\{e\}$, состоящего из одного нейтрального элемента группы G, есть *нормальный делитель* этой группы; для того чтобы N сводилось к e, необходимо и достаточно (§ 1, предложение 2), чтобы G была *отделима.*

Предложение 2. *В отделимой группе G замыкание коммутативной подгруппы H есть коммутативная подгруппа.*

В силу предложения 1 можно ограничиться случаем, когда H всюду плотна в G; тогда непрерывные функции xy и yx, будучи равны на $H \times H$, будут, по принципу продолжения тождеств (гл. I, § 8, следствие 1 предложения 2), равны и на $G \times G$.

Предложение 3. *В отделимой группе G множество M' элементов, перестановочных с элементами произвольного множества $M \subset G$, есть замкнутая подгруппа. В частности, центр группы G замкнут в G.*

В самом деле, M' есть пересечение множеств F_m, где m пробегает M, тех $x \in G$, для которых $xm = mx$; поэтому справедливость предложения вытекает из замкнутости всех F_m (гл. I, § 8, предложение 2).

Предложение 4. *В топологической группе G всякая подгруппа H, локально замкнутая в какой-либо точке* (гл. I, § 3, n° 3, определение 2), *замкнута.*

Посредством переноса убеждаемся в том, что H локально замкнута в каждой своей точке, иначе говоря, что H локально замкнута в G. Пусть V — симметричная открытая окрестность точки e в G, для которой $V \cap H$ замкнуто в V. Если $x \in \overline{H}$, то $xV \cap H \neq \varnothing$; беря $y \in xV \cap H$, имеем $x \in yV$; но $y(V \cap H) = (yV) \cap H$ замкнуто в yV; так как x есть точка прикосновения для $(yV) \cap H$, то заключаем, что $x \in H$.

Следствие. *Для того чтобы подгруппа топологической группы была открыта, необходимо и достаточно, чтобы она содержала внутреннюю точку. Всякая открытая подгруппа замкнута.*

Первое утверждение очевидно, ибо если подгруппа H имеет внутреннюю точку, то переносом убеждаемся в том, что все ее точки внутренние. Второе утверждение есть частный случай предложения 4.

Предложение 5. *Для того чтобы подгруппа H топологической группы G была дискретна, необходимо и достаточно, чтобы она содержала изолированную точку. Всякая дискретная подгруппа отделимой группы замкнута.*

Если H имеет изолированную точку, то переносом убеждаемся в том, что все ее точки изолированные и, значит, H дискретна. Второе утверждение есть частный случай предложения 4, ибо если G отделима, то $\{e\}$ замкнуто в G и тем более во всякой окрестности точки e.

Замечание. Пусть H — произвольная подгруппа топологической группы G. Для любого $x \in \overline{H}$ имеем $\overline{xH} = x\overline{H} = \overline{H}$, поскольку переносы — гомеоморфизмы G на себя. Другими словами, xH *плотно* в $\overline{H}$ для любого $x \in \overline{H}$. Отсюда заключаем, что если H не замкнута, то $\overline{H} \cap \complement H$ *плотно в* $\overline{H}$.

2. Связные компоненты топологической группы

Пусть V — *симметричная* окрестность e в G; подгруппа, *порожденная* V, обозначаемая V^∞ (Алг., гл. I, § 6, n° 2), образована, как известно, композициями $\coprod_{i=1}^{n} x_i$ всевозможных конечных последовательностей элементов из V; подгруппа V^∞ *открыта*, ибо e — ее внутренняя точка; значит, по предложению 4 V^∞ *замкнута*. Отсюда заключаем:

Предложение 6. *Всякая связная группа порождается любой окрестностью ее нейтрального элемента.*

Обратное предложение, вообще говоря, неверно, как мы это увидим в главе IV (§ 2, n° 5). Если топологическая группа G порождается любой окрестностью нейтрального элемента, то можно только сказать, что она не содержит *ни одной открытой подгруппы*, отличной от G.

°В качестве примера несвязной группы G, содержащей открытую подгруппу, отличную от G, укажем *мультипликативную группу* $\mathbf{R}^*$ вещественных чисел $\neq 0$, в которой подгруппа $\mathbf{R}_+^*$ чисел >0 одновременно открыта и замкнута (см. гл. IV, § 3, n° 2).。

Предложение 7. *В топологической группе G связная компонента K нейтрального элемента e есть замкнутый нормальный делитель; связной компонентой точки x служит класс $xK = Kx$.*

В самом деле, если $a \in K$, то $a^{-1}K$ связно и содержит e; таким образом, $K^{-1}K \subset K$, чем доказано, что K — подгруппа группы G; эта подгруппа инвариантна относительно любого автоморфизма группы G, в частности относительно любого внутреннего автоморфизма, так что K — *нормальный делитель*; кроме того, мы знаем (гл. I, § 11, предложение 9), что K замкнута. Наконец, так как левый перенос $y \mapsto xy$ есть гомеоморфизм G на себя, отображающий e в x, то связной компонентой точки x является xK.

Связная компонента нейтрального элемента e группы G называется *нейтральной компонентой* этой группы.

3. Всюду плотные подгруппы

Следующее предложение обобщает предложение 1:

Предложение 8. *Пусть H — всюду плотная подгруппа топологической группы G; если K — нормальный делитель подгруппы H, то его замыкание $\overline{K}$ в G есть нормальный делитель группы G.*

В самом деле, отображение $(z, x) \mapsto zxz^{-1}$ непрерывно на $G \times G$ и отображает $H \times K$ в K; следовательно (гл. I, § 2, теорема 1), оно отображает $G \times \overline{K} = \overline{H} \times \overline{K}$ в $\overline{K}$.

Предложение 9. *Пусть H — всюду плотная подгруппа топологической группы G; если H порождается любой окрестностью нейтрального элемента, то и G порождается любой окрестностью нейтрального элемента.*

В самом деле, пусть V — произвольная симметричная окрестность нейтрального элемента e в G; тогда $V \cap H$ есть окрестность нейтрального элемента в H, которая, по условию, порождает H; следовательно, V порождает подгруппу H', содержащую H; но H' открыто-замкнута (следствие предложения 4) и потому содержит $\overline{H} = G$.

4. *Пространства с операторами*

Пусть E — топологическое пространство, G — топологическая группа. Говорят, что *G действует непрерывно в E*, если выполняются следующие условия:

1° E наделено группой операторов G, иными словами (Алг., гл. I, § 7, n° 2), E наделено внешним законом композиции $(s, x) \mapsto sx$ с областью операторов G, таким, что $s(tx) = (st)x$ и $ex = x$ для всех s, t из G и x из E.

2° Отображение $(s, x) \mapsto sx$ произведения $G \times E$ в E *непрерывно.*

Лемма 1. *Если G — топологическая группа, действующая непрерывно в топологическом пространстве E, то для каждого $s \in G$ отображение $x \mapsto sx$ есть гомеоморфизм E на себя.*

В самом деле, это отображение есть непрерывная биекция, для которой обратная биекция $x \mapsto s^{-1}x$ также непрерывна.

Напомним (Алг., гл. I, 3-е изд., Исправления к выпуску IV), что множество Gx образов sx точки x при отображениях, определяемых всевозможными элементами $s \in G$, называется *орбитой* этой точки (относительно группы операторов G); множество тех $s \in G$, для которых $sx = x$, есть подгруппа группы G, называемая *стабилизатором* точки x. Отношение $R\{x, y\}$: «y принадлежит орбите x» есть отношение эквивалентности в E, *определяемое группой G*; классы эквивалентности по этому отношению — орбиты точек из E. Топологическое пространство E/R называется *пространством орбит* группы G в E или также *факторпространством пространства E по группе G* и обозначается E/G; его топология называется *фактортопологией топологии пространства E по группе G.*

Лемма 2. *Отношение эквивалентности R, определяемое топологической группой G, действующей непрерывно в топологическом пространстве E, открыто.*

В самом деле, насыщением по R открытого множества U из E служит множество $\bigcup_{s \in G} sU$, а каждое sU открыто (лемма 1).

Примеры. 1) Пусть H — подгруппа топологической группы G; H действует непрерывно в G по внешнему закону $(s, x) \mapsto sx$. Она действует непрерывно в G также по внешнему закону $(s, x) \mapsto sxs^{-1}$.

2) °Мультипликативная группа K^* топологического тела K (§ 6, n° 7) действует непрерывно в K по внешнему закону $(s, x) \mapsto sx$.$_\circ$

3) Пусть G — топологическая группа и E — топологическое пространство; отображение $(s, x) \mapsto x$ произведения $G \times E$ в E есть внешний закон в E, и G действует непрерывно в E по этому закону; в этом случае говорят, что G действует в E *тривиально*.

Замечание. Вместо того чтобы говорить, что топологическая группа G действует непрерывно в топологическом пространстве E, иногда говорят также, что G действует непрерывно в E *слева*. Если топологическая группа G^0, противоположная G, действует непрерывно в E, то говорят, что G действует непрерывно в E *справа*; другими словами, E наделено непрерывным внешним законом композиции $(s, x) \mapsto sx$ с областью операторов G, для которого $s(tx) = (ts)x$ и $ex = x$. Такой закон часто записывают *справа*: $(s, x) \mapsto xs$ (откуда и название), и тогда $(xt)s = x(ts)$. Если группа G действует непрерывно в E справа по закону $(s, x) \mapsto xs$, то, в силу аксиомы (GT_{II}), она действует также непрерывно в E слева по новому внешнему закону $(s, x) \mapsto xs^{-1}$.

Пусть E (соотв. E') — множество, наделенное группой операторов G (соотв. G'), f — представление G в G' и g — отображение E в E'. Говорят, что f и g *согласуются*, если $g(sx) = f(s)g(x)$ для любых $s \in G$ и $x \in E$. Если E'' — третье множество, наделенное группой операторов G'', f' — представление G' в G'', g' — отображение E' в E'', а f' и g' согласуются, то тогда также $f' \circ f$ и $g' \circ g$ согласуются. Пусть E и E' — топологические пространства, а G и G' — топологические группы, действующие непрерывно соответственно в E и E'; говорят, что (f, g) есть *морфизм* пространства с операторами E в пространство с операторами E', если f и g *непрерывны* и *согласуются*. С помощью факторизации, g определяет тогда непрерывное отображение E/G в E'/G' (гл. I, § 3, следствие предложения 6).

Пусть G — топологическая группа, действующая непрерывно в топологическом пространстве E, и φ — каноническое отображение E на пространство орбит E/G. Пусть, далее, A — произвольное множество в E и A' — порождаемое им подпространство

в E, насыщенное по отношению эквивалентности R, определяемому группой G (объединение орбит всевозможных точек из A; A' называется также *насыщением* A *по* G); тогда G действует непрерывно в A' по сужению $(s, x) \mapsto sx$ на $G \times A'$. Кроме того, поскольку R открыто (лемма 2), а A' насыщенно, предложение 4 § 5 главы I и соотношение $\varphi(A) = \varphi(A')$ влекут

Предложение 10. *Каноническая биекция подпространства* $\varphi(A)$ *пространства* E/G *на пространство орбит* A'/G *есть гомеоморфизм.*

Пусть теперь S — такое отношение эквивалентности в E, что отображение $x \mapsto sx$ для любого $s \in G$ *согласуется* с S (иначе говоря, отношение $x \equiv y \pmod S$ влечет $sx \equiv sy \pmod S$); для краткости мы будем говорить в этом случае, что отношение S *согласуется с группой* G. Пусть ψ — каноническое отображение E на E/S и $s\psi(x)$ означает класс $\mathrm{mod}\ S$ точки sx; тогда пространство E/S наделено группой операторов G по внешнему закону $(s, \psi(x)) \mapsto s\psi(x) = \psi(sx)$. При этом:

Предложение 11. *Если отношение эквивалентности* S *в* E *открыто и согласуется с* G, *то* G *действует непрерывно в* E/S.

Так как отношение равенства (соотв. отношение S) открыто в G (соотв. в E), то все сводится к доказательству непрерывности отображения $(s, x) \mapsto s\psi(x) = \psi(sx)$ пространства $G \times E$ в E/S (гл. I, § 5, следствие предложения 8), а это вытекает из непрерывности отображений ψ и $(s, x) \mapsto sx$.

Замечание. Пусть G' — вторая топологическая группа, действующая непрерывно в E, и предположим, что $s(s'x) = s'(sx)$ для любых $s \in G$, $s' \in G'$ и $x \in E$; тогда отношение эквивалентности S, определяемое группой G', согласуется с G, и так как оно открыто (лемма 2), то мы видим, что G действует непрерывно в E/G'; точно так же, G' действует тогда непрерывно в E/G. В этом случае говорят, что группы G и G' действуют в E *перестановочно*.

5. *Однородные пространства*

Пусть G — топологическая группа, H — ее подгруппа. Группа H действует непрерывно в G *справа* по внешнему закону $(t, x) \mapsto xt$, причем орбитой точки $x \in G$ служит левый класс xH по H. Таким образом, множество всех орбит есть то, что мы назвали

в алгебре (Алг., гл. I, § 7, n° 6) *однородным пространством* G/H. Говоря о G/H как о топологическом пространстве, мы всегда, если не оговорено противное, будем понимать под ним пространство орбит группы G (относительно H), т. е. факторпространство пространства G по отношению эквивалентности $x^{-1}y \in H$. В соответствии с общими определениями мы называем топологию этого пространства *фактортопологией топологии группы* G *по* H.

Предложение 12. *Группа* G *действует непрерывно во всяком однородном пространстве* G/H.

Поскольку отношение эквивалентности $x^{-1}y \in H$ открыто (лемма 2), это утверждение есть частный случай предложения 11.

Предложение 13. *Пусть* G — *топологическая группа,* H — *ее подгруппа. Для того чтобы однородное пространство* G/H *было отделимо, необходимо и достаточно, чтобы* H *было замкнуто в* G.

Условие необходимо, поскольку H есть класс эквивалентности по отношению $x^{-1}y \in H$. Обратно, если H замкнуто, то график этого отношения замкнут в $G \times G$ как прообраз H относительно непрерывного отображения $(x, y) \mapsto x^{-1}y$, и так как отношение эквивалентности $x^{-1}y \in H$ открыто, то G/H отделимо (гл. I, § 8, предложение 8).

Предложение 14. *Пусть* G — *топологическая группа,* H — *ее подгруппа. Для того чтобы однородное пространство* G/H *было дискретно, необходимо и достаточно, чтобы* H *было открыто в* G.

В самом деле, прообразами в G точек из G/H относительно канонического отображения служат классы xH ($x \in G$); для того чтобы эти множества были открыты в G, необходимо и достаточно, чтобы H было открыто в G.

Пусть E — топологическое пространство, в котором топологическая группа G действует непрерывно и *транзитивно*; E является тогда (в алгебраическом смысле) *однородным пространством* группы G (Алг., гл. I, § 7, n° 6). Пусть x — точка из E и H_x — ее стабилизатор. Непрерывная сюръекция $s \mapsto sx$ группы G на E канонически представляется в виде композиции

$$G \xrightarrow{f_x} G/H_x \xrightarrow{g_x} E,$$

где f_x — каноническое отображение группы G на однородное пространство G/H_x, а g_x — биекция $sH_x \mapsto sx$ пространства G/H_x на E; при этом, как известно (гл. I, § 3, предложение 6), отображение g_x *непрерывно*. Однако g_x может не быть гомеоморфизмом G/H_x на E (упражнение 29). Если g_x для каждого $x \in E$ есть гомеоморфизм, то E называется *топологическим однородным пространством* (соответствующим топологической группе G); для этого необходимо и достаточно, чтобы отображение $s \mapsto sx$ группы G в E было при любом $x \in E$ открытым.

Предложение 15. *Для того чтобы топологическое пространство E, в котором топологическая группа G действует непрерывно и транзитивно, было топологическим однородным пространством (относительно G), достаточно, чтобы для какой-либо точки $x_0 \in E$ отображение $s \mapsto sx_0$ преобразовывало всякую окрестность нейтрального элемента e группы G в окрестность точки x_0 в E.*

В самом деле, всякое $x \in E$ записывается в виде $x = tx_0$ с некоторым $t \in G$; если V — окрестность e, то $Vx = (Vt)\,x_0$ есть окрестность x, ибо $(Vt)\,x_0$ можно записать в виде $t\,((t^{-1}Vt)\,x_0)$, а $t^{-1}Vt$ — окрестность e в G и $y \mapsto ty$ — гомеоморфизм E на себя (лемма 1). Отсюда вытекает, что Ux открыто в E для каждого открытого множества U из G и каждого $x \in E$; действительно, $t^{-1}U$ для каждого $t \in U$ есть окрестность e; поэтому $(t^{-1}U)\,x$ есть окрестность x, а $t\,((t^{-1}U)\,x) = Ux$ — окрестность tx, откуда и следует наше утверждение, завершающее доказательство предложения.

6. *Факторгруппы*

Предложение 16. *Пусть G — топологическая группа и H — ее нормальный делитель. Фактортопология топологии G по H согласуется со структурой группы в G/H.*

Пусть $x \mapsto \dot{x}$ — каноническое отображение G на G/H; требуется доказать, что $(\dot{x}, \dot{y}) \mapsto \dot{x}\dot{y}^{-1}$ есть непрерывное отображение $(G/H) \times (G/H)$ в G/H. Поскольку отношение эквивалентности $x^{-1}y \in H$ открыто (лемма 2), достаточно показать, что $(x, y) \mapsto \dot{\overline{xy^{-1}}}$ есть непрерывное отображение $G \times G$ в G/H (гл. I, § 5, следствие

предложения 8 и § 3, предложение 6). Но это вытекает из того, что последнее отображение есть композиция непрерывных отображений $x \mapsto \dot{x}$ и $(x, y) \mapsto xy^{-1}$.

Впредь, когда мы будем говорить о факторгруппе G/H топологической группы G как о топологической группе, всюду, где не оговорено противное, будет подразумеваться, что она наделена фактортопологией топологии группы G по H.

Предложение 17. *Пусть φ — каноническое отображение топологической группы G на факторгруппу G/H. Если $\mathfrak{B}$ — фундаментальная система окрестностей нейтрального элемента e в G, то $\varphi(\mathfrak{B})$ есть фундаментальная система окрестностей нейтрального элемента $\varphi(e)$ в G/H.*

Это частный случай предложения 5 § 5 главы I.

Предложения 13 и 14 дают, в частности, для факторгрупп:

Предложение 18. *Пусть G — топологическая группа и H — ее нормальный делитель.*

а) *Для отделимости факторгруппы G/H необходимо и достаточно, чтобы H было замкнуто в G.*

б) *Для дискретности факторгруппы G/H необходимо и достаточно, чтобы H было открыто в G.*

Если G — топологическая группа, то замыкание N множества $\{e\}$ в G является замкнутым нормальным делителем группы G (предложение 1), и, значит, G/N отделимо; G/N называется *отделимой группой, ассоциированной с G.*

Предложение 19. *Если H — дискретный нормальный делитель топологической группы G, то G/H локально изоморфно* (§ 1, n° 3) G.

В самом деле, пусть V — окрестность e в G, не содержащая ни одной точки из H, отличной от e, и W — симметричная открытая окрестность e в G, для которой $W^2 \subset V$. Сужение на W канонического отображения φ группы G на G/H *инъективно*: действительно, отношение $\varphi(x) = \varphi(y)$ означает, что $x^{-1}y \in H$, а если $x \in W$, $y \in W$, то $x^{-1}y \in W^2 \subset V$, откуда $x = y$. По предложе-

нию 17 сужение φ на W является поэтому гомеоморфизмом W на $\varphi(W)$; так как, кроме того, $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$ для любых x, y из W, то G и G/H локально изоморфны (§ 1, предложение 3).

7. *Подгруппы и факторгруппы факторгруппы*

Пусть G — топологическая группа, H — ее нормальный делитель и φ — каноническое отображение G на G/H. Как известно (Алг., гл. I, § 6, n° 13), если A' — подгруппа группы G/H, то $\overset{-1}{\varphi}(A')$ есть подгруппа группы G, содержащая H. Обратно, если A — подгруппа группы G, то $\varphi(A)$ — подгруппа группы G/H; при этом существуют каноническая биекция факторгруппы $A/(A \cap H)$ на подгруппу $\varphi(A)$ группы G/H и каноническая биекция подгруппы $\varphi(A)$ на факторгруппу AH/H, и эти биекции — изоморфизмы относительно *структур группы*.

Предложение 20. *Пусть A — подгруппа топологической группы G, H — нормальный делитель группы G и φ — каноническое отображение G на G/H. Каноническая биекция группы $\varphi(A)$ на AH/H есть изоморфизм топологических групп.*

Это вытекает из предыдущих замечаний и предложения 10.

Каноническая биекция группы $A/(A \cap H)$ на $\varphi(A)$ есть непрерывное представление, ибо получается факторизацией сужения φ на A; однако топологические группы $A/(A \cap H)$ и AH/H, вообще говоря, *не изоморфны* (см. § 4, следствие 3 предложения 1).

°Возьмем, например, в качестве G аддитивную группу $\mathbf{R}$ вещественных чисел, в качестве H — группу $\mathbf{Z}$ целых чисел и в качестве A — группу $\theta\mathbf{Z}$ целочисленных кратных иррационального числа θ. Тогда $A \cap H = \{0\}$, так что $A/(A \cap H)$ — дискретная группа, изоморфная $\mathbf{Z}$; напротив, $A + H$ всюду плотно в $\mathbf{R}$ (как мы увидим в главе V, § 1, предложение 1), и потому $(A + H)/H$, локально изоморфное $A + H$ (предложение 19), не является дискретной группой и, значит, не изоморфно $A/(A \cap H)$.°

Однако справедливо следующее предложение:

Предложение 21. *Пусть G — топологическая группа, G_0 — ее всюду плотная подгруппа, H_0 — замкнутый нормальный делитель группы G_0, H — его замыкание в G и φ — каноническое*

отображение $G \to G/H$; *тогда каноническая биекция* $G_0/H_0 \to \varphi(G_0)$ *есть изоморфизм топологической группы* G_0/H_0 *на всюду плотную подгруппу группы* G/H.

Так как $H_0 = H \cap G_0$, то все сводится к доказательству того, что открытое множество U_0 в G_0, насыщенное по отношению $x^{-1}y \in H_0$, является следом на G_0 некоторого открытого множества из G, насыщенного по отношению $x^{-1}y \in H$ (гл. I, § 3, предложение 10). Пусть U — открытое множество в G, для которого $U_0 = U \cap G_0$; так как $U_0 = U_0H_0$, то $U_0 = UH_0 \cap G_0$; поскольку UH_0 открыто в G, можно поэтому считать, что $U = UH_0$. Тогда множество UH открыто в G и насыщено по отношению $x^{-1}y \in H$; покажем, что $UH \cap G_0 = U_0$, чем и будет завершено доказательство. Пусть $u \in U$ и $h \in H$ таковы, что $uh \in G_0$; e обладает симметричной окрестностью V в G, для которой $uV \subset U$; так как Vh есть окрестность h в G, то существует такое $z \in V$, что $zh \in H_0$. Так как тогда $uz^{-1} \in U$ и $uh = (uz^{-1})(zh)$, то можно считать, что $h \in H_0$. Поскольку $UH_0 = U$, заключаем, что $uh \in U_0$.

Пусть G — топологическая группа, действующая непрерывно в топологическом пространстве E, и K — ее *нормальный делитель*, содержащийся в стабилизаторе *каждой* точки из E. Для любого $x \in E$ отношение $s \equiv t \pmod K$ влечет, таким образом, $sx = tx$, откуда посредством факторизации получаем отображение $\dot{s} \mapsto \dot{s}x$ группы G/K в E; непосредственно проверяется, что пространство E оказывается наделенным группой операторов G/K по так определенному внешнему закону $(\dot{s}, x) \mapsto \dot{s}x$. При этом G/K действует *непрерывно* в E по этому закону: действительно, так как отношение равенства в E и отношение $s \equiv t \pmod K$ в G открыты, то это вытекает из непрерывности отображения $(s, x) \mapsto \dot{s}x = sx$ произведения $G \times E$ в E (гл. I, § 5, следствие предложения 8, и § 3, предложение 6).

Пусть теперь G — топологическая группа, действующая непрерывно в топологическом пространстве E, и H — любой ее *нормальный делитель*. Группа H действует непрерывно в E; пусть S — определяемое ею отношение эквивалентности в E, открытое по лемме 2. Отношение S *согласуется с группой* G (n° 4).

Действительно, если $y \equiv x \pmod{S}$, то существует $t \in H$ такое, что $y = tx$, так что $sy = (sts^{-1})(sx)$ при любом $s \in G$; но так как H — нормальный делитель, то $sts^{-1} \in H$, чем наше утверждение и доказано. Группа G действует, таким образом, непрерывно в E/S по внешнему закону $(s, \psi(x)) \mapsto \psi(sx)$, где ψ — каноническое отображение E на E/S (предложение 11). Так как, кроме того, группа H содержится в стабилизаторе каждой точки из E/S, то, как мы видели выше, *G/H действует непрерывно в $E/S = E/H$ по внешнему закону* $(\dot{s}, \psi(x)) \mapsto \psi(sx)$. Обозначим через R отношение эквивалентности в E, определяемое группой G; тогда отношение S влечет R, и отношение эквивалентности R/S в E/S будет определяться группой G/H. Следовательно (гл. I, § 3, предложение 7):

Предложение 22. *Пусть G — топологическая группа, действующая непрерывно в топологическом пространстве E, и H — ее нормальный делитель. Каноническая биекция E/G на $(E/H)/(G/H)$ есть гомеоморфизм.*

Следствие. *Пусть G — топологическая группа, H — ее нормальный делитель и K — нормальный делитель группы G, содержащий H; каноническая биекция G/K на $(G/H)/(K/H)$ есть изоморфизм топологических групп.*

Как мы уже знаем (Алг., гл. I, § 6, n° 13), эта биекция есть изоморфизм групп, и, чтобы завершить доказательство следствия, остается применить предложение 22 (к группе K, действующей справа в G).

8. *Непрерывные представления и строгие морфизмы*

Предложение 23. *Для того, чтобы представление f топологической группы G в топологическую группу G' было непрерывно на G, необходимо и достаточно, чтобы оно было непрерывно в какой-либо точке.*

Необходимость условия очевидна. Обратно, если f непрерывно в точке $a \in G$ и V' — окрестность точки $f(a)$, то $\overset{-1}{f}(V') = V$ есть окрестность точки a; для каждого $x \in G$ имеем тогда $f(xa^{-1}V) = f(x)(f(a))^{-1} f(V) \subset f(x)(f(a))^{-1}V'$, чем установлена непрерывность f в точке x.

Непрерывное представление топологической группы G в топологическую группу G' называется еще *морфизмом* G в G' для структур топологических групп (см. Теор. мн., гл. IV, § 2, n° 1).

Пусть f — непрерывное представление топологической группы G в топологическую группу G'; прообраз $H = \overset{-1}{f}(e')$ нейтрального элемента e' группы G' есть *нормальный делитель* группы G, а $f(G)$ — *подгруппа* группы G'. Рассмотрим каноническую факторизацию $f = \psi \circ \dot{f} \circ \varphi$, где φ — каноническое отображение $G \to G/H$, ψ — каноническая инъекция $f(G) \to G'$ и, наконец, $\dot{f}$ — *биективное непрерывное представление* факторгруппы G/H на подгруппу $f(G)$ (гл. I, § 3, n° 5); $\dot{f}$ называется биективным представлением, *ассоциированным с* f. Вообще говоря, $\dot{f}$ не является изоморфизмом топологических групп.

Пусть, например, G' — недискретная топологическая группа и G — топологическая группа, получаемая путем наделения G' дискретной топологией; тождественное отображение G в G' есть непрерывное биективное представление, не являющееся взаимно непрерывным.

Определение 1. *Непрерывное представление f топологической группы G в топологическую группу G' называется строгим морфизмом* (или *гомоморфизмом*) *G в G', если биективное представление $\dot{f}$ группы $G/\overset{-1}{f}(e')$ на $f(G)$, ассоциированное с f, есть изоморфизм топологических групп* (*иными словами, если $\dot{f}$ взаимно непрерывно*).

Таким образом, изоморфизм топологической группы G на топологическую группу G' есть биективный строгий морфизм G в G'.

Предложение 24. *Пусть f — непрерывное представление топологической группы G в топологическую группу G'; следующие три утверждения равносильны:*

а) *f есть строгий морфизм;*

б) *образ при f всякого открытого множества из G есть открытое множество в $f(G)$;*

в) *образ при f любой окрестности нейтрального элемента в G есть окрестность нейтрального элемента в $f(G)$.*

С учетом леммы 2 равносильность а) и б) вытекает сразу из определений (гл. I, § 5, предложение 5). Равносильность б) и в) есть частный случай предложения 15, если заметить, что G действует непрерывно в $f(G)$ по внешнему закону $(s, f(t)) \longmapsto f(st)$.

Замечания. 1) В силу условия б) предложения 24 всякое непрерывное представление топологической группы в *дискретную* группу есть *строгий морфизм*.

Если группа G *компактна*, а $f(G)$ *отделимо*, то биективное представление $\dot{f}$, ассоциированное с f, взаимно непрерывно (гл. I, § 10, следствие 2 теоремы 1 и следствие 4 предложения 5); следовательно, *всякое непрерывное представление компактной группы в отделимую группу есть строгий морфизм.*

2) Пусть f — строгий морфизм G в G' и g — строгий морфизм G' в G''; если f *сюръективно* или g *инъективно*, то из предложения 24 сразу следует, что $g \circ f$ есть строгий морфизм G в G''. Напротив, последнее уже не обязательно верно, когда не выполнено ни одно из указанных двух предположений, даже если f инъективно, а g сюръективно (упражнение 19).

3) Пусть f — непрерывное представление топологической группы G в топологическую группу G' и H — нормальный делитель группы G; f порождает посредством факторизации представление g группы G/H на факторгруппу $f(G)/f(H)$. Это представление *непрерывно* (гл. I, § 3, следствие предложения 6). Кроме того, если *f — строгий морфизм G в G'*, то *g — строгий морфизм G/H* на $f(G)/f(H)$; действительно, пусть U — открытое множество в G/H и φ (соотв. φ') — каноническое отображение G на G/H (соотв. $f(G)$ на $f(G)/f(H)$); тогда $g(U) = \varphi'(f(\overset{-1}{\varphi}(U)))$, и так как $\overset{-1}{\varphi}(U)$ открыто в G, то $g(U)$ открыто в $f(G)/f(H)$, откуда и следует наше утверждение.

9. *Произведение топологических групп*

Пусть $(G_\iota)_{\iota \in I}$ — семейство топологических групп. Как известно (Алг., гл. I, § 6, n° 5), закон композиции $(x_\iota)(y_\iota) = (x_\iota y_\iota)$ определяет в произведении $G = \prod_{\iota \in I} G_\iota$ структуру группы (называемую *произведением* структур групп в G_ι); при этом, если e_ι —

нейтральный элемент в G_ι, то $e = (e_\iota)$ — нейтральный элемент в G, а $(x_\iota)^{-1} = (x_\iota^{-1})$. *Произведение топологий* (гл. I, § 2, n° 3) групп G_ι *согласуется* с указанной структурой группы в G. Действительно, отображение $((x_\iota), (y_\iota)) \mapsto (x_\iota y_\iota^{-1})$ произведения $G \times G$ в G есть композиция отображения $((x_\iota, y_\iota)) \mapsto (x_\iota y_\iota^{-1})$ произведения $\prod_{\iota \in I} (G_\iota \times G_\iota)$ в G и канонического отображения $((x_\iota), (y_\iota)) \mapsto$ $\mapsto ((x_\iota, y_\iota))$ произведения $G \times G$ на $\prod_{\iota \in I} (G_\iota \times G_\iota)$, причем оба эти отображения непрерывны (гл. I, § 4, следствие 1 предложения 1 и предложение 2).

Определение 2. *Топологическая группа, полученная путем наделения множества $G = \prod_{\iota \in I} G_\iota$ произведением групповых структур групп G_ι и произведением топологий групп G_ι, называется произведением топологических групп G_ι.*

Каково бы ни было *разбиение* $(J_\varkappa)_{\varkappa \in K}$ множества I, G изоморфно произведению топологических групп $\prod_{\iota \in J_\varkappa} G_\iota$ (ассоциативность произведения).

Произведение топологических подгрупп H_ι топологических групп G_ι изоморфно топологической подгруппе $\prod_\iota H_\iota$ топологической группы $\prod_\iota G_\iota$. В частности, пусть J — произвольное подмножество множества I и $J' = \complement J$; топологическая группа $\prod_{\iota \in J} G_\iota$ изоморфна нормальному делителю $G'_J = (\prod_{\iota \in J} G_\iota) \times (\prod_{\iota \in J'} \{e_\iota\})$ группы G. Поскольку проекция всякого открытого множества открыта, проекция pr_J группы G на $\prod_{\iota \in J} G_\iota$ есть *строгий морфизм*; следовательно, факторгруппа G/G'_J изоморфна $G'_{J'}$: G изоморфна произведению $G'_J \times (G/G'_J)$.

Предложение 25. *Пусть $(G_\iota)_{\iota \in I}$ — семейство топологических групп и H — нормальный делитель группы $G = \prod_{\iota \in I} G_\iota$, образованной теми элементами $x = (x_\iota)$, в которых x_ι для всех, кроме конечного числа, индексов равно нейтральному элементу e_ι группы G_ι. Подгруппа H всюду плотна в G.*

Это частный случай предложения 8 § 4 главы I.

Пусть $(E_\iota)_{\iota \in I}$ — семейство топологических пространств и G_ι, для каждого $\iota \in I$, — топологическая группа, действующая непрерывно в E_ι. Очевидно, группа $G = \prod_{\iota \in I} G_\iota$ действует непрерывно в пространстве $E = \prod_{\iota \in I} E_\iota$ по внешнему закону $((s_\iota), (x_\iota)) \mapsto (s_\iota x_\iota)$ (гл. I, § 4, следствие 1 предложения 1 и предложение 2); кроме того, орбитой точки $x = (x_\iota)$ из E относительно G служит произведение орбит точек x_ι (относительно групп G_ι). Пусть φ_ι — каноническое отображение E_ι на E_ι/G_ι и $\varphi = (\varphi_\iota)$ — отображение E на $\prod_{\iota \in I} (E_\iota/G_\iota)$, являющееся произведением отображений φ_ι; предыдущее замечание показывает, что каноническая биекция, ассоциированная с φ, отображает пространство орбит E/G на $\prod_{\iota \in I} (E_\iota/G_\iota)$. Кроме того:

Предложение 26. *Биекция E/G на $\prod_{\iota \in I} (E_\iota/G_\iota)$, канонически ассоциированная с (φ_ι), есть гомеоморфизм.*

В самом деле, так как все φ_ι сюръективны и открыты, то $\varphi = (\varphi_\iota)$ открыто (гл. I, § 5, следствие предложения 8).

Следствие. *Пусть $(G_\iota)_{\iota \in I}$ — семейство топологических групп и H_ι, для каждого $\iota \in I$, — нормальный делитель группы G_ι; обозначим через φ_ι каноническое отображение G_ι на G_ι/H_ι и положим $G = \prod_{\iota \in I} G_\iota$, $H = \prod_{\iota \in I} H_\iota$. Биективное представление G/H на $\prod_{\iota \in I} (G_\iota/H_\iota)$, ассоциированное с непрерывным представлением $(x_\iota) \mapsto (\varphi_\iota(x_\iota))$, есть изоморфизм топологических групп.*

В самом деле, это представление является изоморфизмом для групповых структур.

Замечание. Если G — *коммутативная* топологическая группа в аддитивной записи, то отображение $(x, y) \mapsto x + y$ произведения $G \times G$ на G есть *строгий морфизм*; действительно, оно является *представлением* $G \times G$ на G, ибо $(x+x') + (y + y') = (x + y) + (x' + y')$; оно непрерывно, и, наконец, образ окрестности $V \times V$ начала в $G \times G$ при этом отображении есть окрестность $V + V$ начала в G.

10. *Полупрямые произведения*

Пусть L, N — подгруппы группы G такие, что $LN = NL$; из этого соотношения сразу следует, что LN есть *подгруппа* группы G, ибо $(LN)(LN)^{-1} = LNN^{-1}L^{-1} = LNL = LLN = LN$ (Алг., гл. I, § 6, n° 2, замечание 2 после предложения 1). Кроме того, для того чтобы отображение φ: $(x, y) \mapsto xy$ произведения $N \times L$ в G было *инъективно*, необходимо и достаточно, чтобы $N \cap L = \{e\}$. Действительно, необходимость условия очевидна; обратно, соотношение $x'y' = xy$ для x, x' из N и y, y' из L влечет $x^{-1}x' = yy'^{-1} \in N \cap L$, так что если $N \cap L = \{e\}$, то φ инъективно. Таким образом, для того чтобы φ было *биективно*, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия $LN = G$ и $N \cap L = \{e\}$.

Если N — *нормальный делитель* группы G (или, более общим образом, некоторой подгруппы группы G, содержащей $N \cup L$), то условие $LN = NL$ выполнено автоматически (Алг., гл. I, § 6, теорема 6). При этом отображение σ_y: $x \mapsto yxy^{-1}$ будет для каждого $y \in L$ *автоморфизмом* группы N и

$$\sigma_{uv} = \sigma_u \circ \sigma_v \tag{1}$$

для любых элементов u, v из L; кроме того,

$$(xy)(x'y') = (x\sigma_y(x'))(yy') \tag{2}$$

для любых x, x' из N и y, y' из L.

Обратно:

Предложение 27. *Пусть N, L — две группы и e', e'' — их нейтральные элементы. Предположим, что задано представление $y \mapsto \sigma_y$ группы L в группу Γ всех автоморфизмов группы N. Тогда:*

1° *На произведении $S = N \times L$ внутренний закон композиции*

$$(x, y)(x', y') = (x\sigma_y(x'), yy') \tag{3}$$

определяет структуру группы, для которой j_1: $x \mapsto (x, e'')$ есть изоморфизм группы N на нормальный делитель группы S, j_2: $y \mapsto (e', y)$ — изоморфизм группы L на некоторую подгруппу группы S и pr_2: $S \to L$ — сюръективное представление с ядром $j_1(N)$ такое, что $\mathrm{pr}_2 \circ j_2$ есть тождественный автоморфизм группы L.

2° *Пусть* $f\colon N \to G$, $g\colon L \to G$ — *два представления в группу* G, *для которых*

$$f(\sigma_y(x)) = g(y) f(x) g(y^{-1}) \tag{4}$$

при любых $x \in N$, $y \in L$. *Тогда существует, и притом единственное, представление* $h\colon S \to G$ *такое, что* $f = h \circ j_1$ *и* $g = h \circ j_2$.

Для x, x', x'' из N и y, y', y'' из L имеем

$$((x, y)(x', y'))(x'', y'') = (x\sigma_y(x'), yy')(x'', y'') = \\ = (x\sigma_y(x')\sigma_{yy'}(x''), yy'y'')$$

и

$$(x, y)((x', y')(x'', y'')) = (x, y)(x'\sigma_{y'}(x''), y'y'') = \\ = (x\sigma_y(x'\sigma_{y'}(x'')), yy'y'');$$

таким образом, ассоциативность закона (3) вытекает из того, что $y \mapsto \sigma_y$ есть представление L в Γ, а σ_y — автоморфизм группы N. Непосредственно ясно, что (e', e'') — нейтральный элемент относительно закона композиции (3); наконец,

$$(x, y)(\sigma_{y^{-1}}(x^{-1}), y^{-1}) = (\sigma_{y^{-1}}(x^{-1}), y^{-1})(x, y) = (e', e''),$$

чем доказано существование в S элемента, обратного к (x, y). Остальные утверждения пункта 1° очевидны. С другой стороны, так как $(x, y) = (x, e'')(e', y)$, то представление h, удовлетворяющее условиям пункта 2°, таково, что необходимо $h(x, y) = f(x) g(y)$, и, значит, единственно, если оно существует. Кроме того, на основании (4) ясно, что

$$f(x\sigma_y(x')) g(yy') = f(x) g(y) f(x') g(y^{-1}) g(y) g(y') = \\ = f(x) g(y) f(x') g(y'),$$

чем доказано, что $(x, y) \mapsto f(x) g(y)$ действительно есть представление S в G, удовлетворяющее условиям пункта 2°.

Следствие. *Для того чтобы представление* h, *определенное в пункте* 2° *предложения* 27, *было инъективно, необходимо и достаточно, чтобы* f *и* g *были инъективны, а* $f(N) \cap g(L) = \{e\}$; *для того чтобы* h *было сюръективно, необходимо и достаточно, чтобы* $f(N) g(L) = G$.

Поскольку $h(x, y) = f(x) g(y)$, второе утверждение очевидно; кроме того, из (4) следует, что $f(N) g(L) = g(L) f(N)$, и потому первое утверждение вытекает из сказанного в начале n°.

Группа S, определенная в предложении 27, называется *внешним полупрямым произведением* групп N и L (относительно σ); при этом N (соотв. L) обычно отождествляют с нормальным делителем $j_1(N)$ (соотв. подгруппой $j_2(L)$) группы S. В случае, когда σ_y есть нейтральный элемент группы Γ для каждого $y \in L$, получаем снова обычное понятие *произведения* двух групп.

Пусть теперь G — группа, а L и N — две ее подгруппы такие, что $LN = NL$ и N — *нормальный делитель* в NL, так что σ_y: $x \longmapsto yxy^{-1}$ для каждого $y \in L$ есть автоморфизм группы N, а $y \longmapsto \sigma_y$ — представление группы L в группу Γ автоморфизмов группы N. Тогда из предложения 27 вытекает, что h: $(x, y) \longmapsto xy$ есть *представление* в G внешнего полупрямого произведения S групп N и L (относительно σ). Для того чтобы оно было биективно, необходимо и достаточно, чтобы $N \cap L = \{e\}$ и $NL = G$ (следствие предложения 27); тогда группу G называют *полупрямым произведением* ее нормального делителя N и подгруппы L и часто отождествляют с S посредством h.

Предложение 28. *Пусть L, N — топологические группы и $y \longmapsto \sigma_y$ — представление группы L в группу Γ всех автоморфизмов структуры (не топологической) группы в N. Предположим, что отображение $(x, y) \longmapsto \sigma_y(x)$ произведения $N \times L$ в N непрерывно. Тогда*:

1° *На внешнем полупрямом произведении S групп N и L относительно σ произведение топологий групп N и L согласуется со структурой группы; канонические инъекции j_1: $N \to S$ и j_2: $L \to S$ являются изоморфизмами топологических групп N и L соответственно на подгруппы $j_1(N)$ и $j_2(L)$ топологической группы S, а pr_2 есть строгий морфизм группы S на L.*

2° *Пусть f: $N \to G$ и g: $L \to G$ — непрерывные представления в топологическую группу G, удовлетворяющие условию (4); тогда ассоциированное представление $(x, y) \longmapsto f(x)g(y)$ группы S в G непрерывно.*

Это предложение непосредственно следует из определений и свойств произведения топологий.

Так определенная топологическая группа S называется *внешним топологическим полупрямым произведением* групп N и L

(относительно σ); заметим, что из условия, наложенного на σ, вытекает, что L *действует непрерывно слева* в N по внешнему закону $(x, y) \mapsto \sigma_y(x)$ (n° 4).

Пусть теперь G — топологическая группа, а N и L — ее подгруппы такие, что G, как группа, не наделенная топологией, является *полупрямым произведением* N и L; тогда ясно, что отображение $(x, y) \mapsto \sigma_y(x)$ *непрерывно* в $N \times L$ и биективное каноническое представление $h: (x, y) \mapsto xy$ группы S в G *непрерывно*. Но это последнее представление не обязательно *взаимно непрерывно*; в случае, когда оно взаимно непрерывно, G называется *топологическим полупрямым произведением* N и L. Для того чтобы это имело место, необходимо и достаточно, чтобы одно из отображений $p: G \to N$, $q: G \to L$, относящих каждому $z \in G$ однозначно определенные $p(z) \in N$ и $q(z) \in L$, для которых $z = p(z)\, q(z)$, было *непрерывно* (в этом случае будет непрерывно и другое). Это равносильно требованию, чтобы сужение на L канонического отображения $G \to G/N$ являлось изоморфизмом топологической группы L на топологическую группу G/N.

Упражнения

1) Распространить на полутопологические группы (§ 1, упражнение 2) и паратопологические группы (§ 1, упражнение 4) предложения 3, 6, 7, 9 и следствие предложения 4.

2) а) Распространить на полутопологические группы (§ 1, упражнение 2) предложения 1, 2 и 4. [Чтобы убедиться в том, что замыкание $\overline{H}$ подгруппы H есть подгруппа, заметить сначала, что $s\overline{H} \subset \overline{H}$ для каждого $s \in H$.]

б) Пусть G есть группа $\mathbf{Z}^{(\mathbf{N})}$ и e_i $(i \in \mathbf{N})$ — ее элемент, все координаты которого равны нулю, за исключением i-й координаты, равной 1. Обозначим через V_n для каждого $n \in \mathbf{N}$ множество всех $z = (z_k) \in G$ таких, что $z_k = 0$ для $k \leqslant n$ и $z_k \geqslant 0$ для $k > n$. Множества V_n образуют фундаментальную систему окрестностей нуля для топологии, превращающей G в отделимую паратопологическую группу. Пусть H — подгруппа группы G, порожденная элементами $e_0 + e_n$ $(n \geqslant 1)$; показать, что H дискретна в G, но не замкнута, и что $\overline{H}$ не есть подгруппа группы G.

3) Дать пример неотделимой топологической группы, центр которой не замкнут и имеет своим замыканием некоммутативную подгруппу (см. § 1, упражнение 1). Дать пример полутопологической

группы с теми же свойствами, в которой всякое одноточечное множество замкнуто (см. § 1, упражнение 2б).

*4) а) В полутопологической группе G пересечение всех открыто-замкнутых окрестностей нейтрального элемента e есть замкнутая подгруппа H, инвариантная относительно всех автоморфизмов группы G. [Заметить, что G не допускает разбиения на два открыто-замкнутых множества, каждое из которых пересекается с H.]

б) Определим на множестве $\mathfrak{G}$ всех подгрупп группы G отображение φ, сопоставляющее каждой подгруппе H группы G подгруппу $\varphi(H)$ в H, являющуюся пересечением всех открыто-замкнутых окрестностей нейтрального элемента e в H. Рассмотрим в множестве $\mathfrak{G}$, упорядоченном по отношению $\supset$, *цепь* Γ группы G относительно отображения φ (Теор. мн., гл. III, § 2, упражнение 6). Показать, что наименьшая из подгрупп, образующих Γ, есть связная компонента элемента e в G. [Заметить, что эта наименьшая подгруппа необходимо связна.]

5) Полутопологическая группа G называется *квазитопологической*, если ее отображение $x \longmapsto xax^{-1}$ в себя для каждого $a \in G$ непрерывно. Всякая полутопологическая коммутативная группа является квазитопологической.

а) Показать, что в квазитопологической группе нормализатор замкнутой подгруппы замкнут.

б) Пусть G — квазитопологическая группа, порождаемая каждой окрестностью нейтрального элемента e (соотв. связная). Показать, что всякий дискретный (соотв. вполне несвязный) нормальный делитель D группы G содержится в ее центре. [Показать, что если $a \in D$, то существует такая окрестность V элемента e, что $xax^{-1} = a$ для всех $x \in V$.]

°в) Пусть G—группа матриц $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ y & x \end{pmatrix}$, где $x > 0$ и y — вещественные числа. Если отождествить G с множеством из $\mathbf{R}^2$ посредством отображения $(x, y) \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ y & x \end{pmatrix}$, то топология $\mathcal{T}_0$, индуцируемая в G из $\mathbf{R}^2$, согласуется со структурой группы. Пусть H — нормальный делитель группы G, состоящий из матриц $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ y & 1 \end{pmatrix}$, и H^* — дополнение нейтрального элемента в H. Введем топологию $\mathcal{T}$, мажорирующую $\mathcal{T}_0$, приняв за фундаментальную систему окрестностей e в G пересечения окрестностей e в топологии $\mathcal{T}_0$ с дополнением к H^* в G. Показать, что в этой топологии G есть связная полутопологическая, но не квазитопологическая, группа, а H — дискретная подгруппа, не содержащаяся в центре.$_\circ$

°6) Пусть G — ортогональная группа $\mathbf{O}_2(\mathbf{Q})$, отождествленная с подпространством пространства $\mathbf{Q}^4$ всех матриц второго порядка над $\mathbf{Q}$; топология, индуцируемая в G из $\mathbf{Q}^4$, согласуется со структурой группы. Показать, что коммутант группы G не замкнут и имеет своим замыканием группу $\mathbf{SO}_2(\mathbf{Q})$. [См. Алг., гл. IX, § 10, упражнение 3.]$_\circ$

7) а) Показать, что коммутант связной квазитопологической (упражнение 5) группы G связен. [Пусть P_k — множество всевозможных произведений k коммутаторов $x^{-1}y^{-1}xy$; показать, что P_k есть объединение связных множеств, каждое из которых пересекается с P_{k-1}.]

б) Пусть G — бесконечная группа с конечным коммутантом (например, произведение некоммутативной конечной группы на бесконечную коммутативную). Наделенная топологией, определенной в упражнении 2б § 1, G есть связная полутопологическая группа, коммутант которой несвязен.

*8) Пусть G — квазитопологическая группа (упражнение 5).

а) Распространить на G предложение 8. [Показать сначала, что $x\overline{K}x^{-1} \subset \overline{K}$ для всех $x \in H$.] Дать пример полутопологической, но не квазитопологической группы, для которой предложение 8 неверно (см. § 1, упражнение 2б).

б) Пусть H, K — подгруппы группы G такие, что $H \supset K$ и K содержит коммутант группы H. Показать, что $\overline{K}$ содержит коммутант группы $\overline{H}$. [Аналогичный метод.]

в) Вывести из б), что если в G всякое одноточечное множество замкнуто, то замыкание в G всякой разрешимой (Алг., гл. I, § 6, упражнение 14) (соотв. коммутативной) подгруппы разрешимо (соотв. коммутативно). [Рассмотреть длину последовательности производных групп рассматриваемой подгруппы.]

9) Пусть G — квазитопологическая группа, H — ее замкнутый нормальный делитель, содержащий коммутант группы G. Показать, что если связная компонента K нейтрального элемента e в H разрешима, то и его связная компонента L в G разрешима. [Используя упражнение 7а, показать, что K содержит коммутант группы L.]

10) Пусть G — квазитопологическая группа, в которой всякое одноточечное множество замкнуто, а нейтральная компонента C такова, что G/C конечно. Показать, что если G/C состоит из k элементов, то множество элементов xax^{-1}, сопряженных к элементу $a \in G$, бесконечно или содержит самое большее k элементов. [Рассмотреть отображение $x \mapsto xax^{-1}$ группы G на это множество.] В частности, если G связна, то множество сопряженных элементов для каждого a, не принадлежащего ее центру, бесконечно.

11) Пусть G — группа (наделенная топологией или нет), действующая в топологическом пространстве E так, что каждое отображение $x \mapsto sx$ ($s \in G$) пространства E в себя непрерывно. Распространить на эту ситуацию результаты n° 4.

12) Пусть G — полутопологическая (соотв. паратопологическая, квазитопологическая) группа и H — ее нормальный делитель.

а) Показать, что факторгруппа G/H, наделенная фактортопологией топологии группы G по H, есть полутопологическая (соотв. паратопологическая, квазитопологическая) группа.

б) Распространить на полутопологические (соотв. паратопологические, квазитопологические) группы результаты n° 7.

13) Пусть G — полутопологическая (соотв. паратопологическая) группа и H — ее всюду плотная подгруппа. Какова топология однородного пространства G/H?

14) Пусть G — полутопологическая группа и H — ее нормальный делитель. Показать, что полутопологическая группа $G/\overline{H}$ изоморфна отделимой группе, ассоциированной с G/H.

*15) Пусть G — квазитопологическая группа, в которой всякое одноточечное множество замкнуто. Показать, что если G разрешима, то она обладает композиционным рядом, состоящим из *замкнутых* подгрупп, факторы которого коммутативны. [Вести индукцию по длине последовательности производных групп для G, используя упражнение 8в.]

*16) Пусть H — подгруппа полутопологической группы G, содержащаяся в связной компоненте K нейтрального элемента e. Показать, что связными компонентами пространства G/H служат образы связных компонент пространства G относительно канонического отображения f группы G на G/H. [Рассуждая от противного, показать, что если L — связная компонента пространства G/H, то $\overset{-1}{f}(L)$ связно.] Показать, что K — наименьшая из замкнутых подгрупп H группы G, для которых G/H вполне несвязно.

°17) Пусть G — аддитивная группа отображений $n \longmapsto f(n)$ множества $\mathbf{N}$ в $\mathbf{Q}$ таких, что в $\mathbf{R}$ существует $\lim\limits_{n\to\infty} f(n)$. Обозначим через V_α для каждого $\alpha > 0$ множество тех $f \in G$, для которых $|f(n)| < \alpha$ при любом $n \in \mathbf{N}$. Показать, что множества V_α удовлетворяют аксиомам (GV_I) и (GV_{II}) и что в определяемой ими топологии группа G отделима и вполне несвязна. Пусть H — подгруппа группы G, состоящая из тех $f \in G$, для которых $\lim\limits_{n\to\infty} f(n) = 0$. Показать, что H замкнута, а G/H изоморфно $\mathbf{R}$ и, значит, связно.$_\circ$

18) Для того чтобы непрерывное представление f топологической группы G в топологическую группу G' было строгим морфизмом, необходимо и достаточно, чтобы образ при f всякого открытого множества из G содержал по крайней мере одну точку, внутреннюю относительно $f(G)$.

19) Пусть G, G', G'' — топологические группы, f — строгий морфизм G в G' и g — строгий морфизм G' в G''. Показать, что если $f(G)$ содержит ядро $\overset{-1}{g}(e'')$ отображения g (e'' — нейтральный элемент из G''), то $g \circ f$ есть строгий морфизм G в G'' (см. следствие предложения 22). Дать пример, где f инъективно, указанное условие не выполнено и $g \circ f$ не есть строгий морфизм G в G'' (см. n° 7, замечание после предложения 20).

20) Пусть H и H' — подгруппы полутопологической группы G, причем $H' \subset H$. Показать, что если f и f' — канонические отобра-

жения группы G соответственно на G/H и G/H', то существует, и притом единственное, отображение φ факторгруппы G/H' на G/H такое, что $f = \varphi \circ f'$; при этом φ непрерывно и открыто. Если, кроме того, H' открыта относительно H, то всякая точка x из G/H' имеет окрестность V, сужение φ на которую является ее гомеоморфизмом на окрестность точки $\varphi(x)$ в G/H.

21) Пусть G — топологическая группа, а H и K — такие две ее подгруппы, что $G = HK$ и $H \cap K = \{e\}$. Каждое $x \in G$ обладает однозначным разложением $x = f(x) g(x)$, где $f(x) \in H$ и $g(x) \in K$; для того чтобы отображение $(y, z) \longmapsto yz$ произведения HK на G было гомеоморфизмом, необходимо и достаточно, чтобы одно из отображений f, g было непрерывно. Показать, что это условие всегда выполнено, если одна из групп H, K компактна и замкнута, а другая замкнута. [Заметить, что если H и K замкнуты, то f и g не могут иметь предельной точки, отличной от e, когда x стремится к e в G.] (см. Топ. вект. простр., гл. IV, § 2, упражнение 19).

22) Пусть G — произведение семейства $(G_\iota)_{\iota \in I}$ топологических групп и G' — топологическая группа, обладающая окрестностью V' нейтрального элемента e', не содержащей никакого отличного от $\{e'\}$ нормального делителя. Показать, что если f — непрерывное представление G в G', то существует такое множество $J \subset I$ с конечным дополнением J', что f равно e' на подгруппе $\prod\limits_{\iota \in J} G_\iota \times \prod\limits_{\iota \in J'} \{e_\iota\}$ группы G.

23) Рассмотрим в произведении G семейства $(G_\iota)_{\iota \in I}$ топологических групп структуру группы, являющуюся произведением структур групп G_ι, и топологию, порождаемую всевозможными произведениями $\prod\limits_{\iota \in I} A_\iota$, где A_ι открыто в G_ι для каждого $\iota \in I$ и множество тех $\iota \in I$, для которых $A_\iota \neq G_\iota$, имеет мощность $< \mathfrak{c}$, где $\mathfrak{c}$ — заданное бесконечное кардинальное число (гл. I, § 4, упражнение 9). Показать, что эта топология согласуется со структурой группы в G. Получить отсюда пример недискретной отделимой топологической группы, в которой всякое компактное множество конечно (см. гл. I, § 9, упражнение 4).

*24) Пусть G и G' — локально изоморфные связные группы.

а) Пусть f — локальный изоморфизм G в G', определенный в окрестности V нейтрального элемента e группы G, и H — подгруппа произведения $G \times G'$, порожденная множеством точек $(x, f(x))$, где x пробегает V. Рассмотрим в H базис фильтра, состоящий из образов окрестностей e, содержащихся в V, при отображении $x \longmapsto (x, f(x))$. Показать, что этот базис фильтра есть фундаментальная система окрестностей нейтрального элемента из H в топологии $\mathscr{T}$, согласующейся со структурой группы в H.

б) Показать, что существуют дискретные нормальные делители K и K', содержащиеся в центре группы H, такие, что G и G' изоморфны соответственно H/K и H/K'. [Использовать упражнение 5б.]

°в) Возьмем в качестве G и G' группу $\mathbf{T}$, а в качестве f локальный изоморфизм, сопоставляющий каждой точке $\varphi(x)$, где $-\frac{1}{4} \leqslant x \leqslant \frac{1}{4}$ и φ — канонический гомоморфизм группы $\mathbf{R}$ на $\mathbf{T} = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$, точку $\varphi(\theta x)$, где θ — иррациональное число такое, что $0 < \theta < 1$. Показать, что для этого локального изоморфизма топология $\mathscr{T}$, определенная выше в H, отлична от топологии, индуцируемой в H из топологического произведения $G \times G'$.$_\circ$

*25) Пусть G — топологическая группа, K — ее нормальный делитель, φ — каноническое отображение $G \to G/K$ и f — непрерывное представление некоторой топологической группы H в G такое, что каждый элемент из $f(H)$ перестановочен с каждым элементом из K; тогда $(y, z) \longmapsto f(y) z$ есть непрерывное представление произведения $H \times K$ в G. Для того чтобы это представление g было строгим морфизмом $H \times K$ в G, необходимо и достаточно, чтобы $\varphi \circ f$ было строгим морфизмом H в G/K.

26) Пусть $(G_\iota)_{\iota \in I}$ — семейство топологических групп и K_ι, для каждого $\iota \in I$,— *открытый* нормальный делитель группы G_ι. Показать, что фильтр $\mathfrak{B}$ окрестностей нейтрального элемента e в группе $K = \prod_{\iota \in I} K_\iota$, наделенной топологией произведения, является в группе $G = \prod_{\iota \in I} G_\iota$ базисом фильтра окрестностей элемента e для топологии, согласующейся со структурой группы в G. Группа G, наделенная этой топологией, называется *локальным произведением* групп G_ι (относительно K_ι); K является тогда открытым нормальным делителем группы G и G/K изоморфно (дискретному) произведению групп G_ι/K_ι. Пусть K'_ι для каждого $\iota \in I$ — второй открытый нормальный делитель группы G_ι; для того чтобы топологии локальных произведений в G относительно семейств (K_ι) и (K'_ι) совпадали, необходимо и достаточно, чтобы $K'_\iota = K_\iota$ для всех, кроме конечного числа, индексов.

Пусть $G'_\varkappa$ для каждого $\varkappa \in I$ — нормальный делитель группы G, состоящий из тех $x = (x_\iota)$, у которых $x_\iota = e_\iota$ для всех $\iota \neq \varkappa$; в топологии, индуцируемой топологией локального произведения в G, $G'_\varkappa$ канонически изоморфно $G_\varkappa$. Замыкание в G подгруппы, порождаемой всеми G'_ι, есть нормальный делитель G_0 группы G, состоящий из тех $x = (x_\iota)$, у которых $x_\iota \in K_\iota$ для всех, кроме конечного числа, индексов. G_0 называется *локальным прямым произведением* групп G_ι (относительно K_ι); G_0/K является тогда дискретной группой, изоморфной прямому произведению (Алг., гл. I, § 6, упражнение 18) групп G_ι/K_ι.

*27) Будем говорить, что группа G обладает свойством $P(n)$ (n — целое >0), если для любой системы $(s_1, \ldots, s_n)$ n элементов из G существует отличная от тождественной (но зависящая от $s_1, \ldots$

$\ldots, s_n)$ подстановка $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, для которой $s_{\sigma(1)} \ldots s_{\sigma(n)} = s_1 \ldots s_n$.

а) Показать, что некоммутативная группа $\mathfrak{S}_3$ обладает свойством $P(4)$.

б) Пусть G — связная отделимая топологическая группа. Показать, что если G обладает свойством $P(n)$ для некоторого $n > 1$, то G коммутативна. [Доказать, что G обладает свойством $P(n-1)$. Для этого, считая заданными $n-1$ элементов $s_1, \ldots, s_{n-1}$ из G, свести все к случаю, когда существует окрестность U нейтрального элемента e такая, что для каждого $x \in U$ имеется индекс $i = i(x)$, при котором $s_1 \ldots s_{n-1} x = s_1 \ldots s_i x s_{i+1} \ldots s_{n-1}$; вывести отсюда, что централизатор в G одного из элементов $s_{j+1} \ldots s_{n-1}$ $(0 \leqslant j \leqslant n-2)$ открыто-замкнут и, значит, совпадает с G. Получить отсюда требуемый результат для $j \geqslant 1$; в случае, когда $j = 0$, показать, что $s_1 s_2 \ldots s_{n-1} = s_2 \ldots s_{n-1} s_1$.]

* 28) а) Пусть S — устойчивое подмножество топологической группы G; показать, что $\mathring{S}$ и $\overline{S}$ устойчивы и $S\mathring{S} \subset \mathring{S}$, $\mathring{S}S \subset \mathring{S}$. Кроме того, если S открыто и $e \in \overline{S}$, то $S = \mathring{\overline{S}}$. [Показать, что если $x \in \overline{S} - S$, то x — граничная точка для $\overline{S}$.]

б) Будем, начиная отсюда, предполагать, что G — коммутативная топологическая группа, записываемая аддитивно. Для каждого непустого $A \subset G$ обозначим через $s(A)$ множество тех $x \in G$, для которых $x + A \subset A$, т. е. пересечение всех $A - y$, где y пробегает A; положим $b(A) = s(A) \cap s(-A)$. $s(A)$ есть устойчивое подмножество группы G, а $b(A)$ — ее подгруппа, состоящая из тех $x \in G$, для которых $x + A = A$. Показать, что $s(F)$ замкнуто для любого непустого замкнутого множества F из G. Для каждого непустого множества $A \subset G$ имеем $s(A) \subset s(\overline{A})$ и $s(A) \subset s(\mathring{A})$; если $A = \mathring{\overline{A}}$, то $s(A) = s(\overline{A})$.

в) Пусть $\mathfrak{S}$ — множество всех открытых устойчивых подмножеств S группы G таких, что $0 \notin S$; предположим, что $\mathfrak{S} \neq \varnothing$. Множество $\mathfrak{S}$, упорядоченное по включению, будет тогда индуктивно; пусть $\mathfrak{M} \neq \varnothing$ — множество его максимальных элементов. Показать, что если $M \in \mathfrak{M}$, то $M = \mathring{\overline{M}}$ [использовать а)] и M для любого целого $n > 0$ совпадает с множеством тех $x \in G$, для которых $nx \in M$. Кроме того, подгруппа $b(M)$ совпадает с дополнением в G к множеству $M \cup (-M)$ [предполагая $x \notin M$ и $-x \notin M$, рассмотреть объединение множеств $kx + M$ для всех целых $k \geqslant 0$]; вывести отсюда, что $G = M - M$.

Замкнутая подгруппа B группы G называется *остаточной*, если $B = b(M)$ для некоторого $M \in \mathfrak{M}$.

г) *Радикалом* T_G группы G называют пересечение всех остаточных подгрупп; если $T_G = G$ (соотв. $T_G = \{0\}$), то говорят, что

G — *радикальная группа* (соотв. *не имеет радикала*). Для того чтобы $x \in T_G$, необходимо и достаточно, чтобы всякое устойчивое открытое множество в G, содержащее x, содержало 0. Вывести отсюда, что если G дискретна, то T_G является ее подгруппой кручения. Для каждого непрерывного представления f группы G в коммутативную топологическую группу G' имеем $f(T_G) \subset T_{G'}$; если H — подгруппа группы G, содержащаяся в T_G, то $T_{G/H} = T_G/H$. Подгруппа T_G является наименьшей из подгрупп H группы G, для которых G/H не имеет радикала.

д) Показать, что среди подгрупп H группы G таких, что $T_H = H$, существует наибольшая $H_0 \subset T_G$ и она замкнута.

е) Пусть $T_G \neq G$. Для того чтобы T_G была открытой, необходимо и достаточно, чтобы в G существовала открытая остаточная подгруппа. [Используя д), показать, что если $b(M)$ открыто для некоторого $M \in \mathfrak{M}$, то необходимо $T_G \supset b(M)$.]

°29) Пусть G — топологическая группа $\mathbf{R}$, φ — ее каноническое отображение на фактогруппу $\mathbf{T} = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ и θ — иррациональное число. Группа G действует непрерывно в $E = \mathbf{T}^2$ по закону $(s, (x, y)) \longmapsto (x + \varphi(s),\ y + \varphi(\theta s))$. Показать, что стабилизатор любой точки $z \in E$ сводится к 0, а ее орбита всюду плотна в E и не является топологическим однородным пространством относительно G.$_\circ$

30) Говорят, что топологическая группа G *не имеет сколь угодно малых подгрупп*, если существует окрестность V нейтрального элемента e, не содержащая никаких подгрупп группы G, кроме $\{e\}$.

а) Пусть G — топологическая группа и H — ее нормальный делитель. Показать, что если H и G/H не имеют сколь угодно малых подгрупп, то то же верно и для G.

б) Вывести из а), что если H_1 и H_2 — нормальные делители топологической группы G такие, что G/H_1 и G/H_2 не имеют сколь угодно малых подгрупп, то то же верно и для $G/(H_1 \cap H_2)$.

*31) Пусть G — связная топологическая группа, H — ее подгруппа, U — такое открытое множество в G, что $G = UH$, и $V = H \cap (U^{-1}U)$. Показать, что $H = V^\infty$. [Показать, что множества UV^∞ и UA, где $A = H \cap \complement(V^\infty)$, имеют пустое пересечение.]

§ 3. Равномерные структуры групп

1. *Левая и правая равномерные структуры топологической группы*

Для топологической группы представляется возможность ввести понятие «достаточно близких точек» и определить тем самым равномерную структуру, поступая следующим образом: пусть x и y — две произвольные точки из G; подвергнем эти точки *одному и тому же переносу*, переводящему одну из них, например

x в нейтральный элемент e; «близость» x и y может быть тогда оценена в некоторой степени окрестностью V элемента e, в которой окажется y. Этот перенос, сводящийся к композиции x^{-1} соответственно с x и y, может быть при этом *правым* или *левым*; как мы увидим, в каждом из этих случаев действительно получается равномерная структура, *согласующаяся* с топологией в G. Рассмотрим случай *правого* переноса; сопоставим каждой окрестности V элемента e множество V_d всех пар $(x, y) \in G \times G$, для которых $yx^{-1} \in V$. Пусть $\mathfrak{S}_d$ — семейство множеств V_d, где V пробегает фильтр $\mathfrak{B}$ окрестностей e; $\mathfrak{S}_d$ есть *фундаментальная система окружений* (гл. II, § 1, n° 1). В самом деле, так как $e \in V$, то диагональ Δ произведения $G \times G$ содержится в V_d, каково бы ни было $V \in \mathfrak{B}$, так что $\mathfrak{S}_d$ есть базис фильтра и удовлетворяет аксиоме $(\mathrm{U}'_{\mathrm{I}})$; поскольку отношения $yx^{-1} \in V$ и $xy^{-1} \in V^{-1}$ равносильны, имеем $\overset{-1}{V_d} = (V^{-1})_d$, и, значит, в силу $(\mathrm{GV}_{\mathrm{II}})$, $\overset{-1}{V_d} \in \mathfrak{S}_d$, так что $\mathfrak{S}_d$ удовлетворяет аксиоме $(\mathrm{U}'_{\mathrm{II}})$; наконец, из $zx^{-1} \in V$ и $yz^{-1} \in V$ следует $yx^{-1} \in VV$, так что $V_d \circ V_d \subset (VV)_d$, и $(\mathrm{GV}_{\mathrm{I}})$ показывает, что $\mathfrak{S}_d$ удовлетворяет аксиоме $(\mathrm{U}'_{\mathrm{III}})$.

Равномерная структура, определяемая семейством $\mathfrak{S}_d$, согласуется с топологией группы G, ибо отношения $y \in V_d(x)$ и $y \in Vx$ равносильны по определению; другими словами, $V_d(x) = Vx$.

Аналогично рассуждаем в случае *левого* переноса, и мы можем теперь сформулировать следующее определение:

Определение 1. *Правой* (соотв. *левой*) *равномерной структурой топологической группы G называется равномерная структура, для которой фундаментальную систему окружений образуют множества V_d* (соотв. V_s) *всех пар (x, y) таких, что $yx^{-1} \in V$* (соотв. $x^{-1}y \in V$), *где V — любая окрестность нейтрального элемента e.*

Когда V пробегает фундаментальную систему окрестностей e, множества V_d (соотв. V_s) образуют фундаментальную систему окружений правой (соотв. левой) равномерной структуры группы G.

Каждому предложению о топологии равномерного пространства соответствует предложение о топологии группы, причем переход от одного к другому осуществляется с помощью определения 1 и непосредственно вытекающих из него формул $V_d(x) = Vx$, $V_d(A) = VA$, $V_s(x) = xV$, $V_s(A) = AV$. Например, для

каждого непустого множества $A \subset G$ имеем (гл. II, § 1, следствие 1 предложения 2)

$$\bar{A} = \bigcap_{V \in \mathfrak{B}} VA = \bigcap_{V \in \mathfrak{B}} AV. \tag{1}$$

Точно так же (гл. II, § 1, следствие 3 предложения 2) *всякая отделимая группа регулярна*.

Правая и левая равномерные структуры в топологической группе, вообще говоря, *различны* (см. упражнение 4). Они, очевидно, совпадают для *коммутативной* группы, ибо тогда $V_d = V_s$; они также совпадают, когда группа *компактна* (гл. II, § 4, теорема 1).

Обычно *равномерное пространство*, полученное путем наделения множества G левой (соотв. правой) равномерной структурой, будет обозначаться G_s (соотв. G_d).

Предложение 1. *Правые и левые переносы являются изоморфизмами правой равномерной структуры на себя.*

Для правых переносов это очевидно, ибо отношение $yx^{-1} \in V$ равносильно отношению $(ya)(xa)^{-1} \in V$ (иначе говоря, отображение $(x, y) \mapsto (xa, ya)$ оставляет V_d инвариантным). Для левых переносов это получается из $(\mathrm{GV_{III}})$; действительно, отношение $yx^{-1} \in V$ равносильно отношению $(ay)(ax)^{-1} \in aVa^{-1}$, и, значит, отображение $x \mapsto ax$ равномерно непрерывно на G_d.

Таким же путем убеждаемся в том, что правые и левые переносы являются изоморфизмами левой равномерной структуры на себя.

Всякий *внутренний автоморфизм* $x \mapsto axa^{-1}$ группы G является, таким образом, одновременно автоморфизмом структуры группы, топологии и обеих равномерных структур в G.

Предложение 2. *Симметрия $x \mapsto x^{-1}$ есть изоморфизм правой равномерной структуры на левую равномерную структуру.*

Это непосредственное следствие определения 1.

Не следует думать, что отображение $(x, y) \mapsto xy$ равномерного пространства $G_d \times G_d$ в равномерное пространство G_d всегда равномерно непрерывно. Также и симметрия $x \mapsto x^{-1}$, рассматриваемая как отображение G_d на G_d, вообще говоря, не является равномерно непрерывной (см. упражнения 3 и 4).

Предложение 3. *Всякое непрерывное представление f топологической группы G в топологическую группу G', рассматриваемое как отображение G_d в G'_d* (или G_s в G'_s), *равномерно непрерывно.*

В самом деле, если V' — окрестность нейтрального элемента группы G' и $V = \overset{-1}{f}(V')$, то $yx^{-1} \in V$ влечет $f(y)(f(x))^{-1} = f(yx^{-1}) \in V'$.

2. *Равномерные структуры подгрупп, факторгрупп и произведений групп*

Пусть H — подгруппа топологической группы G; равномерная структура, индуцированная в H правой равномерной структурой группы G, есть не что иное, как правая равномерная структура топологической группы H.

Если H — нормальный делитель группы G, а φ — каноническое отображение G на G/H, то фундаментальную систему окружений правой равномерной структуры факторгруппы G/H можно получить, относя каждой окрестности V нейтрального элемента группы G множество всех пар $(\dot{x}, \dot{y})$ точек из G/H таких, что $\dot{y}\dot{x}^{-1} \in \varphi(V)$ (§ 2, предложение 17); это условие означает, что существуют по крайней мере одна точка $x \in \dot{x}$ и по крайней мере одна точка $y \in \dot{y}$, для которых $yx^{-1} \in V$ (или, что то же, $(x, y) \in V_d$). В частности, если N — замыкание нейтрального элемента в G, то правая равномерная структура в G/N изоморфна отделимой равномерной структуре, *ассоциированной* с правой равномерной структурой в G (см. гл. II, § 3, n° 8).

Наконец, в произведении семейства (G_ι) топологических групп правая равномерная структура есть *произведение* правых равномерных структур групп G_ι (см. гл. II, § 2, n° 6).

Аналогичные результаты имеют место для левой равномерной структуры.

Для того чтобы в произведении групп $\prod_\iota G_\iota$ правая и левая равномерные структуры совпадали, необходимо и достаточно, чтобы правая и левая равномерные структуры совпадали в каждой группе G_ι. Это всегда имеет место, когда некоторые из групп G_ι коммутативны, а остальные компактны.

3. Полные группы

Определение 2. *Топологическая группа называется полной, если ее правая и левая равномерные структуры являются структурами полного пространства.*

В силу предложения 2, для того чтобы группа была полна, достаточно, чтобы *одна* из ее равномерных структур была структурой полного пространства.

Всякая *замкнутая* подгруппа полной группы полна (гл. II, § 3, предложение 8). Всякое произведение полных групп полно (гл. II, § 3, предложение 10).

Напротив, факторгруппа G/H полной группы G по ее замкнутому нормальному делителю H не обязательно полна (см., однако, гл. IX, 2-е изд., § 3, предложение 4).

Предложение 4. *Если в топологической группе G существует окрестность V нейтрального элемента e, полная в правой или левой равномерной структуре, то G полна.*

Предположим, например, что V полна в правой равномерной структуре, и пусть $\mathfrak{F}$ — фильтр Коши в G_d; он содержит множество M, малое порядка V_d, так что $M \subset Vx_1$ для всякого $x_1 \in M$; след фильтра $\mathfrak{F}$ на полном подпространстве Vx_1 пространства G_d является, таким образом, фильтром Коши и, значит, сходится к некоторой точке x_0; поскольку x_0 есть точка прикосновения фильтра $\mathfrak{F}$, она является его пределом (гл. II, § 3, следствие 2 предложения 5).

Следствие 1. *Локально компактная группа полна.*

В самом деле, всякое компактное пространство полно в своей единственной равномерной структуре (гл. II, § 4, теорема 1).

Следствие 2. *Всякая локально компактная подгруппа отделимой топологической группы G замкнута в G.*

В самом деле, всякое полное подпространство отделимого равномерного пространства замкнуто (гл. II, § 3, предложение 8).

Предложение 5. *Пусть G_1 — топологическая группа, G_2 — полная отделимая топологическая группа и H_1* (соотв. H_2) —

всюду плотная подгруппа группы G_1 (соотв. G_2). *Всякое непрерывное представление* u *группы* H_1 *в* H_2 *продолжается, и притом единственным образом, до непрерывного представления* $\bar{u}$ *группы* G_1 *в* G_2. *При этом, если* G_1 *отделима и полна, а* u *есть изоморфизм* H_1 *на* H_2, *то* $\bar{u}$ *есть изоморфизм* G_1 *на* G_2.

В самом деле, u равномерно непрерывно при наделении H_1 и H_2 правыми равномерными структурами (предложение 3) и, следовательно, продолжается единственным образом до отображения $\bar{u}$ группы G_1 в G_2, равномерно непрерывного относительно правых равномерных структур этих групп (гл. II, § 3, теорема 2). При этом, в силу принципа продолжения тождеств (гл. I, § 8, следствие 1 предложения 2), $\bar{u}$ есть представление G_1 в G_2. Тем самым первое утверждение доказано. Для доказательства второго достаточно рассмотреть изоморфизм v группы H_2 на H_1, обратный к u, и его продолжение $\bar{v}$ до непрерывного представления G_2 в G_1; в силу единственности продолжения $\bar{v} \circ \bar{u}$ и $\bar{u} \circ \bar{v}$ являются тождественными отображениями соответственно в G_1 и G_2 (Теор. мн., Сводка результ., § 2, n° 12), и, значит, $\bar{u}$ биективно.

Замечание. Из биективности непрерывного представления u, вообще говоря, не вытекает ни инъективность $\bar{u}$, ни сюръективность.

4. Пополнение топологической группы

Пусть G — отделимая топологическая группа. *Равномерное пространство* G_d можно рассматривать как всюду плотное *подпространство* в его *пополнении* $\hat{G}_d$. Выясним, можно ли рассматривать G как всюду плотную *подгруппу* некоторой *полной отделимой группы* G'. Если это так, то *равномерное пространство* G'_d необходимо изоморфно $\hat{G}_d$ (гл. II, § 3, следствие теоремы 2), так что в $\hat{G}_d$ должно быть возможно определить *структуру топологической группы, индуцирующую* в G заданную структуру топологической группы. Итак, требуется исследовать: 1° возможно ли *продолжить по непрерывности* функции xy и x^{-1} соответственно на $\hat{G}_d \times \hat{G}_d$ и $\hat{G}_d$; 2° будут ли так продолженные функции определять в $\hat{G}_d$ структуру *группы* (которая будет тогда необходимо структурой *топологической группы*, индуцирующей в G заданную

структуру). Затем нужно будет установить, что: 3° при положительном ответе на предыдущие вопросы полученная группа $\hat{G}_d$ *полна*. Наконец, мы увидим, что: 4° если требуемая группа существует, то она *единственна* с точностью до изоморфизма.

1) *Продолжение xy и x^{-1} по непрерывности.* Функции xy и x^{-1} не являются, вообще говоря, равномерно непрерывными, и потому теорема о продолжении равномерно непрерывных функций (гл. II, § 3, теорема 2) неприменима. Тем не менее продолжение xy возможно в силу предложения 11 § 3 главы II и следующего предложения:

Предложение 6. *Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{G}$ — фильтры Коши в G_d; образ фильтра $\mathfrak{F} \times \mathfrak{G}$ при отображении $(x, y) \longmapsto xy$ есть базис фильтра Коши в G_d.*

Оценим «близость» xy и $x'y'$ в G_d, иными словами, образуем произведение $(x'y')(xy)^{-1} = x'y'y^{-1}x^{-1}$; для этого заметим, что, каково бы ни было $a \in G$, можно написать также $(x'y')(xy)^{-1} = (x'a^{-1})(ay'y^{-1}a^{-1})(ax^{-1})$, и покажем, что при надлежащем выборе a каждый из трех сомножителей этого произведения весьма мал, как только обе пары (x, y) и (x', y') принадлежат одному и тому же достаточно малому множеству из $\mathfrak{F} \times \mathfrak{G}$. Действительно, пусть V — произвольная окрестность e в G; существует множество $A \in \mathfrak{F}$, малое порядка V_d; возьмем за a какую-либо точку из A; для произвольных точек x и x' из A будем иметь $x'a^{-1} \in V$ и $ax^{-1} \in V$. С другой стороны, отношение $ay'y^{-1}a^{-1} \in V$ равносильно отношению $y'y^{-1} \in a^{-1}Va = W$, а так как W есть окрестность e, то существует множество $B \in \mathfrak{G}$, малое порядка W_d; таким образом, каковы бы ни были (x, y) и (x', y') в $A \times B$, будем иметь $(x'y')(xy)^{-1} \in V^3$, и предложение доказано.

Для того чтобы x^{-1} можно было продолжить по непрерывности на $\hat{G}_d$, необходимо и достаточно, чтобы *образ фильтра Коши из G_d при симметрии $x \longmapsto x^{-1}$ был фильтром Коши в G_d* (гл. II, § 3, предложение 11). Можно привести примеры топологических групп G, для которых это условие не выполнено (см. гл. X, 2-е изд., § 3, упражнение 16); в остающейся части рассуждения мы будем предполагать его выполненным.

2) *Продолженные функции xy и x^{-1} определяют в $\hat{G}_d$ структуру группы.* В самом деле, применение принципа продолжения тождеств (гл. I, § 8, следствие 1 предложения 2) к функциям $x(yz)$ и $(xy)z$, определенным на $\hat{G}_d \times \hat{G}_d \times \hat{G}_d$ и совпадающим на его всюду плотном подпространстве $G_d \times G_d \times G_d$, показывает, что закон композиции $(x, y) \mapsto xy$ в G_d *ассоциативен.* На том же основании функции x, ex, xe, как и функции e, xx^{-1}, $x^{-1}x$, совпадают на $\hat{G}_d$.

3) *Топологическая группа $\hat{G}_d$ полна.* В самом деле, пусть $\mathcal{U}_d$ — ее *правая равномерная структура*, а $\mathcal{U}$ — равномерная структура, полученная в $\hat{G}_d$ путем *пополнения* правой равномерной структуры группы G. Структуры $\mathcal{U}$ и $\mathcal{U}_d$ индуцируют *одну и ту же* равномерную структуру в G; всякий базис фильтра Коши $\mathfrak{B}$ *в* G для структуры $\mathcal{U}_d$ является, следовательно, базисом фильтра Коши для структуры $\mathcal{U}$. Но $\mathfrak{B}$ сходится в $\hat{G}_d$, ибо $\mathcal{U}$ — структура полного пространства; так как топологии в $\hat{G}_d$, порожденные равномерными структурами $\mathcal{U}$ и $\mathcal{U}_d$, совпадают (поскольку топология, которую индуцирует $\mathcal{U}$, согласуется со структурой группы в $\hat{G}_d$), то заключаем (гл. II, § 3, предложение 9), что $\mathcal{U}_d$ — структура полного пространства. Это заключение показывает вместе с тем, что $\mathcal{U}$ и $\mathcal{U}_d$ *совпадают* (гл. II, § 3, следствие теоремы 2).

4) *Единственность.* Она вытекает из предложения 5.

В итоге мы доказали следующую теорему:

Теорема 1. *Для того чтобы отделимая топологическая группа G была изоморфна всюду плотной подгруппе полной группы $\hat{G}$, необходимо и достаточно, чтобы при симметрии $x \mapsto x^{-1}$ образ фильтра Коши для правой равномерной структуры в G оставался фильтром Коши для этой структуры. Полная группа $\hat{G}$* (называемая *пополнением группы G*) *тогда единственна* (с точностью до изоморфизма).

Предложение 7. *Пусть G — отделимая топологическая группа, допускающая пополнение до группы $\hat{G}$. Замыкания в $\hat{G}$ окрестностей нейтрального элемента из G образуют фундаментальную систему окрестностей нейтрального элемента в $\hat{G}$.*

В самом деле, поскольку $\hat{G}$ регулярна, всякая окрестность ее нейтрального элемента e содержит замыкание V некоторой его открытой окрестности U, а V является также замыканием следа U на G.

Пусть G — топологическая группа, не обязательно отделимая. $N = \overline{\{e\}}$ и $G' = G/N$ — отделимая группа, ассоциированная с G (§ 2, n° 6). Если группа G' допускает пополнение $\hat{G}'$, то последнее называется *отделимым пополнением группы* G и обозначается $\hat{G}$; $\hat{G}'_d$ (соотв. $\hat{G}'_s$) является тогда *отделимым пополнением* (гл. II, § 3, n° 7) пространства G_d (соотв. G_s).

Предложение 8. *Пусть G — группа, допускающая отделимое пополнение $\hat{G}'$. Всякое непрерывное представление u группы G в полную отделимую группу H допускает однозначное разложение $u = v \circ \varphi$, где v — непрерывное представление $\hat{G}'$ в H, а φ — каноническое отображение G в $\hat{G}'$ (композиция канонической инъекции G' в $\hat{G}'$ и канонического гомоморфизма ψ группы G на $G/N = G'$).*

Так как ядро представления u замкнуто и содержит e, то оно содержит N, и, значит, $u = w \circ \psi$, где w — непрерывное представление G' в H; достаточно тогда применить к w предложение 5.

5. Равномерная структура и пополнение коммутативной группы

Мы уже отмечали, что в коммутативной топологической группе G правая и левая равномерные структуры совпадают; говоря о *равномерной структуре* группы G, мы всегда будем иметь в виду эту единственную структуру.

Теорема 2. *Пусть G — коммутативная топологическая группа; функции x^{-1} и xy равномерно непрерывны соответственно на G и $G \times G$; кроме того, G допускает отделимое пополнение $\hat{G}$, также коммутативное.*

Равномерная непрерывность x^{-1} следует из предложения 2; равномерная непрерывность xy следует из предложения 3, поскольку $(x, y) \longmapsto xy$ есть непрерывное представление $G \times G$ в G. Если G отделима, то она удовлетворяет условию теоремы 1 (как и вся-

кая отделимая группа с совпадающими правой и левой равномерными структурами); кроме того, функции xy и yx совпадают на $\hat{G} \times \hat{G}$ в силу принципа продолжения тождеств. Отсюда получаем и второе утверждение теоремы, рассматривая в общем случае отделимую группу, ассоциированную с G.

Из этой теоремы, в частности, вытекает, что если f и g — равномерно непрерывные отображения равномерного пространства E в коммутативную группу G, записываемую аддитивно, то $-f$ и $f+g$ равномерно непрерывны.

Предложение 9. *Пусть G — коммутативная группа* (в аддитивной записи), *а $\mathcal{T}_1$ и $\mathcal{T}_2$ — отделимые топологии, согласующиеся со структурой группы в G; предположим, что $\mathcal{T}_1$ мажорирует $\mathcal{T}_2$ и что существует фундаментальная система окрестностей нуля для $\mathcal{T}_1$, замкнутая в $\mathcal{T}_2$. Пусть G_1 и G_2 — пополнения группы G соответственно по $\mathcal{T}_1$ и $\mathcal{T}_2$ и f: $G_1 \to G_2$ — непрерывное представление, продолжающее тождественное отображение группы G* (предложение 5); *тогда f инъективно.*

Пусть $\mathcal{U}_1$ — равномерная структура в G, определяемая (n° 1) топологией $\mathcal{T}_1$; достаточно показать, что если $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F}'$ — минимальные фильтры Коши (гл. II, § 3, n° 2) для $\mathcal{U}_1$, сходящиеся в G_2 к одной и той же точке a, то $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}'$ (гл. II, § 3, n° 7). Для этого достаточно показать, что $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{F}'$ есть фильтр Коши для $\mathcal{U}_1$. Пусть V — окрестность нуля в G для $\mathcal{T}_1$, замкнутая в $\mathcal{T}_2$, и W — симметричная окрестность нуля в G для $\mathcal{T}_1$ такая, что $W+W \subset V$. По предположению, в $\mathfrak{F}$ (соотв. в $\mathfrak{F}'$) существует множество M (соотв. M'), малое порядка W_d, так что если $x \in M$, $y \in M$, то $y-x \in W$, или, что то же, $y \in x+W$; отсюда следует, что если $\overline{W}$ и $\overline{V}$ — замыкания W и V в G_2, то $y \in x+\overline{W}$, и так как a есть точка прикосновения, для M, то $a \in x+\overline{W}$ для всех $x \in M$. Точно так же $a \in x'+\overline{W}$ для всех $x' \in M'$, откуда $x-x' \in \overline{W}+\overline{W}$; но так как $(x, y) \mapsto x+y$ есть непрерывное отображение $G_2 \times G_2$ в G_2, то $\overline{W}+\overline{W} \subset \overline{W+W} \subset \overline{V}$. Отсюда для всех $x \in M$, $x' \in M'$ имеем $x-x' \in \overline{V} \cap G = V$, поскольку V замкнуто в $\mathcal{T}_2$; тем самым предложение доказано.

Следствие 1. *В условиях предложения* 9, *если A — подмножество G, являющееся полным подпространством для равномерной струк-*

туры $\mathcal{U}_2$, соответствующей $\mathcal{T}_2$, то A есть также полное подпространство для равномерной структуры $\mathcal{U}_1$, соответствующей $\mathcal{T}_1$.

В самом деле, пусть A_1 — замыкание A в G_1. Тогда $f(A_1)$ содержится в замыкании множества A в G_2, по предположению совпадающем с A. Поскольку $f(A) = A$ по определению, а f инъективно, заключаем, что $A_1 = A$.

Следствие 2. *Пусть G — коммутативная группа, а $\mathcal{T}_1$ и $\mathcal{T}_2$ — отделимые топологии, согласующиеся со структурой группы в G. Предположим, что $\mathcal{T}_1$ мажорирует $\mathcal{T}_2$ и что существует фундаментальная система $\mathfrak{B}$ окрестностей нуля для $\mathcal{T}_1$, полных в равномерной структуре $\mathcal{U}_2$, соответствующей $\mathcal{T}_2$. Тогда G полна в равномерной структуре $\mathcal{U}_1$, соответствующей $\mathcal{T}_1$.*

В самом деле, множества из $\mathfrak{B}$ замкнуты в $\mathcal{T}_2$ и потому, в силу следствия 1, полны в $\mathcal{U}_1$; утверждаемый результат вытекает тогда из предложения 4.

Упражнения

1) Правая равномерная структура топологической группы G является единственной равномерной структурой, согласующейся с топологией в G и обладающей фундаментальной системой окружений, инвариантных относительно любого переноса $(x, y) \longmapsto (xa, ya)$.

2) Определение правых и левых равномерных структур топологической группы G использует только свойства (GV_I) и (GV_{II}) фильтра $\mathfrak{B}$ окрестностей нейтрального элемента e в G. Предположим, что $\mathfrak{B}$ — фильтр, удовлетворяющий этим двум аксиомам, но не обязательно удовлетворяющий аксиоме (GV_{III}); показать, что правая и левая равномерные структуры согласуются соответственно с топологиями $\mathcal{T}_d$ и $\mathcal{T}_s$, определенными в упражнении 5а § 1.

3) Показать равносильность следующих условий для топологической группы G:

α) Правая и левая равномерные структуры в G совпадают.

β) Для каждой окрестности V нейтрального элемента e существует такая его окрестность W, что $xWx^{-1} \subset V$ при всех $x \in G$.

γ) Симметрия $x \longmapsto x^{-1}$ есть равномерно непрерывное отображение группы G_d (или G_s) на себя.

δ) Отображение $(x, y) \longmapsto xy$ есть равномерно непрерывное отображение одного из пространств $G_d \times G_d$, $G_s \times G_s$, $G_d \times G_s$, $G_s \times G_d$ в одно из пространств G_d, G_s.

°4) Пусть $G = \mathbf{GL}(2, \mathbf{R})$ — мультипликативная группа обратимых квадратных матриц второго порядка с вещественными элементами. Обозначим через V_n, для каждого целого $n > 0$, множество

всех матриц $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in G$, у которых $|x-1| \leqslant \frac{1}{n}$, $|y| \leqslant \frac{1}{n}$, $|z| \leqslant \frac{1}{n}$, $|t-1| \leqslant \frac{1}{n}$. Показать, что семейство всех V_n есть фундаментальная система окрестностей нейтрального элемента для топологии, согласующейся со структурой группы в G; в этой топологии группа G локально компактна, а ее правая и левая равномерные структуры различны.$_\circ$

5) Пусть G — топологическая группа и K — ее нормальный делитель. Рассматривая G/K как часть $\mathfrak{P}(G)$, показать, что правая равномерная структура топологической группы G/K индуцируется равномерной структурой в $\mathfrak{P}(G)$, определяемой правой равномерной структурой группы G по способу упражнения 5 § 1 главы II.

6) Показать, что верхняя грань правой и левой равномерных структур топологической группы G (гл. II, § 2, n° 5) есть равномерная структура, согласующаяся с топологией в G; она называется *двусторонней равномерной структурой в* G. Показать, что всякая отделимая топологическая группа изоморфна всюду плотной подгруппе топологической группы, двусторонняя равномерная структура которой есть структура полного пространства.

*7) а) Пусть в отделимой топологической группе G существует окрестность V_0 нейтрального элемента e такая, что симметрия $x \longmapsto x^{-1}$, рассматриваемая как отображение G_d в G_d, равномерно непрерывна в V_0. Показать, что группа G допускает пополнение. [Доказать, что условие теоремы 1 выполнено.]

°б) Показать, что произведение G бесконечного семейства групп, совпадающих с топологической группой, определенной в упражнении 4, полно, но не существует ни одной окрестности e, на которой $x \longmapsto x^{-1}$, рассматриваемое как отображение G_d в себя, было бы равномерно непрерывно.$_\circ$

8) Отделимая топологическая группа G называется *локально предкомпактной*, если существует окрестность V_0 нейтрального элемента e, предкомпактная в правой (или левой) равномерной структуре группы G. Показать, что всякая локально предкомпактная группа обладает пополнением и оно является локально компактной группой. [Использовать упражнение 7.]

9) Пусть G — отделимая топологическая группа и K — ее замкнутый нормальный делитель. Показать, что если топологические группы K и G/K полны, то G полна. [Рассмотреть минимальный фильтр Коши для правой (или левой) равномерной структуры в G и его образ в G/K.]

10) Пусть $(G_\iota)_{\iota \in I}$ — семейство топологических групп и $G = \prod_{\iota \in I} G_\iota$ — произведение групп G_ι, наделенное топологией, определенной в упражнении 23 § 2. Показать, что если все G_ι полны, то и G полно.

11) В условиях и обозначениях упражнения 26 § 2 предположим, что каждая из групп G_ι отделима и допускает пополнение. Показать, что локальное произведение G групп G_ι относительно семейства (K_ι) открытых нормальных делителей допускает пополнение $\hat{G}$ и оно изоморфно локальному произведению групп $\hat{G}_\iota$ относительно замыканий $\overline{K}_\iota$ множеств K_ι.

12) а) Пусть G' — полная отделимая группа, G_0 — ее всюду плотная подгруппа, отличная от G', и G — топологическая группа, получаемая путем наделения G_0 дискретной топологией. Тождественное отображение $G \to G_0$ есть биективное непрерывное представление, но его непрерывное продолжение $\hat{G} \to \hat{G}_0$ не сюръективно.

°б) Пусть G — группа $\mathbf{Q}^2$, θ — иррациональное число, u — непрерывное представление $(x, y) \mapsto x + \theta y$ группы G в $\mathbf{R}$ и $G' = u(G)$; тогда $u\colon G \to G'$ биективно, но его непрерывное продолжение $G \to G'$ не инъективно.

в) Получить из а) и б) пример биективного непрерывного представления $G \to G'$ отделимых коммутативных групп, непрерывное продолжение которого $\hat{G} \to \hat{G}'$ ни инъективно, ни сюръективно.

§ 4. Группы, действующие совершенно в топологическом пространстве. Компактность в топологических группах и пространствах операторов

1. Группы, действующие совершенно в топологическом пространстве

Определение 1. *Пусть G — топологическая группа, действующая непрерывно в топологическом пространстве E. Говорят, что G действует совершенно в E, если отображение $\theta\colon (s, x) \mapsto (x, sx)$ произведения $G \times E$ в $E \times E$ совершенно* (гл. I, § 10, определение 1).

Пусть $\Gamma \subset G \times E \times E$ — график отображения $\rho\colon (s, x) \mapsto sx$; поскольку ρ непрерывно, отображение $\sigma\colon (s, x) \mapsto (s, x, sx)$ есть гомеоморфизм $G \times E$ на Γ; композиция отображений $G \times E \xrightarrow{\sigma} \Gamma \xrightarrow{\mathrm{pr}_{23}} E \times E$ есть не что иное, как θ. Определение 1 сводится, таким образом, к требованию, чтобы сужение pr_{23} на Γ было *совершенным* отображением Γ в $E \times E$.

Теорема 1 § 10 главы I показывает, что G действует совершенно в E тогда и только тогда, когда выполнено следующее условие:

Каковы бы ни были множество A, фильтрующееся по ультрафильтру $\mathfrak{F}$, и отображение $\alpha \mapsto (s_\alpha, x_\alpha)$ множества A в $G \times E$, если отображение $\alpha \mapsto (s_\alpha x_\alpha, x_\alpha)$ имеет предел (b, a) по $\mathfrak{F}$, то $\alpha \mapsto s_\alpha$ имеет предел $t \in G$ по $\mathfrak{F}$, причем $ta = b$.

Примеры. 1) Пусть H — *замкнутая* подгруппа топологической группы G. Если G действует совершенно в E, то то же верно и для H, поскольку $H \times E$ замкнуто в $G \times E$ (гл. I, § 10, следствие 1 предложения 5). Если взять, например, $E = G$, считая, что G действует в себе как группа левых переносов, то отображение $G \times E \to E \times E$ есть гомеоморфизм, а значит, совершенно, и мы видим, таким образом, что *H действует совершенно в G как группа левых переносов.*

2) Если группа G действует совершенно в E, то она действует совершенно *в любом подпространстве E' пространства E, являющемся объединением орбит точек из E* (иными словами, насыщенном по отношению эквивалентности, определяемому группой G). Действительно, прообразом $E' \times E'$ в $G \times E$ служит $G \times E'$, и достаточно применить предложение 3 § 10 главы I.

Предложение 1. *Пусть G — топологическая группа, действующая непрерывно в топологическом пространстве E, и K — квазикомпактное множество в G. Отображение ρ: $(s, x) \mapsto sx$ произведения $K \times E$ в E совершенно.*

В самом деле, ρ допускает разложение $K \times E \xrightarrow{\alpha} K \times E \xrightarrow{\mathrm{pr}_2} E$, где $\alpha(s, x) = (s, sx)$. Отображение α есть гомеоморфизм, ибо $\alpha^{-1}(s, y) = (s, s^{-1}y)$ непрерывно; так как K квазикомпактно, то pr_2 совершенно (гл. I, § 10, следствие 5 теоремы 1); следовательно, ρ совершенно (гл. I, § 10, предложение 5).

Следствие 1. *Если A — замкнутое* (соотв. *компактное*) *множество из E, то KA замкнуто в E* (соотв. *компактно, если E отделимо*).

Утверждение относительно замкнутых множеств вытекает из предложения 1 и замкнутости совершенного отображения (гл. I, § 10, предложение 1); утверждение относительно компактных множеств тривиально.

2

Заметим, что если L — компактное множество в E, а F — замкнутое множество в G, то FL не обязательно замкнуто в E (§ 2, упражнение 29; см. следствие предложения 12).

Следствие 2. *Если K — квазикомпактная подгруппа топологической группы G, то отношение эквивалентности $x^{-1}y \in K$ замкнуто, а каноническое отображение φ: $G \to G/K$ совершенно.*

Первое утверждение вытекает из следствия 1, примененного к группе G, действующей в себе как группа правых переносов, а второе вытекает тогда из теоремы 1 § 10 главы I.

Следствие 3. *Пусть K — квазикомпактный нормальный делитель топологической группы G и φ — каноническое отображение $G \to G/K$. Для любой замкнутой подгруппы A группы G каноническая биекция $A/(A \cap K)$ на $\varphi(A)$ есть изоморфизм топологических групп.*

В самом деле, поскольку $x^{-1}y \in K$ есть замкнутое отношение эквивалентности (следствие 2), справедливость утверждения вытекает из предложения 4 § 5 главы I.

Предложение 2. *Пусть K — компактная группа, действующая непрерывно в отделимом пространстве E. Тогда:*

а) *K действует совершенно в E.*

б) *Отображение $(s, x) \mapsto sx$ произведения $K \times E$ в E совершенно.*

в) *Каноническое отображение E на E/K совершенно.*

В самом деле, б) вытекает из предложения 1. С другой стороны, так как K компактно, то pr_2: $(s, x) \mapsto x$ совершенно (гл. I, § 10, следствие 5 теоремы 1); следовательно, в силу отделимости E, $(s, x) \mapsto (x, sx)$ совершенно (гл. I, § 10, следствие 3 предложения 5), чем доказано а). Далее, в силу следствия 1 предложения 1 каноническое отображение φ: $E \to E/K$ замкнуто; если теперь считать K действующим тривиально в произвольном топологическом пространстве Z, то K действует непрерывно в $E \times Z$, так что каноническое отображение $E \times Z \to (E \times Z)/K$, по предыдущему, замкнуто. Но $(E \times Z)/K$ канонически отождествимо с $(E/K) \times Z$ (§ 2, лемма 2 и гл. I, § 5, следствие предложения 8). Следовательно, каноническое отображение $E \times Z \to (E \times Z)/K$ отождествимо с $\varphi \times 1$, а его замкнутость для каждого Z означает, что φ совершенно.

Следствие 1. *При условиях предложения 2, для того чтобы E было компактно* (соотв. *локально компактно*), *необходимо и достаточно, чтобы E/K обладало этим свойством.*

Это вытекает из совершенности канонического отображения $E \to E/K$, если принять во внимание следствие предложения 9 § 10 главы I.

Следствие 2. *Пусть G — отделимая топологическая группа и K — ее компактная подгруппа. Для того чтобы G была компактна* (соотв. *локально компактна*), *необходимо и достаточно, чтобы G/K было компактно* (соотв. *локально компактно*).

В самом деле, достаточно применить следствие 1 к группе K, действующей в G как группа правых переносов.

2. Свойства групп, действующих совершенно

Предложение 3. *Если топологическая группа G действует совершенно в топологическом пространстве E, то пространство орбит E/G отделимо. Если, кроме того, G отделима, то E отделимо.*

Пусть $C \subset E \times E$ — график отношения эквивалентности R, определяемого группой G в E; он является образом произведения $G \times E$ при отображении θ: $(s, x) \mapsto (x, sx)$. Поскольку θ совершенно, C замкнуто в $E \times E$ (гл. I, § 10, предложение 1). Так как отношение R открыто (§ 2, лемма 2), то заключаем, что E/G отделимо (гл. I, § 8, предложение 8).

Предположим теперь, что G отделима; отображение $x \mapsto (e, x)$ пространства E в $G \times E$ является гомеоморфизмом на замкнутое множество в $G \times E$ и потому совершенно (гл. I, § 10, предложение 2); компонируя с ним отображение $(s, x) \mapsto (x, sx)$ произведения $G \times E$ в $E \times E$, совершенное по предположению, получаем совершенное отображение E в $E \times E$ (гл. I, § 10, предложение 5), являющееся не чем иным, как диагональным отображением $x \mapsto (x, x)$; таким образом, диагональ в $E \times E$ замкнута (гл. I, § 10, предложение 1), чем доказана отделимость E (гл. I, § 8, предложение 1).

Предложение 4. *Пусть G — топологическая группа, действующая совершенно в топологическом пространстве E, и x — точка*

из E. Обозначим через Gx орбиту точки x и через K_x — стабилизатор этой точки. Тогда:

а) *Отображение $s \mapsto sx$ есть совершенное отображение G в E.*

б) *K_x квазикомпактно.*

в) *Каноническое отображение G/K_x на Gx есть гомеоморфизм.*

г) *Орбита Gx замкнута в E.*

Прообраз произведения $\{x\} \times E$ относительно отображения θ: $(s, x) \mapsto (x, sx)$ есть $G \times \{x\}$; предложение 3 § 10 главы I показывает, что сужение θ на $G \times \{x\}$ есть совершенное отображение $G \times \{x\}$ в $\{x\} \times E$, чем доказано а). Так как K_x есть прообраз точки x относительно отображения $s \mapsto sx$, то б) вытекает из теоремы 1 § 10 главы I. Гомеоморфность канонического отображения $G/K_x \to Gx$ и замкнутость Gx в E являются следствиями утверждения а) (гл. I, § 10, предложения 2 и 5б).

Замечание. Предложение 4 показывает, что если топологическая группа G действует совершенно в однородном пространстве G/H, то подгруппа H квазикомпактна (и, значит, компактна, если G отделима). Можно показать, что это условие достаточно для того, чтобы G действовала совершенно в G/H (упражнение 3).

Предложение 5. *Пусть G* (соотв. G') *— топологическая группа, действующая непрерывно в топологическом пространстве E* (соотв. E'). *Пусть, далее, φ и ψ — согласующиеся* (§ 2, n° 4) *непрерывное представление G в G' и непрерывное отображение E в E'.*

(I) *Если φ сюръективно, ψ сюръективно и совершенно, а G действует совершенно в E, то G' действует совершенно в E'.*

(II) *Если φ совершенно, G' действует совершенно в E' и E отделимо, то G действует совершенно в E.*

Для доказательства утверждения (I) рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} G \times E & \xrightarrow{\theta} & E \times E \\ \alpha\downarrow & & \downarrow\beta \\ G' \times E' & \xrightarrow{\theta'} & E' \times E', \end{array}$$

где $\alpha = \varphi \times \psi$, $\beta = \psi \times \psi$. По предположению θ совершенно, и то же верно для β (гл. I, § 10, предложение 4а); следовательно,

$\beta \circ \theta = \theta' \circ \alpha$ совершенно (гл. I, § 10, предложение 5а); поскольку α сюръективно, заключаем отсюда, что θ' совершенно (гл. I, § 10, предложение 5б).

Для доказательства утверждения (II) рассмотрим ультрафильтр $\mathfrak{U}$ в $G \times E$ такой, что $(s, x) \mapsto sx$ и $(s, x) \mapsto x$ сходятся по $\mathfrak{U}$ соответственно к y_0 и x_0. Тогда также $(s, x) \mapsto \varphi(s)\psi(x)$ и $(s, x) \mapsto \psi(x)$ сходятся по $\mathfrak{U}$. Поскольку G' действует совершенно в E', это влечет (n° 1), что $(s, x) \mapsto \varphi(s)$ сходится по $\mathfrak{U}$ к некоторой точке $s'_0 \in G'$; так как φ совершенно, заключаем (гл. I, § 10, теорема 1), что $(s, x) \mapsto s$ сходится по $\mathfrak{U}$ к некоторой точке $s_0 \in G$. Единственность предела в E показывает тогда, что $y_0 = s_0 x_0$, а это показывает, что G действует совершенно в E (n° 1).

3. *Группы, действующие свободно в топологическом пространстве*

Определение 2. *Пусть G — группа, действующая в множестве E. Говорят, что G действует свободно в E, если стабилизатор каждой точки из E сводится к нейтральному элементу e, иными словами, если отношения $sx = x$, $x \in E$, $s \in G$ влекут $s = e$.*

Пример. Пусть G — группа и H — ее подгруппа. Группа H действует свободно в G как группа (правых или левых) переносов.

Пусть G — группа, действующая свободно в множестве E, R — отношение эквивалентности в E, определяемое группой G, и $C \subset E \times E$ — его график. Если $(x, y) \in C$, то существует $s \in G$ такое, что $sx = y$; при этом элемент s определён *однозначно*, ибо если $sx = s'x$, то $s'^{-1}sx = x$, откуда $s'^{-1}s = e$, поскольку G действует свободно. Относя каждой паре $(x, y) \in C$ тот единственный элемент $s \in G$, для которого $sx = y$, получаем отображение φ: $C \to G$, называемое *каноническим отображением C в G*. В тех же обозначениях имеем:

Предложение 6. *Пусть G — топологическая группа, действующая непрерывно в топологическом пространстве E. Предположим, что G действует свободно в E. Тогда для того, чтобы G действовала совершенно, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось следующее условие:*

(FP) *График C отношения эквивалентности, определяемого группой G, замкнут в $E \times E$, а каноническое отображение $\varphi\colon C \to G$ непрерывно.*

Множество C есть образ отображения $\theta\colon (s, x) \mapsto (x, sx)$ произведения $G \times E$ в $E \times E$. Как известно (гл. I, § 10, предложение 2), для совершенности θ необходимо и достаточно, чтобы C был замкнут в $E \times E$, а θ, рассматриваемое как отображение $G \times E$ в C и обозначаемое тогда через θ', было гомеоморфизмом. Но из предположения вытекает, что θ' биективно и его обращением служит $(x, y) \mapsto (\varphi(x, y), x)$; следовательно, для того чтобы θ' было гомеоморфизмом, необходимо и достаточно, чтобы φ было непрерывно.

4. *Локально компактные группы, действующие совершенно*

Предложение 7. *Пусть G — локально компактная группа, действующая непрерывно в отделимом пространстве E. Для того чтобы G действовала совершенно, необходимо и достаточно, чтобы для любой пары точек x, y из E существовали окрестность V_x точки x и окрестность V_y точки y такие, что множество K тех $s \in G$, для которых $sV_x \cap V_y \neq \varnothing$, относительно компактно в G.*

Пусть F — компактное пространство, полученное присоединением к G бесконечно удаленной точки ω, и Γ — график отображения $\rho\colon (s, x) \mapsto sx$, рассматриваемый как подмножество в $F \times E \times E$; покажем, что если сужение pr_{23} на Γ совершенно, то Γ *замкнут в* $F \times E \times E$. Действительно, из этого предположения следует, что отображение $u\colon (t, s, x, y) \mapsto (t, x, y)$ произведения $F \times \Gamma$ в $F \times E \times E$ замкнуто. Множество Γ' точек (s, s) в $F \times G$, где s пробегает G, замкнуто в $F \times G$, как график канонической инъекции $G \mapsto F$ (гл. I, § 8, следствие 2 предложения 2); поэтому пересечение $(\Gamma' \times E \times E) \cap (F \times \Gamma)$ замкнуто в $F \times \Gamma$, и так как его образом при u, очевидно, служит Γ, рассматриваемое как подмножество в $F \times E \times E$, то наше утверждение доказано. Но $(\{\omega\} \times E \times E) \cap \Gamma = \varnothing$, следовательно, по определению F, для каждой точки $(x, y) \in E \times E$ существуют ее окрестность W в $E \times E$ и компактное множество K в G такие, что $((G - K) \times W) \cap \Gamma = \varnothing$; так как в качестве W можно взять окрестность

вида $V_x \times V_y$, где V_x и V_y — соответственно окрестности x и y, то отношение $((G - K) \times W) \cap \Gamma = \varnothing$ может быть выражено в виде «$s \notin K$ влечет $sV_x \cap V_y = \varnothing$», чем необходимость условия предложения доказана. Обратно, предположим, что это условие выполнено; пусть A — множество, фильтрующееся по ультрафильтру $\mathfrak{F}$, и $\alpha \mapsto (s_\alpha, x_\alpha)$ — такое отображение A в $G \times E$, что $\lim_{\mathfrak{F}} x_\alpha = x$, $\lim_{\mathfrak{F}} s_\alpha x_\alpha = y$. Предположим, что K, V_x и V_y удовлетворяют условию предложения. По предположению существует такое множество $M \in \mathfrak{F}$, что если $\alpha \in M$, то $x_\alpha \in V_x$ и $s_\alpha x_\alpha \in V_y$, а значит $s_\alpha \in K$, так что $\alpha \mapsto s_\alpha$ сходится по фильтру $\mathfrak{F}$, и предложение полностью доказано.

Если G компактно, то условие предложения 7 выполняется тривиально, и мы вновь приходим, таким образом, к предложению 2а.

Предложение 7 показывает, в частности, что *дискретная* группа G, действующая непрерывно в отделимом пространстве E, действует совершенно в E в том и только том случае, когда для любой пары (x, y) точек из E существуют окрестность V_x точки x и окрестность V_y точки y такие, что множество тех $s \in G$, для которых $sV_x \cap V_y \neq \varnothing$, *конечно*.

Предложение 8. *Пусть G — дискретная группа, действующая совершенно в отделимом пространстве E. Пусть x — точка из E и K_x — ее стабилизатор.*

а) *Подгруппа K_x конечна, и существует открытое множество $U \subset E$, содержащее x, устойчивое относительно K_x, в котором отношение эквивалентности, индуцируемое отношением, определяемым группой G, есть отношение эквивалентности, определяемое группой K_x.*

б) *Каноническое отображение $U/K_x \to E/G$ есть гомеоморфизм U/K_x на открытую окрестность класса точки x в E/G.*

В силу предложения 7 K_x конечно. Чтобы построить открытое множество U, удовлетворяющее требуемым условиям, заметим сначала, что, согласно предложению 7, существует открытое множество U_0, содержащее x и такое, что множество K тех $s \in G$, для которых $sU_0 \cap U_0 \neq \varnothing$, конечно. Очевидно, $K_x \subset K$; пусть $s_1, \ldots, s_n$ — все элементы множества $K - K_x$. Положив $x_i = s_i x$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, будем иметь $x_i \neq x$ для всех i; в силу

отделимости E, для каждого индекса i существуют открытая окрестность V_i точки x и открытая окрестность V'_i точки $s_i x$ такие, что $V_i \cap V'_i = \varnothing$; положим $U_i = V_i \cap s_i^{-1} V'_i$. Очевидно, U_i открыто, содержит x и $U_i \cap s_i U_i \subset V_i \cap V'_i = \varnothing$. Пусть $U' = U_0 \cap \cap U_1 \cap \ldots \cap U_n$; U' открыто, содержит x и обладает тем свойством, что $U' \cap sU' = \varnothing$ для всех $s \notin K_x$; полагая $U = \bigcap_{t \in K_x} tU'$, получаем открытое множество, устойчивое относительно K_x, содержащее x и такое, что $U \cap sU = \varnothing$ для всех $s \notin K_x$; это и есть искомое открытое множество.

То, что каноническое отображение $U/K_x \to E/G$ является гомеоморфизмом U/K_x на открытое множество в E/G, вытекает из предложения 4 § 5 главы I, поскольку U открыто и отношение эквивалентности, определяемое группой G, открыто (§ 2, лемма 2).

Следствие. *Если предположить, кроме того, что $K_x = \{e\}$, то точка x обладает такой открытой окрестностью U, что сужение на U канонического отображения $E \to E/G$ является гомеоморфизмом U на открытое множество в E/G.*

5. *Группы, действующие непрерывно в локально компактном пространстве*

Предложение 9. *Пусть G — топологическая группа, действующая непрерывно в локально компактном пространстве E. Если E/G отделимо, то оно локально компактно.*

В самом деле, так как отношение эквивалентности в E, определяемое группой G, открыто (§ 2, лемма 2), то справедливость утверждения следует из предложения 10 § 10 главы I.

Предложение 10. *Пусть G — топологическая группа, действующая непрерывно в локально компактном пространстве E, и E/G отделимо; пусть φ — каноническое отображение E на E/G. Для каждого компактного множества K' из E/G существует компактное множество K в E такое, что $\varphi(K) = K'$.*

Поскольку отношение эквивалентности, определяемое группой G, открыто (§ 2, лемма 2), это предложение есть частный случай предложения 10 § 10 главы I.

Предложение 11. *Пусть G — отделимая топологическая группа, действующая совершенно в непустом пространстве E. Если E компактно* (соотв. *локально компактно*), *то то же верно для G и E/G.*

По предположению отображение θ: $(s, x) \mapsto (x, sx)$ произведения $G \times E$ в $E \times E$ совершенно; если $E \times E$ компактно (соотв. локально компактно), то, как показывает следствие предложения 9 § 10 главы I, то же верно для $G \times E$, а значит, и для G, поскольку $E \neq \varnothing$. Так как E/G отделимо (предложение 3), то компактность (соотв. локальная компактность) E влечет компактность (гл. I, § 10, предложение 8) (соотв. локальную компактность (предложение 9)) E/G (см. § 2, упражнение 29).

Мы укажем теперь критерии, позволяющие утверждать, что отделимая топологическая группа G действует совершенно в локально компактном пространстве E. Для произвольной пары множеств K, L из E обозначим через $P(K, L)$ множество тех $s \in G$, для которых $sK \cap L \neq \varnothing$.

Теорема 1. *Пусть G — отделимая топологическая группа, действующая непрерывно в топологическом пространстве E, K — компактное множество в E, L — замкнутое множество в E. Тогда:*

а) *Множество $P(K, L)$ замкнуто в G.*

б) *Если G действует совершенно в E и L компактно, то $P(K, L)$ компактно.*

в) *Обратно, если E локально компактно и для любой пары компактных множеств K, L из E множество $P(K, L)$ относительно компактно в G* (*и, значит, в силу* а) *компактно*), *то G действует совершенно в E* (*и если E не пусто, то G, по предложению* 11, *локально компактно*).

Отображение $(s, x) \mapsto sx$ произведения $G \times K$ в E непрерывно; следовательно, прообраз L' множества L относительно этого отображения замкнут. Поскольку множество K компактно, проекция pr_1: $G \times K \to G$ совершенна (гл. I, § 10, следствие 5 теоремы 1), так что образ L' при pr_1 замкнут (там же, предложение 1). Но этим образом является $P(K, L)$; тем самым а) доказано.

Докажем б). Заметим, что E отделимо (предложение 3). По предположению отображение θ: $(s, x) \mapsto (x, sx)$ произведения

$G \times E$ в $E \times E$ совершенно; так как $K \times L$ компактно, то, поскольку E отделимо, $\overset{-1}{\theta}(K \times L)$ компактно (гл. I, § 10, предложение 6); следовательно, проекция $P(K, L)$ множества $\overset{-1}{\theta}(K \times L)$ на G является компактным множеством.

Докажем в). Так как $K \times L$ замкнуто в $E \times E$, то $\overset{-1}{\theta}(K \times L)$ замкнуто в $P(K, L) \times K$ и, значит, в предположениях пункта в) компактно. Поскольку всякое компактное множество в $E \times E$ содержится в компактном множестве вида $K \times L$, заключаем, что прообраз относительно θ произвольного компактного множества из $E \times E$ компактен; в силу локальной компактности $E \times E$ это доказывает, что θ совершенно (гл. I, § 10, предложение 7) (см. упражнение 4в § 1 главы IV).

З а м е ч а н и е. Очевидно, $P(K, L) \subset P(K \cup L, K \cup L)$; следовательно, для того чтобы G действовала совершенно в локально компактном пространстве E, достаточно, чтобы для любого компактного множества K из E множество $P(K, K)$ было относительно компактно в G. В частности, для того чтобы *дискретная* группа G действовала совершенно в локально компактном пространстве E, необходимо и достаточно, чтобы для любого компактного множества K из E множество тех $s \in G$, для которых $sK \cap K \neq \varnothing$, было *конечно*.

П р и м е р. °Пусть X — комплексное аналитическое многообразие, аналитически изоморфное ограниченному открытому множеству из $\mathbf{C}^n$, и G — группа аналитических автоморфизмов многообразия X; топология компактной сходимости согласуется со структурой группы в G, и можно показать, что G действует совершенно в X. В частности, всякая дискретная подгруппа группы G действует совершенно в X.

Возьмем, например, в качестве X полуплоскость $\mathfrak{I}(z) > 0$, аналитически изоморфную открытому кругу в $\mathbf{C}$; G есть группа всевозможных преобразований $z \longmapsto (az + b)/(cz + d)$ с вещественными a, b, c, d и $ad - bc \neq 0$. Подгруппа H группы G, состоящая из преобразований, у которых a, b, c, d — целые числа и $ad - bc = 1$, есть дискретная подгруппа группы G, называемая *модулярной группой*. На основании предыдущего она действует совершенно в полуплоскости $\mathfrak{I}(z) > 0$.₀

Предложение 12. *Пусть G — отделимая топологическая группа, действующая непрерывно в топологическом пространстве E,*

K — компактное множество в E и ρ_K — отображение $(s, x) \mapsto sx$ произведения $G \times K$ в E. Тогда:

а) *Если G действует совершенно в E, то ρ_K — совершенное отображение.*

б) *Если E локально компактно и ρ_K совершенно для любого компактного множества K из E, то G действует совершенно в E.*

Отображение ρ_K представимо в виде композиции $G \times K \xrightarrow{\theta_K} K \times E \xrightarrow{\mathrm{pr}_2} E$, где θ_K — сужение на $G \times K$ отображения θ: $(s, x) \mapsto (x, sx)$ произведения $G \times E$ в $E \times E$. Так как $\overset{-1}{\theta}(K \times E) = G \times K$, то θ_K совершенно, если θ совершенно (гл. I, § 10, предложение 3). С другой стороны, поскольку K компактно, проекция pr_2 произведения $K \times E$ на E совершенна (гл. I, § 10, следствие 5 теоремы 1) и, следовательно, ρ_K совершенно (там же, предложение 5).

Обратно, предположим, что ρ_K совершенно для любого компактного множества K из E; если L — компактное множество в E, то $\overset{-1}{\rho_K}(L)$ будет компактным множеством в $G \times K$, проекцией которого в G служит $P(K, L)$; следовательно, $P(K, L)$ компактно, и если E локально компактно, то на основании теоремы 1 заключаем, что G действует совершенно в E.

Следствие. *Пусть G — отделимая топологическая группа, действующая совершенно в топологическом пространстве E. Для любого компактного множества K из E и любого замкнутого множества F из G множество FK замкнуто в E.*

Это вытекает из доказанного сейчас предложения 12 и предложения 1 § 10 главы I.

6. *Локально компактные однородные пространства*

Предложение 13. *Пусть G — локально компактная группа и H — ее замкнутая подгруппа. Однородное пространство G/H локально компактно и паракомпактно.*

Так как G/H отделимо (§ 2, предложение 13), то оно локально компактно в силу предложения 9, примененного к группе H, действующей справа в G. Остается, таким образом, показать, что G/H паракомпактно. Пусть V — симметричная компактная окре-

стность нейтрального элемента e в G и $G_0 = V^\infty$ — порождаемая ею подгруппа в G, открытая по следствию предложения 4 § 2. Группа G_0 действует непрерывно в G/H (§ 2, предложение 12); покажем, что каждая орбита $G_0 z$ ($z \in G/H$) есть *открытое* множество в G/H, являющееся объединением счетного семейства компактных множеств; отсюда будет вытекать, что G/H есть *топологическая сумма* различных орбит $G_0 z$ и, следовательно, паракомпактно (гл. I, § 9, теорема 5). То, что $G_0 z$ открыто в G/H, вытекает из того, что G_0 открыто в G, а отношение эквивалентности $x^{-1}y \in H$ открыто в G (§ 2, лемма 2). С другой стороны, $G_0 z$ есть объединение множеств $V^n z$ ($n \geqslant 1$), и так как V^n компактно в G, а G/H отделимо, то $V^n z$ компактно, и предложение доказано.

Предложение 14. *Нейтральная компонента C локально компактной группы G есть пересечение всех открытых подгрупп группы G.*

Поскольку C — замкнутый нормальный делитель группы G (§ 2, предложение 7), G/C — локально компактная (предложение 13) вполне несвязная (гл. I, § 11, предложение 9) группа. Так как прообраз открытой подгруппы группы G/C относительно канонического отображения G на G/C есть открытая подгруппа в G, содержащая C, то можно ограничиться доказательством предложения для группы G/C; иначе говоря, мы свели доказательство к случаю, когда G вполне несвязна. Но, как известно (гл. II, § 4, следствие предложения 6), тогда всякая компактная окрестность V нейтрального элемента e содержит открыто-замкнутую окрестность U. В силу компактности U и замкнутости $B = \complement U$, e обладает симметричной открытой окрестностью W такой, что $W \subset U$ и $UW \cap BW = \varnothing$ (§ 3, n° 1 и гл. II, § 4, предложение 4), так что тем более $UW \subset U$. Индукцией по n заключаем отсюда, что $W^n \subset U$ для каждого целого $n > 0$; таким образом, порождаемая W подгруппа $W^\infty = \bigcup_{n>0} W^n$ группы G, открытая в силу следствия предложения 4 § 2, содержится в U, и предложение доказано.

Вместе с тем мы доказали:

Следствие 1. *Если G — вполне несвязная локально компактная группа, то всякая окрестность e в G содержит открытую подгруппу группы G.*

Следствие 2. *Локально компактная группа, порождаемая каждой окрестностью нейтрального элемента, связна.*

Следствие 3. *Пусть G — локально компактная группа, H — ее замкнутая подгруппа и φ — каноническое отображение G на G/H. Связными компонентами группы G/H являются замыкания образов при φ связных компонент группы G.*

Пусть C — нейтральная компонента группы G. Связными компонентами группы G служат множества sC со всевозможными $s \in G$ (§ 2, предложение 7); очевидно, $\varphi(sC)$ связно, и, значит, связно также $\overline{\varphi(sC)}$ (гл. I, § 11, предложение 1). Но $\varphi(sC) = \varphi(sCH)$, и так как sCH насыщено по отношению эквивалентности, определяемому подгруппой H, а это отношение открыто (§ 2, лемма 2), то $\overline{\varphi(sCH)} = \varphi(\overline{sCH}) = \varphi(s\overline{CH})$ (гл. I, § 5, предложение 7).

Положим $L = \overline{CH}$; L есть замкнутая подгруппа группы G, содержащая C и H; для доказательства того, что множества $\varphi(sL) = s\varphi(L)$ служат связными компонентами группы G/H, достаточно показать, что факторпространство пространства G/H по отношению эквивалентности, классами которого являются множества $s\varphi(L)$, вполне несвязно. Но это факторпространство гомеоморфно однородному пространству G/L (гл. I, § 3, предложение 7), и вопрос сведен, таким образом, к доказательству того, что если $C \subset H$, то *G/H вполне несвязно*. Так как G/H отождествимо тогда с $(G/C)/(H/C)$ (§ 2, предложение 22), то можно считать, что сама группа G вполне несвязна. Всякая окрестность $\varphi(e)$ в G/H содержит окрестность вида $\varphi(V)$, где V — окрестность e в G, значит (следствие 1) она содержит окрестность вида $\varphi(K)$, где K — *открытая и компактная* подгруппа группы G; $\varphi(K)$ будет тогда открыто-замкнуто в G/H, чем показано, что связная компонента точки $\varphi(e)$ в G/H сводится к этой точке; посредством переноса заключаем, что то же справедливо для связной компоненты любой точки из G/H, чем завершается доказательство следствия.

Упражнения

1) а) Для того чтобы подгруппа H топологической группы G действовала совершенно в G по внешнему закону $(s, x) \longmapsto sxs^{-1}$, необходимо и достаточно, чтобы G была отделима, а H компактна. [Использовать предложения 2 и 4.]

б) Пусть G — топологическая группа и H — ее подгруппа. Для того чтобы отображение $(x, y) \longmapsto xy$ произведения $H \times G$ в G было совершенным, необходимо и достаточно, чтобы H была квазикомпактна. [Рассмотреть прообраз e относительно этого отображения.]

2) Дать пример компактной группы, действующей непрерывно (и потому не совершенно, см. предложение 3) в неотделимом пространстве. [См. § 2, упражнение 13.]

*3) Для того чтобы топологическая группа G действовала совершенно в однородном пространстве G/K, необходимо и достаточно, чтобы K была квазикомпактна. [Чтобы убедиться в достаточности условия, доказать, что каноническое отображение G на G/K совершенно, и использовать предложение 5 § 10 главы I.]

4) Дать такой пример отделимой топологической группы G, действующей совершенно в отделимом топологическом пространстве E, в котором бы отображение $(s, x) \longmapsto sx$ и каноническое отображение $E \to E/G$ не были замкнутыми. [См. упражнение 1б.]

5) Для того чтобы подгруппа H топологической группы G действовала совершенно в G как группа левых переносов, необходимо (и достаточно), чтобы H была замкнута в G.

°6) Положим для любого вещественного $a \geqslant 1$

$$f_a(t) = \begin{cases} \left(t + \dfrac{a(a+2)}{a+1},\ -\dfrac{a}{a+1}\right), & \text{если } t < -\dfrac{a}{a+1}, \\ (a,\ t), & \text{если } -\dfrac{a}{a+1} \leqslant t \leqslant \dfrac{a}{a+1}, \\ \left(-t + \dfrac{a(a+2)}{a+1},\ \dfrac{a}{a+1}\right), & \text{если } t > \dfrac{a}{a+1}. \end{cases}$$

Обозначим через C_a множество всех $f_a(t)$, где t пробегает $\mathbf{R}$, и через E — подпространство в $\mathbf{R}^2$, являющееся объединением всех множеств C_a $(a \geqslant 1)$ и прямых D', D'', где D' (соотв. D'') состоит из всех точек $(t, -1)$ (соотв. $(t, 1)$) с $t \in \mathbf{R}$.

а) Пусть группа $\mathbf{R}$ действует в E по такому закону $(s, z) \longmapsto sz$: 1° $s(t, -1) = (s + t, -1)$; 2° $s(t, 1) = (t - s, 1)$; 3° $s f_a(t) = f_a(s + t)$ для всех $a \geqslant 1$. Показать, что $\mathbf{R}$ действует непрерывно в E и все четыре условия предложения 4 выполнены, но $E/\mathbf{R}$ неотделимо.

б) Пусть S — отношение эквивалентности в E, классы которого сводятся к одной точке z, если $z \notin D'$ и $z \notin D''$, и имеют вид $\{z, -z\}$ для $z \in D'$ или $z \in D''$; пусть E' означает факторпространство E/S. Отношение S согласуется с группой $\mathbf{R}$, действующей в E (§ 2, n° 4); показать, что $\mathbf{R}$ действует непрерывно в E', все четыре условия предложения 4 выполнены и $E'/\mathbf{R}$ отделимо, но $\mathbf{R}$ не действует совершенно в E'.°

7) Пусть G — отделимая группа, действующая непрерывно в локально компактном пространстве E. Предположим, что: 1° для

любого компактного множества K из E сужение на $G \times K$ отображения $(s, x) \longmapsto sx$ есть замкнутое отображение $G \times K$ в E; 2° $s \longmapsto sx$ есть совершенное отображение G в E при любом $x \in E$. Показать, что G действует совершенно в E. [Использовать предложение 12.]

8) Пусть G_0 — недискретная отделимая топологическая группа, в которой всякое компактное множество конечно (§ 2, упражнение 23). Пусть G — группа G_0, наделенная дискретной топологией. Показать, что G действует непрерывно, но не совершенно в G_0 как группа левых переносов и обладает тем свойством, что $P(K, L)$ компактно для любых компактных множеств K и L из G_0 (теорема 1).

*9) Пусть G — топологическая группа, действующая непрерывно в пространствах E и E', f: $E \to E'$ — непрерывное отображение, согласующееся с тождественным отображением группы G (§ 2, n° 4), и $\overline{f}$: $E/G \to E'/G$ — непрерывное отображение, получаемое из f факторизацией.

а) Показать, что если f открыто (соотв. замкнуто, совершенно, инъективно, сюръективно), то это же имеет место и для $\overline{f}$. [Для доказательства совершенности $\overline{f}$, когда f совершенно, показать, что прообраз точки из E'/G относительно отображения $\overline{f}$ квазикомпактен.]

б) Предположим, что G действует совершенно и свободно в E и E'. Показать, что если $\overline{f}$ совершенно, то совершенно и f. [Заметить, что сужение отображения f на орбиту Gx есть гомеоморфизм на $Gf(x)$.]

*10) Пусть G — топологическая группа, а E и F — топологические пространства, в которых G действует непрерывно; тогда G действует непрерывно в $E \times F$ по закону $(s, (x, y)) \longmapsto (sx, sy)$; положим $E \times {}^G F = (E \times F)/G$.

а) Показать, что $E \times {}^G G$ (где G действует как группа левых переносов сама в себе) канонически гомеоморфно E. [Заметить, что если U открыто в E, то объединение орбит всех точек из $U \times \{e\}$ открыто в $E \times G$.]

б) Пусть F' — третье топологическое пространство, в котором G действует непрерывно, и f: $F \to F'$ — непрерывное отображение, согласующееся с тождественным отображением группы G. Посредством факторизации из $1_E \times f$ получаем непрерывное отображение $\overline{f}$: $E \times {}^G F \to E \times {}^G F'$. Если f открыто (соотв. совершенно, инъективно, сюръективно), то это имеет место и для $\overline{f}$ (упражнение 9). Дать пример, в котором f замкнуто и G действует совершенно в E, но $\overline{f}$ не замкнуто. [За F принять G, за F' — одноточечное пространство P и использовать упражнение 4.]

в) Показать, что если G действует совершенно в E, то G действует совершенно в $E \times F$.

г) Показать, что если F компактно, то каноническое отображение $E \times {}^G F \to E/G$ совершенно. [Использовать б).]

д) Предположим, что G локально компактна, и обозначим через G' ее александровскую компактификацию с бесконечно удаленной точкой ω; G действует непрерывно в G' по внешнему закону, определяемому условиями $s \cdot t = st$, если $t \in G$, и $s \cdot \omega = \omega$; тогда E гомеоморфно открытому подпространству в $E \times {}^G G'$. [Использовать б).] Вывести отсюда, что если G действует совершенно в E и, кроме того, E/G локально компактно, то E локально компактно. [Для доказательства отделимости $E \times {}^G G'$ использовать в).]

°е) Дать такой пример локально компактной группы G, действующей непрерывно в не локально компактном пространстве E, чтобы E/G сводилось к одной точке. [См. § 2, упражнение 29.]$_\circ$

*11) Пусть G — топологическая группа, а H и K — ее замкнутые подгруппы.

а) Показать равносильность следующих трех условий: 1° $H \times K$ действует совершенно в G по внешнему закону $((h, k), s) \longmapsto hsk^{-1}$; 2° H действует совершенно в однородном пространстве G/K; 3° K действует совершенно в однородном пространстве G/H.

б) Предположим, что G локально компактна; условия (равносильные) пункта а) равносильны также следующему условию: для любой пары компактных множеств A, B из G пересечение $HA \cap BK$ компактно. В частности, эти условия выполнены, если одна из подгрупп H, K компактна.

в) Предположим, что G локально компактна. Показать равносильность следующих условий: 1° для любого $x \in G$ отображение $h \longmapsto hxK$ группы H в G/K совершенно; 2° для любого $x \in G$ отображение $k \longmapsto kxH$ группы K в G/H совершенно; 3° для любого $x \in G$ и любого компактного множества A из G пересечение $Hx \cap AK$ компактно; 4° для любого $x \in G$ и любого компактного множества A из G пересечение $Kx \cap AH$ компактно. Показать, что если одна из подгрупп H, K является нормальным делителем или если правая и левая равномерные структуры в G совпадают (§ 3, упражнение 3), то эти условия влекут условия пункта а).

12) а) Пусть G — топологическая группа, действующая непрерывно в компактном пространстве E. Предположим, что каждая орбита A по G обладает непустой внутренностью относительно своего замыкания $\overline{A}$. Показать, что существует по крайней мере одна компактная орбита. [Рассмотреть минимальный элемент в множестве компактных подмножеств пространства E, устойчивых относительно G.]

°б) Дать пример локально компактной группы, действующей непрерывно в компактном пространстве, для которой ни одна орбита не является компактной. [§ 2, упражнение 29.]$_\circ$

*13) Пусть G — локально компактная группа и D — такая ее дискретная подгруппа, что однородное пространство G/D компактно. Показать, что для любого $d \in D$ множество всех sds^{-1}, где s пробегает G, замкнуто в G. [Сначала доказать с помощью предло-

жения 10, что в G существует компактное множество K такое, что $G = KD$; использовать еще следствие 1 предложения 1.]

14) а) Пусть G — топологическая группа, действующая непрерывно в топологическом пространстве E, и x_0 — такая точка из E, что $sx_0 = x_0$ для каждого $s \in G$. Показать, что, каковы бы ни были окрестность V точки x_0 и квазикомпактное множество K из G, множество $\bigcap\limits_{s \in K} sV$ есть окрестность точки x_0.

б) Вывести из а), что если G — локально компактная группа, V — окрестность нейтрального элемента e и K — компактное множество в G, то множество $\bigcap\limits_{s \in K} sVs^{-1}$ есть окрестность e.

*15) Пусть G — локально компактная группа и G_0 — связная компонента нейтрального элемента e в G. Предположим, что факторгруппа G/G_0 *компактна*.

а) Показать, что G счетна в бесконечности. [Заметить, что это имеет место для G_0, и использовать предложение 10.]

б) Пусть (U_n) — убывающая последовательность окрестностей e в G. Показать, что существует нормальный делитель K группы G, содержащийся в пересечении всех U_n и такой, что нейтральный элемент факторгруппы G/K обладает счетной фундаментальной системой окрестностей. [Существует такая симметричная компактная окрестность V_0 элемента e в G, что $G = V_0G_0$. Определить по индукции такую последовательность симметричных компактных окрестностей V_n элемента e, что $V_n^2 \subset V_{n-1} \cap U_n$ и $xV_nx^{-1} \subset V_{n-1}$ для всех $x \in V_0$ [упражнение 14б]; показать, что пересечение K всех V_n отвечает требованиям задачи.]

в) Пусть E — локально компактное пространство, обладающее счетным базисом, и G действует непрерывно в E таким образом, что не существует ни одного $s \neq e$ в G, для которого бы $sx = x$ при всех $x \in E$. Показать, что нейтральный элемент группы G обладает счетной фундаментальной системой окрестностей. [Пусть (W_n) — базис топологии в E, состоящий из относительно компактных множеств; для любой пары целых чисел (m, n) такой, что $\overline{W}_m \subset W_n$, обозначим через U_{mn} множество тех $s \in G$, для которых $s\overline{W}_m \subset W_n$; показать, что все U_{mn} открыты в G, и применить результат пункта б).]

16) Пусть G — связная локально компактная группа, K — ее компактный нормальный делитель и N — замкнутый нормальный делитель *группы* K, обладающий тем свойством, что K/N не имеет сколь угодно малых подгрупп (§ 2, упражнение 30). Показать, что в этом случае N есть нормальный делитель *группы* G. [Предположение относительно K/N влечет существование в G такой компактной окрестности U нейтрального элемента e, что $xNx^{-1} \subset N$ для всех $x \in U$.]

*17) Пусть G — локально компактная группа, не имеющая сколь угодно малых подгрупп (§ 2, упражнение 30).

а) Показать, что всякая точка из G обладает счетной фундаментальной системой окрестностей [упражнение 15б].

б) Существует такая компактная окрестность V нейтрального элемента e, что для любых двух ее точек x, y отношение $x^2 = y^2$ влечет $x = y$. [Можно предположить, что G не коммутативна. Рассуждая от противного, придем к существованию двух последовательностей (x_n), (y_n) точек из G, стремящихся к e и таких, что $x_n^2 = y_n^2$, а $x_n y_n^{-1} = a_n \neq e$. Пусть U — компактная окрестность e, не содержащая ни одной подгруппы группы G, отличной от $\{e\}$, и p_n — наименьшее целое $p > 0$, для которого $a_n^{p+1} \notin U$; показать, переходя в случае надобности к подпоследовательности, что можно считать, что $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n^{p_n}$ существует, $\neq e$ и принадлежит U. Показать, что $a^{-1} = a$ и получить так противоречие.]

в) Пусть U — симметричная компактная окрестность e, не содержащая ни одной подгруппы, отличной от $\{e\}$, и V — какая-либо окрестность e. Показать, что существует число $c(V) > 0$, обладающее тем свойством, что для любой пары целых чисел $p > 0$, $q > 0$ таких, что $p \leqslant c(V)\, q$, и любого элемента $x \in G$ такого, что $x, x^2, \ldots, x^q$ принадлежат U, имеем $x^p \in V$. [Рассуждать от противного, предположив, что существуют две последовательности целых чисел (p_n), (q_n) такие, что $\lim (p_n/q_n) = 0$, и для любого n элемент $a_n \in G$ такой, что $a_n^h \in U$, если $1 \leqslant h \leqslant q_n$, но $a_n^{p_n} \notin V$; кроме того, можно предположить, что последовательность $(a_n^{p_n})$ имеет предел $a \neq e$, принадлежащий U. Показать, что тогда $a^m \in U$ для каждого целого $m > 0$, и вывести отсюда противоречие.]

18) Пусть G — вполне несвязная локально компактная группа, левая и правая равномерные структуры которой совпадают. Показать, что всякая окрестность нейтрального элемента e в G содержит открытый компактный *нормальный делитель* группы G. [Использовать упражнение 3 § 3 и следствие 1 предложения 14.]

*19) Пусть G — локально компактная группа, G_0 — связная компонента ее нейтрального элемента e и H — замкнутая подгруппа группы G. Показать, что если однородное пространство G/H локально связно, то G_0H открыто в G. [Пусть H_0 — связная компонента e в H; существует подгруппа L группы H, открытая в H и такая, что L/H_0 компактно (следствие 1 предложения 14); используя следствие 1 предложения 1, показать, что LG_0 замкнуто в G; с другой стороны, рассматривая канонический образ G_0 в G/L и используя следствие 3 предложения 14 и локальную связность факторпространства локально связного пространства (гл. I, § 11, предложение 12), показать, что LG_0 открыто в G.]

°20) Пусть φ — канонический гомоморфизм $\mathbf{R} \to \mathbf{T}$ и θ — иррациональное число. Определим в топологическом пространстве $G =$

$= \mathbf{R}^2 \times \mathbf{T}^2$ групповой закон, положив

$$(x_1, x_2, t_1, t_2)(x_1', x_2', t_1', t_2') = \\ = (x_1 + x_1', x_2 + x_2', t_1 + t_1' + \varphi(x_2 x_1'), t_2 + t_2' + \varphi(\theta x_2 x_1')).$$

Этим определится в G структура локально компактной группы (даже группы Ли). Показать, что коммутант группы G не замкнут.

*21) Пусть M — компактное пространство, наделенное структурой моноида такой, что: 1° отображение $(x, y) \mapsto xy$ произведения $M \times M$ в M непрерывно; 2° для каждого $a \in M$ отношение $ax = ay$ влечет $x = y$.

а) Показать, что если F — замкнутое множество в M и x — такой элемент из M, что $xF \subset F$, то $xF = F$. [Пусть y — предельная точка последовательности $(x^n)_{n \geqslant 1}$ в M; показать, что $yF = \bigcap_{n \geqslant 1} x^n F$, и вывести отсюда, что $yxF = yF$.]

б) Вывести из а), что если, кроме того, для каждого $a \in M$ отношение $xa = ya$ влечет $x = y$, то M есть компактная топологическая группа. [Сначала показать существование нейтрального элемента e; чтобы убедиться в непрерывности отображения $x \mapsto x^{-1}$, рассуждать от противного, рассматривая ультрафильтр в M, сходящийся к e.]

*22) а) Показать, что в отделимой топологической группе G всякое устойчивое множество S, которое компактно или открыто и относительно компактно, является подгруппой. [Использовать предыдущее упражнение 21, а также упражнение 28а § 2]. Вывести отсюда, что компактная коммутативная группа радикальна (§ 2, упражнение 28г).

б) Вывести из а), что в компактной группе K всякое локально компактное устойчивое множество является подгруппой.

в) Пусть G — отделимая топологическая группа и S — замкнутое устойчивое множество в G такое, что в G существует предкомпактное относительно правой равномерной структуры множество K, для которого $SK = G$. Показать, что S — подгруппа группы G. [Отправляясь от заданного элемента $s \in S$, определить индуктивно последовательности элементов $x_i \in K$ и $s_i \in S$ так, чтобы $s^{-1}x_i = s_{i+1}x_{i+1}$; заметить, что $s^{-1}x_i x_j^{-1} \in S$ при $i < j$ и что в G для любой окрестности V нейтрального элемента e существует такая пара элементов x_i, x_j, что $i < j$ и $x_i x_j^{-1} \in V$.]

23) Пусть p — простое число, (G_n) — бесконечная последовательность топологических групп, совпадающих с дискретной группой $\mathbf{Z}/(p^2)$, и H_n — подгруппа $(p)/(p^2)$ группы G_n. Пусть G — локальное прямое произведение групп G_n относительно подгрупп H_n (§ 2, упражнение 26); G — локально компактная, но не компактная группа. Показать, что непрерывное представление u: $x \to px$ группы G в себя не является строгим морфизмом G на $u(G)$ и что $u(G)$ не замкнуто в G.

§ 5. Бесконечные суммы в коммутативных группах

1. Суммируемые семейства в коммутативной группе

В этом параграфе рассматриваются только *отделимые коммутативные топологические группы* с законом композиции, записываемым *аддитивно*; перевод на мультипликативную запись будет дан только для самых важных результатов.

Пусть G — отделимая коммутативная группа, I — произвольное множество индексов, $(x_\iota)_{\iota \in I}$ — семейство точек из G с множеством индексов I. Каждому *конечному* подмножеству J множества I мы сопоставим элемент $s_J = \sum\limits_{\iota \in J} x_\iota$ из G — будем называть его *конечной частичной суммой семейства* $(x_\iota)_{\iota \in I}$, соответствующей множеству J,— который был определен в Алгебре (Алг., гл. I, § 1, n° 5; напомним, что по условию $\sum\limits_{\iota \in \varnothing} x_\iota = 0$). Этим определено отображение $J \mapsto s_J$ *множества* $\mathfrak{F}(I)$ *всех конечных подмножеств* множества I в G. Но множество $\mathfrak{F}(I)$, упорядоченное отношением $\subset$, есть множество, *фильтрующееся* по этому отношению (Теор. мн., гл. III, § 1, n° 10); в самом деле, для любых двух элементов J и J' из $\mathfrak{F}(I)$ имеем $J \subset J \cup J'$ и $J' \subset J \cup J'$, где $J \cup J'$ снова конечное подмножество множества I. Пусть Φ — *фильтр сечений* фильтрующегося множества $\mathfrak{F}(I)$.

Определение 1. *Пусть $(x_\iota)_{\iota \in I}$ — семейство точек отделимой коммутативной топологической группы G, $\mathfrak{F}(I)$ — множество всех конечных подмножеств множества индексов I и s_J для каждого $J \in \mathfrak{F}(I)$ — сумма тех x_ι, для которых $\iota \in J$. Семейство $(x_\iota)_{\iota \in I}$ называется суммируемым, если отображение $J \mapsto s_J$ имеет предел по фильтру Φ сечений множества $\mathfrak{F}(I)$, упорядоченного отношением $\subset$; этот предел называется тогда суммой семейства $(x_\iota)_{\iota \in I}$ и обозначается $\sum\limits_{\iota \in I} x_\iota$* (или просто $\sum\limits_{\iota} x_\iota$ и даже $\sum x_\iota$, если это не может повлечь недоразумения).

Определение 1 равносильно следующему: *семейство (x_ι) суммируемо и имеет сумму s, если для любой окрестности V начала в G существует такое конечное множество $J_0 \subset I$, что $s_J \in s + V$ для всех конечных множеств $J \supset J_0$ из I.*

Если композиция в G записывается *мультипликативно*, то семейство (x_ι) называется *перемножаемым*, если отображение $J \longmapsto p_J$, где $p_J = \prod_{\iota \in J} x_\iota$, имеет предел по фильтру Φ; этот предел называют *произведением* семейства (x_ι) и обозначают $\prod_{\iota \in I} x_\iota$.

Замечания. 1) Когда I *конечно*, определение 1 вновь приводит к обычному определению суммы конечного семейства. Более общим образом, если I произвольно, а $x_\iota = 0$ для всех индексов ι, не принадлежащих некоторому *конечному* множеству $J \subset I$, то сумма $\sum_{\iota \in I} x_\iota$ равна $\sum_{\iota \in J} x_\iota$ и совпадает, таким образом, с суммой, определенной для этого случая в Алгебре (Алг., гл. II, § 1, n° 5).

2) Определение суммируемого семейства не предполагает никакого отношения *порядка* в множестве индексов I; поэтому можно сказать, что так определенное понятие суммы *коммутативно*. Говоря точнее, имеет место следующее свойство: пусть $(x_\iota)_{\iota \in I}$ — суммируемое семейство и φ — биективное отображение множества индексов K на множество I; тогда семейство $(y_\varkappa)_{\varkappa \in K}$, где $y_\varkappa = x_{\varphi(\varkappa)}$, суммируемо и имеет ту же сумму, что и (x_ι). Действительно, если $s = \sum_{\iota \in I} x_\iota$ и $\sum_{\iota \in J} x_\iota \in s + V$ для всякого конечного множества $J \subset I$, содержащего J_0, то $\sum_{\varkappa \in L} y_\varkappa \in s + V$ для всякого конечного множества $L \subset K$, содержащего $\overset{-1}{\varphi}(J_0)$.

3) Более общим образом, определение 1 применимо ко всякому семейству точек *отделимого топологического пространства* E, в котором определен аддитивно записываемый *ассоциативный и коммутативный закон композиции*; в самом деле, это определение 1 не опирается на аксиомы топологических групп.

2. *Критерий Коши*

Пусть $(x_\iota)_{\iota \in I}$ — суммируемое семейство в G; для любой окрестности V начала существует такое конечное множество $J_0 \subset I$, что $s_K \in V$, каково бы ни было конечное множество $K \subset I$, *не пересекающееся с* J_0; в самом деле, $J = J_0 \cup K$ есть произвольное конечное подмножество в I, содержащее J_0; пусть $s = \sum_{\iota \in I} x_\iota$,

а W — симметричная окрестность начала, для которой $W + W \subset V$; по определению 1 можно выбрать J_0 так, чтобы $s_J \in s + W$ и $s_{J_0} \in s + W$, откуда $s_K = s_J - s_{J_0} \in W + W \subset V$.

Обратно, предположим, что семейство (x_ι) обладает этим свойством; тогда образ фильтра Φ при отображении $J \mapsto s_J$ есть *базис фильтра Коши* в G; действительно, пусть J — конечное подмножество в I, содержащее J_0, и $K = J \cap \complement J_0$; тогда $K \cap J_0 = \varnothing$ и $s_K = s_J - s_{J_0}$, откуда $s_J \in s_{J_0} + V$; следовательно, для любого конечного $J' \subset I$, содержащего J_0, имеем $s_J - s_{J'} \in V + V$, и утверждение доказано. Итак:

Теорема 1 (критерий Коши). *Для того чтобы семейство $(x_\iota)_{\iota \in I}$ в отделимой коммутативной группе G было суммируемо, необходимо, чтобы для любой окрестности V начала существовало конечное множество $J_0 \subset I$ такое, что $\sum_{\iota \in K} x_\iota \in V$, каково бы ни было конечное множество $K \subset I$, не пересекающееся с J_0. Если группа G полна, это необходимое условие является также достаточным.*

Более наглядно можно это выразить, сказав, что при удалении из семейства (x_ι) (достаточно большого) конечного числа членов всякая *конечная частичная сумма* оставшегося подсемейства должна быть *сколь угодно близка к нулю.*

Непосредственным следствием первой части теоремы 1 является следующее предложение:

Предложение 1. *Если семейство (x_ι) суммируемо, то всякая окрестность нуля содержит все x_ι, за исключением некоторого конечного их подсемейства* (другими словами, если I бесконечно, то $\lim x_\iota = 0$ по *фильтру дополнений конечных подмножеств множества I*).

Это *необходимое* условие суммируемости семейства (x_ι) вообще *ни в коей мере не является достаточным*, даже когда G полна; это подтвердится в дальнейшем многочисленными примерами (см. гл. IV, § 7).

Следствие. *Пусть $(x_\iota)_{\iota \in I}$ — суммируемое семейство в коммутативной группе, нейтральный элемент которой обладает счет-*

ной фундаментальной системой окрестностей; тогда множество тех индексов ι, *для которых* $x_\iota \neq 0$, *счетно.*

В самом деле, пусть (V_n) — счетная фундаментальная система окрестностей нуля и H_n — множество тех индексов ι, для которых $x_\iota \notin V_n$; множество H тех индексов ι, для которых $x_\iota \neq 0$, есть объединение множеств H_n, а каждое H_n *конечно* по предложению 1.

Это следствие вообще теряет силу, если не предполагать, что начало обладает счетной фундаментальной системой окрестностей. Рассмотрим, например, произведение $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ групп $\mathbf{R}$ (аддитивную группу всех числовых функций вещественной переменной, наделенную топологией *простой* сходимости (см. гл. X, 2-е изд., § 1, n° 3)), и пусть f_a — такой элемент из $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$, что $f_a(a) = 1$ и $f_a(x) = 0$ при $x \neq a$; семейство $(f_a)_{a \in \mathbf{R}}$ суммируемо и имеет суммой функцию, равную 1 во всех точках из $\mathbf{R}$.

Замечание. Если композиция в G записывается мультипликативно, то критерий Коши выражается следующим образом: для того чтобы семейство $(x_\iota)_{\iota \in I}$ было перемножаемо, необходимо, чтобы для любой окрестности V единицы существовало конечное множество $J_0 \subset I$ такое, что $\prod_{\iota \in K} x_\iota \in V$, каково бы ни было конечное множество $K \subset I$, не пересекающееся с J_0; если G полна, то это условие достаточно. Отсюда вытекает, что если I бесконечно и (x_ι) перемножаемо, то $\lim x_\iota = 1$ по фильтру дополнений конечных подмножеств множества I; если, кроме того, единица обладает счетной фундаментальной системой окрестностей, то множество тех индексов ι, для которых $x_\iota \neq 1$, счетно.

3. *Частичные суммы. Ассоциативность*

Предложение 2. *В полной группе G всякое подсемейство суммируемого семейства суммируемо.*

В самом деле, поскольку критерий Коши выполняется для семейства $(x_\iota)_{\iota \in I}$, он тривиальным образом выполняется и для любого подсемейства.

Если $(x_\iota)_{\iota \in I}$ суммируемо, то сумма $\sum_{\iota \in J} x_\iota$ определена тем самым для любого (конечного или бесконечного) подмножества J множества I; она также называется *частичной суммой* семейства (x_ι), соответствующей подмножеству J множества индексов. Множество

всех частичных сумм суммируемого семейства, очевидно, содержится в *замыкании* множества всех *конечных* частичных сумм.

Теорема 2 (*ассоциативность* суммы). *Пусть* $(x_\iota)_{\iota\in I}$ — *суммируемое семейство в полной группе* G *и* $(I_\lambda)_{\lambda\in L}$ — *произвольное разбиение множества* I; *положим* $s_\lambda=\sum\limits_{\iota\in I_\lambda} x_\iota$. *Семейство* $(s_\lambda)_{\lambda\in L}$ *суммируемо и имеет ту же сумму, что и семейство* $(x_\iota)_{\iota\in I}$.

Нагляднее это можно выразить, сказав, что если в полной группе дано суммируемое семейство, то его члены можно произвольным образом *сочетать* в подсемейства, причем суммы этих подсемейств образуют снова суммируемое семейство, сумма которого равна сумме данного семейства.

Положим $s=\sum\limits_{\iota\in I} x_\iota$, и пусть V — произвольная *замкнутая* окрестность нуля в G; существует конечное множество $J_0\subset I$ такое, что $\sum\limits_{\iota\in J} x_\iota\in s+V$, каково бы ни было конечное множество $J\subset I$, содержащее J_0. Пусть K_0 — подмножество множества L, состоящее из тех индексов λ, для которых $J_\lambda=I_\lambda\cap J_0$ *не пусто*; K_0, очевидно, конечно. Пусть K — произвольное конечное подмножество множества L, содержащее K_0; мы покажем, что $\sum\limits_{\lambda\in K} s_\lambda\in s+V$, чем справедливость теоремы и будет установлена. Но s_λ весьма близко к некоторой конечной частичной сумме семейства (x_ι), все члены которой отмечены индексами из I_λ; точно говоря, при заданной симметричной окрестности нуля W для каждого $\lambda\in K$ существует конечное множество $H_\lambda\subset I_\lambda$, *содержащее* J_λ и такое, что $s_\lambda-\sum\limits_{\iota\in H_\lambda} x_\iota\in W$. Тогда $J=\bigcup\limits_{\lambda\in K} H_\lambda$ будет конечным подмножеством множества I, содержащим J_0, и

$$\sum_{\iota\in J} x_\iota=\sum_{\iota\in\bigcup\limits_{\lambda\in K} H_\lambda} x_\iota=\sum_{\lambda\in K}\Big(\sum_{\iota\in H_\lambda} x_\iota\Big)$$

вследствие ассоциативности конечной суммы (Алг., гл. I, § 1, n° 3). В силу выбора J_0 и H_λ имеем поэтому

$$\sum_{\lambda\in K} s_\lambda\in s+V+nW,$$

где n — число элементов множества K; так как это справедливо для любого W, то также $\sum\limits_{\lambda \in K} s_\lambda \in s + V$, ибо V, будучи замкнутым, является пересечением своих окрестностей $V + nW$ (§ 3, n° 1, формула (1)). Тем самым теорема доказана.

Таким образом, нами установлена *формула ассоциативности* суммы

$$\sum_{\lambda \in L} \Big(\sum_{\iota \in I_\lambda} x_\iota \Big) = \sum_{\iota \in \bigcup\limits_{\lambda \in L} I_\lambda} x_\iota, \tag{1}$$

справедливая в случае, когда семейство (I_λ) есть *разбиение* своего объединения и *правая* часть определена. В частности, когда множество индексов есть *произведение* $I = L \times M$, а «двойное» семейство $(x_{\lambda\mu})_{(\lambda,\, \mu) \in L \times M}$ *суммируемо*, имеем *формулу перемены порядка суммирования*

$$\sum_{(\lambda,\, \mu) \in L \times M} x_{\lambda\mu} = \sum_{\lambda \in L} \Big(\sum_{\mu \in M} x_{\lambda\mu} \Big) = \sum_{\mu \in M} \Big(\sum_{\lambda \in L} x_{\lambda\mu} \Big). \tag{2}$$

Следует заметить, что *левая часть* формулы (1) может иметь смысл и в том случае, когда правая часть не определена. Пусть, например, $I = L \times \{1, 2\}$ (где L бесконечно), а I_λ состоит из двух элементов $(\lambda, 1)$ и $(\lambda, 2)$; если положить $x_{\lambda, 1} = a$ и $x_{\lambda, 2} = -a$, где a — ненулевой элемент из G, то все частичные суммы, соответствующие множествам I_λ, равны нулю и, следовательно, левая часть формулы (1) определена и равна нулю, тогда как правая часть (1) не имеет смысла, как это показывает предложение 1.

Точно так же левая часть формулы (2) может не быть определена, а каждая из следующих частей иметь смысл, причем представляемые ими элементы группы G не будут обязательно равны друг другу (см. гл. IV, § 7, упражнение 17).

Нагляднее можно выразить это, сказав, что если всегда возможно произвольно «сочетать» члены суммы, то, напротив, нельзя «разъединять» на их элементы те члены суммы, которые сами представлены в виде сумм. Однако эта операция законна, если «разъединяемых» членов *конечное* число. В самом деле:

Предложение 3. *Пусть $(x_\iota)_{\iota \in I}$ — семейство точек группы G и $(I_\lambda)_{\lambda \in L}$ — конечное разбиение множества индексов I; если каждое из подсемейств $(x_\iota)_{\iota \in I_\lambda}$ суммируемо, то семейство $(x_\iota)_{\iota \in I}$ суммируемо и имеет место формула* (1).

Достаточно провести доказательство для случая, когда $L=\{1, 2\}$; общий случай получится затем индукцией по числу элементов множества L. Положим $s_1=\sum\limits_{\iota\in I_1} x_\iota$, $s_2=\sum\limits_{\iota\in I_2} x_\iota$; для любой окрестности V начала существует конечное множество $J_1\subset I_1$ (соотв. $J_2\subset I_2$) такое, что $\sum\limits_{\iota\in H_1} x_\iota\in s_1+V$ (соотв. $\sum\limits_{\iota\in H_2} x_\iota\in s_2+V$), каково бы ни было конечное множество $H_1\subset I_1$ (соотв. $H_2\subset I_2$), содержащее J_1 (соотв. J_2). Отсюда следует, что $\sum\limits_{\iota\in H} x_\iota\in s_1+s_2+V+V$ для любого конечного множества $H\subset I$, содержащего $J_0=J_1\cup J_2$, и предложение доказано.

4. *Суммируемые семейства в произведении групп*

Предложение 4. *Пусть $G=\prod\limits_{\lambda\in L} G_\lambda$ — произведение семейства отделимых коммутативных групп. Для того чтобы семейство $(x_\iota)_{\iota\in I}$ точек из G было суммируемо, необходимо и достаточно, чтобы семейство $\mathrm{pr}_\lambda(x_\iota)_{\iota\in I}$ было суммируемо при любом $\lambda\in L$; при этом, если s_λ — его сумма, то $s=(s_\lambda)$ есть сумма семейства (x_ι).*

В самом деле, поскольку для любого конечного множества $J\subset I$ имеем $\mathrm{pr}_\lambda\left(\sum\limits_{\iota\in J} x_\iota\right)=\sum\limits_{\iota\in J}\mathrm{pr}_\lambda x_\iota$, справедливость предложения сразу следует из условия сходимости по фильтру для функции со значениями в произведении пространств (гл. I, § 7, следствие 1 предложения 10).

5. *Образ суммируемого семейства при непрерывном отображении*

Предложение 5. *Пусть f — непрерывное представление коммутативной группы G в коммутативную группу G'. Если (x_ι) — суммируемое семейство в G, то $(f(x_\iota))$ — суммируемое семейство в G', причем*

$$\sum f(x_\iota)=f\left(\sum x_\iota\right). \tag{3}$$

В самом деле, для любого конечного подмножества J множества индексов имеем $f\left(\sum\limits_{\iota\in J} x_\iota\right)=\sum\limits_{\iota\in J} f(x_\iota)$, а образ сходящегося базиса фильтра при отображении f есть сходящийся базис фильтра (гл. I, § 7, следствие 1 предложения 9).

Предложение 6. *Пусть* (x_ι) *и* (y_ι) — *суммируемые семейства в группе* G *с одним и тем же множеством индексов; семейства* $(-x_\iota)$, (nx_ι) $(n \in \mathbf{Z})$ *и* $(x_\iota + y_\iota)$ *суммируемы, причем*

$$\sum(-x_\iota) = -\sum x_\iota, \tag{4}$$

$$\sum(nx_\iota) = n\sum x_\iota, \tag{5}$$

$$\sum(x_\iota + y_\iota) = \sum x_\iota + \sum y_\iota. \tag{6}$$

В самом деле, $x \mapsto -x$ и $x \mapsto nx$ суть непрерывные представления G в G; с другой стороны, если (x_ι) и (y_ι) суммируемы, то семейство $((x_\iota, y_\iota))$ суммируемо в $G \times G$, и так как $(x, y) \mapsto x + y$ есть непрерывное представление $G \times G$ в G, то получаем (6).

Замечание. Предложения 4 и 5 применимы также в отмеченном выше случае суммируемых семейств в топологическом пространстве E, наделенном коммутативным и ассоциативным законом композиции; то же верно для предложения 3 и формулы (6), если предположить, кроме того, что $x + y$ непрерывно на $E \times E$.

6. *Ряды*

Рассмотрим в аддитивно записываемой отделимой коммутативной топологической группе G последовательность точек $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ и сопоставим ей последовательность *частичных сумм* $s_n = \sum_{p=0}^{n} x_p$ $(n \in \mathbf{N})$; $(x_n) \mapsto (s_n)$ есть *биективное* отображение множества $G^{\mathbf{N}}$ всех последовательностей (x_n) точек из G на себя, ибо последовательность (x_n) определяется по заданной последовательности (s_n) соотношениями $x_0 = s_0$, $x_n = s_n - s_{n-1}$ $(n \geqslant 1)$.

Рядом, определяемым последовательностью (x_n), или *рядом с общим членом* x_n (или, допуская вольность речи, просто *рядом* (x_n), если это не может повести к недоразумению) называют *пару* последовательностей (x_n) и (s_n), связанных указанными соотношениями. Ряд, определяемый последовательностью (x_n), называют *сходящимся*, если последовательность (s_n) сходящаяся; предел этой последовательности называется *суммой ряда* и обозначается $\mathop{\mathsf{S}}_{n=0}^{\infty} x_n$ (или, допуская вольность в обозначениях, $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$).

Сходящийся ряд с общим членом x_n мы иногда, допуская вольность речи, позволяем себе называть «рядом $\mathop{\mathsf{S}}\limits_{n=0}^{\infty} x_n$» или также «рядом $x_0 + x_1 + \cdots + x_n + \cdots$».

Для того, чтобы ряд с общим членом x_n был сходящимся, *необходимо*, чтобы последовательность (s_n) была *последовательностью Коши*, т. е. чтобы для любой окрестности V начала из G существовало целое n такое, что

$$s_{n+p} - s_n = \sum_{i=n+1}^{n+p} x_i \in V,$$

каковы бы ни были целые $n \geqslant n_0$ и $p > 0$. Если G *полна*, то это условие также *достаточно* (*критерий Коши для рядов*).

Если ряд с общим членом x_n сходится, то, в частности, $\lim\limits_{n\to\infty} (s_n - s_{n-1}) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$; но это *необходимое* условие сходимости ни в коей мере не является вообще достаточным, даже если G полна (см. гл. IV, § 7).

Предложение 7. *Если ряды, определяемые последовательностями (x_n) и (y_n), сходятся, то сходятся также ряды, определяемые последовательностями $(-x_n)$ и $(x_n + y_n)$, причем*

$$\mathop{\mathsf{S}}\limits_{n=0}^{\infty} (-x_n) = -\mathop{\mathsf{S}}\limits_{n=0}^{\infty} x_n, \tag{7}$$

$$\mathop{\mathsf{S}}\limits_{n=0}^{\infty} (x_n + y_n) = \mathop{\mathsf{S}}\limits_{n=0}^{\infty} x_n + \mathop{\mathsf{S}}\limits_{n=0}^{\infty} y_n. \tag{8}$$

Это — очевидное следствие непрерывности $-x$ на G и $x + y$ на $G \times G$.

Следствие. *Если (x_n) и (y_n) — две последовательности точек из G таких, что $x_n \neq y_n$ лишь для конечного числа индексов, и ряд с общим членом x_n сходится, то сходится и ряд с общим членом y_n.*

В самом деле, все члены ряда, определяемого последовательностью $(x_n - y_n)$, начиная с некоторого места, равны нулю.

Это следствие выражают еще, говоря, что *сходящийся ряд остается сходящимся при произвольном изменении конечного числа его членов.*

В частности, если $y_n = 0$ при $n < m$ и $y_n = x_n$ при $n \geqslant m$, то ряд с общим членом y_n сходится в том и только том случае, когда

сходится ряд с общим членом x_n; сумму первого ряда обозначают $\mathop{\mathsf{S}}\limits_{n=m}^{\infty} x_n$ и называют m-м *остатком* ряда (x_n); поскольку $\mathop{\mathsf{S}}\limits_{n=m}^{\infty} x_n = \mathop{\mathsf{S}}\limits_{n=0}^{\infty} x_n - s_{m-1}$, m-й остаток сходящегося ряда *стремится к нулю* при неограниченном увеличении m.

Если последовательность $(x_n)_{n \in I}$ имеет своим множеством индексов бесконечное подмножество I множества $\mathbf{N}$ и φ — *строго возрастающее биективное отображение* $\mathbf{N}$ на I, то ряд, определяемый последовательностью $(x_{\varphi(n)})_{n \in \mathbf{N}}$, называют также, допуская вольность речи, *рядом*, определяемым последовательностью $(x_n)_{n \in I}$; если этот ряд сходится, то его сумма обозначается $\mathop{\mathsf{S}}\limits_{n \in I} x_n$. Непосредственно проверяется, что этот ряд сходится одновременно с рядом, общий член которого z_n равен x_n, если $n \in I$, и равен 0, если $n \in \complement I$.

Важно отметить, что ряд, определяемый последовательностью $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$, может сходиться и вместе с тем среди бесконечных множеств $I \subset \mathbf{N}$ могут существовать такие, для которых ряд, определяемый частичной последовательностью $(x_n)_{n \in I}$, *не является сходящимся* (см. упражнение 5 и гл. IV, § 7).

Предложения 4 и 5 также распространяются на ряды; мы предоставляем читателю дать соответствующие формулировки.

Предложение 8 (*ограниченная ассоциативность* рядов). *Пусть (k_n) — строго возрастающая последовательность целых чисел $\geqslant 0$; если ряд с общим членом x_n сходится, то и ряд с общим членом $u_n = \sum\limits_{p=k_{n-1}}^{k_n - 1} x_p$ сходится, причем $\mathop{\mathsf{S}}\limits_{n=0}^{\infty} u_n = \mathop{\mathsf{S}}\limits_{n=0}^{\infty} x_n$.*

В самом деле, последовательность частичных сумм ряда (u_n) есть не что иное, как *подпоследовательность* $(s_{k_n - 1})$ последовательности (s_n) частичных сумм ряда (x_n).

7. Коммутативно сходящиеся ряды

Пусть (x_n) — *суммируемая* последовательность в G и $s = \sum\limits_{n \in \mathbf{N}} x_n$ — ее сумма. Для любой окрестности V элемента s существует такое $J_0 \in \mathfrak{F}(\mathbf{N})$, что $s_J \in s + V$ для всех $J \in \mathfrak{F}(\mathbf{N})$, содержащих J_0; пусть m — наибольшее целое число в J_0; тогда для $n \geqslant m$ имеем $s_n \in s + V$, откуда видим, что *ряд (x_n) сходится*

и имеет сумму s. Но обратное *неверно*: последовательность членов сходящегося ряда вполне может не быть суммируемой (см. гл. IV, § 7).

Кроме того, структура *порядка* в $\mathbf{N}$ существенным образом входит в определение сходимости ряда; если ряд (x_n) сходится и σ — некоторая *перестановка* множества $\mathbf{N}$, то ряд $(x_{\sigma(n)})$ не обязательно сходится (см. гл. IV, § 7, упражнение 15).

Определение 2. *Ряд, определяемый последовательностью* (x_n), *называется коммутативно сходящимся, если ряд, определяемый последовательностью* $(x_{\sigma(n)})$, *сходится для любой перестановки* σ *множества* $\mathbf{N}$.

Предложение 9. *Для того чтобы ряд, определяемый последовательностью* (x_n), *был коммутативно сходящимся, необходимо и достаточно, чтобы последовательность* (x_n) *была суммируемой; для любой перестановки* σ *множества* $\mathbf{N}$ *имеем тогда*

$$\overset{\infty}{\underset{n=0}{\mathsf{S}}}\, x_{\sigma(n)} = \sum_{n \in \mathbf{N}} x_n.$$

Достаточность условия очевидна. Чтобы убедиться в его необходимости, будем рассуждать от противного, предположив, что ряд (x_n) коммутативно сходится, но последовательность (x_n) несуммируема. Тогда образ фильтра Φ при отображении $H \mapsto s_H$ не может быть базисом фильтра Коши в G, ибо иначе фильтр Φ (имеющий по предположению предельную точку) был бы сходящимся (гл. II, § 3, следствие 2 предложения 5). Поэтому имеется такая окрестность V нуля, что для любого конечного множества $J \subset \mathbf{N}$ существует конечное множество $H \subset \mathbf{N}$, не пересекающееся с J и такое, что $\sum_{n \in H} x_n \notin V$. Тогда можно определить по индукции *разбиение* $\mathbf{N}$ на *конечные* подмножества H_k $(k \in \mathbf{N})$ так, чтобы $\sum_{n \in H_k} x_n \notin V$ для бесконечного числа индексов k. Очевидно, существует такая перестановка σ множества $\mathbf{N}$, что при любом k значения n, для которых $\sigma(n) \in H_k$, расположены последовательно. Для этой перестановки ряд с общим членом $x_{\sigma(n)}$ не будет сходящимся, и мы пришли к требуемому противоречию.

Если композиция в G записывается *мультипликативно*, то пару, образованную последовательностью (x_n) точек из G и последовательно-

стью частичных произведений $p_n = \prod_{k=0}^{n} x_k$, называют *бесконечным произведением, определяемым последовательностью* (x_n) (или *бесконечным произведением с общим членом* x_n, или просто *произведением* (x_n), если это не может повести к недоразумению); бесконечное произведение называют *сходящимся*, если последовательность p_n сходится; ее предел обозначается $\mathop{\mathsf{P}}_{n=0}^{\infty} x_n$ (или, допуская вольность обозначений, $\prod_{n=0}^{\infty} x_n$). Мы предоставляем читателю перевести установленные свойства рядов на язык мультипликативных обозначений.

Упражнения

1) Пусть $(x_\iota)_{\iota \in I}$ — суммируемое семейство в полной группе G, а $\mathfrak{S}$ — множество подмножеств из I, фильтрующееся по отношению $\subset$ и образующее покрытие I; показать, что $\sum_{\iota \in I} x_\iota = \lim_J \sum_{\iota \in J} x_\iota$, где предел берется по фильтру сечений множества $\mathfrak{S}$.

2) Пусть G — полная отделимая коммутативная группа, в которой всякая окрестность начала содержит открытую подгруппу (что имеет место, в частности, когда G локально компактна и вполне несвязна; см. § 4, упражнение 18). Для того чтобы семейство $(x_\iota)_{\iota \in I}$ точек из G было суммируемо, необходимо и достаточно, чтобы $\lim x_\iota = 0$ по фильтру дополнений конечных подмножеств множества I. Вывести отсюда, что всякий сходящийся ряд в G сходится коммутативно.

*3) Пусть $(x_\iota)_{\iota \in I}$ — семейство точек отделимой коммутативной группы G, $s_H = \sum_{\iota \in H} x_\iota$ для каждого конечного множества $H \subset I$ и A — множество предельных точек отображения $H \longmapsto s_H$ по фильтрующемуся упорядоченному множеству $\mathfrak{F}(I)$. С другой стороны, пусть $\Phi(J)$ для каждого конечного множества $J \subset I$ означает замыкание множества точек s_H, где H пробегает все конечные подмножества из I, для которых $H \cap J = \varnothing$. Показать, что если $A \neq \varnothing$, то множество $A - A$ (множество всех точек $a - a'$, где $a \in A$, $a' \in A$) совпадает с множеством $B = \bigcap_{J \in \mathfrak{F}(I)} \Phi(J)$. Показать, что всегда $B + B \subset B$. Вывести отсюда, что если A не пусто, то B — замкнутая подгруппа группы G, а A — класс по этой подгруппе.

4) В обозначениях упражнения 3, примем за G дискретную аддитивную группу $\mathbf{Z}$ целых рациональных чисел, а за I — множество $\mathbf{N}$. Дать пример несуммируемой последовательности (x_n), для которой множество A сводилось бы к одной точке 0. [Выбрать x_n так, чтобы всякая конечная частичная сумма, номера членов которой $\geqslant m$, была целым кратным m.]

*5) Пусть (x_n) — последовательность точек отделимой коммутативной группы G. Если ряд, определяемый последовательностью $(x_n)_{n \in I}$, сходится для любого бесконечного множества $I \subset \mathbf{N}$, то последовательность (x_n) суммируема. [Рассуждать от противного, как при доказательстве предложения 9.]

*6) а) Пусть σ — перестановка множества $\mathbf{N}$, а $\varphi(n)$ — наименьшее число интервалов из $\mathbf{N}$, имеющих своим объединением $\sigma([0, n])$. Предположим, что $\varphi(n)$ *ограниченно*, когда n пробегает $\mathbf{N}$; тогда для любого сходящегося ряда (u_n), члены которого принадлежат отделимой коммутативной топологической группе G, ряд $(u_{\sigma(n)})$ сходится и имеет ту же сумму.

°б) Пусть $\varphi(n)$ не ограниченно на $\mathbf{N}$. Построить ряд (u_n) с членами, принадлежащими аддитивной группе $\mathbf{R}$, сходящийся в $\mathbf{R}$, но такой, чтобы ряд $(u_{\sigma(n)})$ не сходился. [Рассмотреть строго возрастающую последовательность целых чисел (m_k), определенную индукцией по k так, чтобы были выполнены следующие условия: 1° $\sigma([0, m_k]) \subset [0, n_{k+1}]$, где $[0, n_k]$ — наибольший интервал из $\mathbf{N}$ с началом 0, содержащийся в $\sigma([0, m_k])$; 2° $\varphi(m_k) \geqslant k+1$. Определить затем надлежащим образом u_n, когда $n_k < n \leqslant n_{k+1}$.] Обобщить на случай, когда все u_n принадлежат полной отделимой коммутативной группе G, порождаемой произвольной окрестностью нуля.$_\circ$

7) Пусть (x_{mn}) — двойная последовательность точек отделимой коммутативной топологической группы G, удовлетворяющая следующим условиям:

1° Ряд, определяемый последовательностью $(x_{mn})_{n \in \mathbf{N}}$, сходится для любого $m \geqslant 0$; пусть y_m — его сумма.

2° Ряд, определяемый последовательностью $(r_{mn})_{m \in \mathbf{N}}$, где $r_{mn} = \mathop{\mathsf{S}}\limits_{p=n}^{\infty} x_{mp}$, сходится для любого $n \geqslant 0$; пусть t_n — его сумма.

Показать, что для любого $n \geqslant 0$ ряд, определяемый последовательностью $(x_{mn})_{m \in \mathbf{N}}$, сходится; пусть z_n — его сумма. Для того чтобы ряд с общим членом y_m имел ту же сумму, что и ряд с общим членом z_n, необходимо и достаточно, чтобы t_n стремилось к 0 при неограниченном возрастании n.

§ 6. Топологические группы с операторами; топологические кольца; топологические тела

1. *Топологические группы с операторами*

Говорят, что в множестве G структура *группы с операторами* (Алг., гл. I, § 6, n° 9) и топология *согласуются*, если согласуются топология и структура группы в G (§ 1, n° 1) и, кроме того, эндоморфизмы, порождаемые в G операторами (Алг., гл. I, § 3, n° 1),

непрерывны. Тогда множество G, наделенное структурой группы с операторами и топологией, называется *топологической группой с операторами*.

Если H есть устойчивая подгруппа топологической группы с операторами G, то топология, индуцируемая в H из G, согласуется со структурой группы с операторами в H. Кроме того:

Предложение 1. *Если H — устойчивая подгруппа топологической группы с операторами G, то и ее замыкание $\overline{H}$ в G есть устойчивая подгруппа в G.*

Мы уже знаем, что $\overline{H}$ есть подгруппа группы G (§ 2, предложение 1); кроме того, для любого оператора α из G образ H при непрерывном отображении $x \longmapsto x^\alpha$ содержится в H, и, следовательно, образ $\overline{H}$ содержится в $\overline{H}$ (гл. I, § 2, теорема 1).

Пусть H — устойчивый нормальный делитель топологической группы с операторами G; для любого оператора α из G отображение G/H в себя, получаемое путем факторизации из отображения $x \longmapsto x^\alpha$, непрерывно (§ 2, n° 8, замечание 3); структура группы с операторами в G/H согласуется, таким образом, с фактортопологией топологии группы G по H.

Пусть $(G_\iota)_{\iota \in I}$ — семейство топологических групп с операторами, причем все G_ι имеют одно и то же множество операторов Ω. Для каждого $\alpha \in \Omega$ отображение $x \longmapsto ((\mathrm{pr}_\iota x)^\alpha)$ произведения $G = \prod_{\iota \in I} G_\iota$ в себя непрерывно (гл. I, § 4, предложение 1); структура группы с операторами в G согласуется, таким образом, с произведением топологий групп G_ι.

Если G — отделимая топологическая группа с операторами, обладающая пополнением $\hat{G}$ (§ 3, n° 4), то всякий ее эндоморфизм $x \longmapsto x^\alpha$, порождаемый оператором из G, продолжается по непрерывности до эндоморфизма группы $\hat{G}$ (§ 3, предложение 5); таким образом, $\hat{G}$ также наделена структурой топологической группы с операторами, с тем же множеством операторов, что и G.

2. *Топологическая прямая сумма устойчивых подгрупп*

Так как изучение коммутативных групп с операторами равносильно изучению модулей (Алг., гл. II, § 7, n° 9), то мы позволим себе использовать при случае свойственную последним терминологию для произвольных коммутативных групп с операторами; так, мы будем говорить о *линейных отображениях* вместо представлений коммутативных групп с операторами и будем называть идемпотентный эндоморфизм коммутативной группы с операторами также *проектором* (Алг., гл. VIII, § 1, n° 1).

Если коммутативная топологическая группа с операторами E (в аддитивной записи) есть прямая сумма *конечного* семейства $(M_i)_{1\leq i\leq n}$ устойчивых подгрупп, то биективное каноническое отображение $(x_i) \mapsto \sum_{i=1}^{n} x_i$ группы $\prod_{i=1}^{n} M_i$ на E *непрерывно*, но *не обязательно есть гомеоморфизм*.

Определение 1. *Пусть E — коммутативная топологическая группа с операторами и $(M_i)_{1\leq i\leq n}$ — конечное семейство ее устойчивых подгрупп такое, что E является их прямой суммой. E называется топологической прямой суммой устойчивых подгрупп M_i, если каноническое отображение $(x_i) \mapsto \sum_{i=1}^{n} x_i$ группы $\prod_{i=1}^{n} M_i$ на E есть гомеоморфизм* (и тем самым изоморфизм топологических групп с операторами).

Предложение 2. *Пусть E — коммутативная топологическая группа с операторами, являющаяся прямой суммой устойчивых подгрупп M_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$, и $(p_i)_{1\leq i\leq n}$ — семейство проекторов, ассоциированное с разложением $E = \sum_{i=1}^{n} M_i$* (Алг., гл. VIII, § 1, n°1). *Для того чтобы E была топологической прямой суммой подгрупп M_i, необходимо и достаточно, чтобы все p_i были непрерывны.*

В самом деле, $x \mapsto (p_i(x))$ есть отображение, обратное к $(x_i) \mapsto \sum_{i=1}^{n} x_i$.

Поскольку $1 = \sum_{i=1}^{n} p_i$, где 1 — тождественное отображение E на себя, непрерывность $n-1$ проекторов p_i влечет непрерывность n-го.

Если E есть топологическая прямая сумма двух устойчивых подгрупп M и N, то говорят еще, что N является *топологическим дополнением* к M в E; для того чтобы это было так, необходимо и достаточно, чтобы каноническое отображение E/M на N (Алг., гл. II, § 1, n° 4) было *изоморфизмом* топологических групп с операторами.

Следствие. *Пусть E — коммутативная топологическая группа с операторами и M — ее устойчивая подгруппа. Следующие условия равносильны:*

а) *M обладает в E топологическим дополнением.*

б) *Существует непрерывный проектор p группы E в себя такой, что $p(E) = M$.*

в) *Тождественное отображение M на себя может быть продолжено до непрерывного линейного отображения E в M.*

Из предложения 2 вытекает, что а) влечет б), и, очевидно, б) влечет в). Наконец, если p — непрерывное линейное отображение E в M, продолжающее тождественное отображение M на себя, то p — непрерывный проектор и проекторы p и $1-p$ ассоциированы с разложением в прямую сумму $E = M + N$, где $N = \overset{-1}{p}(0)$.

Замечания. 1) Чтобы избежать всякого недоразумения, иногда устойчивую подгруппу группы E, дополнительную к M в смысле структуры группы с операторами без топологии, называют *алгебраическим дополнением* к M.

2) Если *отделимая* коммутативная топологическая группа с операторами E есть топологическая прямая сумма семейства $(M_i)_{1 \le i \le n}$ устойчивых подгрупп, то каждая из подгрупп M_i *замкнута* в E, как множество тех $x \in E$, для которых $p_i(x) = x$ (гл. I, § 8, предложение 2).

Предложение 3. *Пусть E и F — коммутативные топологические группы с операторами и u — непрерывное линейное отображение E в F. Для того чтобы существовало непрерывное линейное отображение v группы F в E такое, что $u \circ v$ было бы тожде-*

ственным отображением F на себя (в этом случае говорят, что *u обратимо справа*, а *v — правое обратное* к *u*), *необходимо и достаточно, чтобы u было строгим морфизмом* (§ 2, n° 8) *E на F и $\overset{-1}{u}(0)$ обладало топологическим дополнением в E.*

Условия *необходимы*. В самом деле, тогда $u(v(F))=F$ и тем более $u(E) = F$; кроме того, $p = v \circ u$ есть непрерывное линейное отображение E в себя такое, что $p^2 = p$; поэтому (следствие предложения 2), $p(E) = v(u(E))=v(F)$ обладает в E топологическим дополнением $\overset{-1}{p}(0)$; но так как по предположению $u(p(x))= = u(x)$, то $\overset{-1}{u}(0) = \overset{-1}{p}(0)$. Наконец, биективное отображение $E/\overset{-1}{u}(0)$ на F, ассоциированное с u, есть композиция биективного отображения $E/\overset{-1}{p}(0)$ на $v(F)$, ассоциированного с p, и сужения u на $v(F)$; поскольку v непрерывно, эти два отображения являются изоморфизмами, и, значит, u есть строгий морфизм E на F.

Условия *достаточны*. В самом деле, если φ — канонический гомоморфизм E на $E/\overset{-1}{u}(0)$, то утверждение, что $\overset{-1}{u}(0)$ обладает топологическим дополнением M в E, означает, что сужение φ на M есть изоморфизм M на $E/\overset{-1}{u}(0)$. Так как, с другой стороны, $u = w \circ \varphi$, где w — изоморфизм $E/\overset{-1}{u}(0)$ на F, то заключаем, что сужение u на M есть изоморфизм M на F, и, значит, обратный изоморфизм v таков, что $u \circ v$ есть тождественное отображение F на себя.

Предложение 4. *Пусть E и F — коммутативные топологические группы с операторами и u — непрерывное линейное отображение E в F. Для того чтобы существовало непрерывное линейное отображение v группы F в E такое, что $v \circ u$ было бы тождественным отображением E на себя* (в этом случае говорят, что *u обратимо слева*, а *v — левое обратное* к *u*), *необходимо и достаточно, чтобы u было* (топологическим) *изоморфизмом E на $u(E)$ и $u(E)$ обладало топологическим дополнением в F.*

Условия *достаточны*, ибо при их выполнении левым обратным v к u будет композиция обратного к u изоморфизма $u(E)$ на E и непрерывного проектора F на $u(E)$.

Условия *необходимы*. Действительно, соотношение $v(u(x)) = = x$ показывает, что $\overset{-1}{u}(0)$ сводится к 0; таким образом, u есть

биекция E на $u(E)$, и так как сужение v на $u(E)$ непрерывно, то u есть изоморфизм E на $u(E)$. С другой стороны, $q = u \circ v$ является непрерывным линейным отображением F на $u(E)$ таким, что $q^2 = q$, а это показывает (следствие предложения 2), что $u(E)$ обладает топологическим дополнением в F.

3. *Топологические кольца*

Определение 2. *Топологическим кольцом называют множество A, наделенное структурой кольца и топологией, удовлетворяющими следующим аксиомам:*

($\mathrm{AT_I}$) *Отображение $(x, y) \mapsto x + y$ произведения $A \times A$ в A непрерывно.*

($\mathrm{AT_{II}}$) *Отображение $x \mapsto -x$ пространства A в себя непрерывно.*

($\mathrm{AT_{III}}$) *Отображение $(x, y) \mapsto xy$ произведения $A \times A$ в A непрерывно.*

Первые две аксиомы выражают, что топология в A согласуется с его структурой *аддитивной группы* (§ 1, n° 1).

Говорят, что структура кольца и топология, заданные в множестве A, *согласуются*, если они удовлетворяют аксиомам ($\mathrm{AT_I}$), ($\mathrm{AT_{II}}$) и ($\mathrm{AT_{III}}$).

Примеры. 1) *Дискретная* топология в кольце A согласуется со структурой кольца; топологическое кольцо с дискретной топологией называется *дискретным* кольцом.

°2) Как мы увидим в главе IV, топология рациональной прямой $\mathbf{Q}$ (соотв. числовой прямой $\mathbf{R}$) согласуется со структурой кольца $\mathbf{Q}$ (соотв. $\mathbf{R}$).°

В топологическом кольце всякая левая *гомотетия* $x \mapsto ax$ (соотв. правая гомотетия $x \mapsto xa$) непрерывна (и является гомеоморфизмом, если a обратимо).

Поскольку имеет место тождество

$$xy - x_0y_0 = (x - x_0)(y - y_0) + (x - x_0)y_0 + x_0(y - y_0),$$

аксиома ($\mathrm{AT_{III}}$) (при аксиомах ($\mathrm{AT_I}$) и ($\mathrm{AT_{II}}$)) равносильна совокупности следующих двух аксиом:

($\mathrm{AT_{IIIa}}$) *Каково бы ни было $x_0 \in A$, отображения $x \mapsto x_0x$ и $x \mapsto xx_0$ непрерывны в точке $x = 0$.*

($AT_{III б}$) *Отображение* $(x, y) \mapsto xy$ *произведения* $A \times A$ *в* A *непрерывно в точке* $(0, 0)$.

Отсюда вытекает система необходимых и достаточных условий, которым должен удовлетворять *фильтр* $\mathfrak{V}$ *окрестностей нуля* в кольце A для того, чтобы определяемая им в A топология согласовалась со структурой кольца A: $\mathfrak{V}$ должен удовлетворять аксиомам (GA_I) и (GA_{II}) § 1 и, кроме того, следующим двум аксиомам:

(AV_I) *Каковы бы ни были* $x_0 \in A$ *и* $V \in \mathfrak{V}$, *существует* $W \in \mathfrak{V}$ *такое, что* $x_0W \subset V$ *и* $Wx_0 \subset V$.

(AV_{II}) *Каково бы ни было* $V \in \mathfrak{V}$, *существует* $W \in \mathfrak{V}$ *такое, что* $WW \subset V$.

Замечание. В Анализе часто встречаются кольца, удовлетворяющие аксиомам (AT_I), (AT_{II}) и ($AT_{III а}$), но не удовлетворяющие аксиоме ($AT_{III б}$). °Примером может служить кольцо мер на компактной группе, где мультипликативным законом служит свертка, а топология — широкая (Интегрирование, гл. VIII).$_\circ$

Пример 3) Пусть $\mathfrak{V}$ — *базис фильтра* в кольце A, образованный *двусторонними идеалами*; $\mathfrak{V}$ является фундаментальной системой окрестностей нуля для топологии, согласующейся со структурой аддитивной группы в A; из (AV_I) и (AV_{II}) сразу следует, что эта топология согласуется со структурой *кольца* в A.

Пусть E — топологическое пространство, f и g — его отображения в топологическое кольцо A; если f и g непрерывны в точке $x_0 \in E$, то $f + g$, $-f$ и fg тоже непрерывны в этой точке. Отсюда следует, что непрерывные отображения E в A образуют *подкольцо* кольца A^E всевозможных отображений E в A. Мы видим также, что если A *коммутативно*, то всякий *полином от* n *переменных* с коэффициентами из A, определенный на A^n, *непрерывен* на A^n. Пусть, далее, E — множество, *фильтрующееся* по фильтру $\mathfrak{F}$, а f и g — отображения E в *отделимое* топологическое кольцо A; если $\lim_{\mathfrak{F}} f$ и $\lim_{\mathfrak{F}} g$ существуют, то существуют $\lim_{\mathfrak{F}} (f + g)$, $\lim_{\mathfrak{F}} (-f)$ и $\lim_{\mathfrak{F}} fg$, причем (гл. I, § 7, следствие 1 предложения 9 и § 8, предложение 1)

$$\lim_{\mathfrak{F}} (f+g) = \lim_{\mathfrak{F}} f + \lim_{\mathfrak{F}} g, \tag{1}$$

$$\lim_{\mathfrak{F}} (-f) = -\lim_{\mathfrak{F}} f, \tag{2}$$

$$\lim_{\mathfrak{F}} (fg) = (\lim_{\mathfrak{F}} f)(\lim_{\mathfrak{F}} g). \tag{3}$$

4. *Подкольца. Идеалы. Факторкольца. Произведения колец*

Топология, индуцируемая в подкольце H топологического кольца A топологией из A, согласуется со структурой кольца в H; говорят, что определенная так структура топологического кольца в H *индуцирована* структурой топологического кольца A.

Предложение 5. *Пусть H — всюду плотное подкольцо топологического кольца A и K — подкольцо* (соотв. *левый*, *правый*, *двусторонний идеал*) *кольца H. Его замыкание $\overline{K}$ в A есть подкольцо* (соотв. *левый*, *правый*, *двусторонний идеал*) *кольца A.*

Доказательство то же, что и для предложения 8 § 2; если, например, K — левый идеал в H, то отображение $(z, x) \mapsto zx$, непрерывное на $A \times A$, отображает $H \times K$ в K и, следовательно, $A \times \overline{K} = \overline{H} \times \overline{K}$ в $\overline{K}$.

Пусть H — *двусторонний идеал* в топологическом кольце A; тем же рассуждением, что и для факторгрупп (§ 2, n° 6), убеждаемся в том, что *фактортопология* топологии кольца A по отношению $x - y \in H$ *согласуется* со структурой кольца в A/H. В частности, если A неотделимо, то по предложению 5 замыкание N нуля в A есть *замкнутый двусторонний идеал*; факторкольцо A/N, которое отделимо (§ 2, предложение 13), называется *отделимым кольцом*, *ассоциированным с* A.

Пусть $(A_\iota)_{\iota \in I}$ — семейство топологических колец. В множестве $A = \prod_{\iota \in I} A_\iota$ *произведение топологий* колец A_ι *согласуется* со структурой произведения колец A_ι (то же доказательство, что и для произведений групп); определенное таким образом топологическое кольцо A называется *произведением* топологических колец A_ι.

5. *Пополнение топологического кольца*

Когда идет речь о равномерной структуре топологического кольца A, всегда имеется в виду, если не оговорено противное, равномерная структура его *аддитивной группы*; в частности, кольцо A называется *полным*, если полна его аддитивная группа.

Пусть A — *отделимое* топологическое кольцо; наделенное своей структурой аддитивной группы, оно может рассматриваться как всюду плотная подгруппа *полной отделимой коммутативной группы* $\hat{A}$, определенной с точностью до изоморфизма (§ 3, теорема 2). Для того чтобы A можно было рассматривать как *подкольцо полного кольца*, необходимо, чтобы функция xy могла быть *продолжена по непрерывности* на пространство $\hat{A} \times \hat{A}$. Возможность такого продолжения вытекает из следующей более общей теоремы:

Теорема 1. *Пусть E, F, G— полные отделимые коммутативные топологические группы, A— всюду плотная подгруппа группы E, B—всюду плотная подгруппа группы F. Всякое непрерывное $\mathbf{Z}$-билинейное* *) *отображение f произведения $A \times B$ в G может быть продолжено по непрерывности до непрерывного $\mathbf{Z}$-билинейного отображения $E \times F$ в G.*

Пусть (x_0, y_0) — произвольная точка из $E \times F$, а $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{V}$ — следы на A и B фильтров окрестностей точек x_0 и y_0 ($\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{V}$ — фильтры в силу предположения); чтобы показать возможность продолжения f по непрерывности, достаточно убедиться в том, что $f(\mathfrak{U} \times \mathfrak{V})$ есть *базис фильтра Коши* в G (гл. II, § 3, предложение 11). Будем исходить из тождества

$$f(x', y') - f(x, y) = f(x' - x, y_1) + f(x_1, y' - y) + \\ + f(x' - x, y' - y_1) + f(x - x_1, y' - y).$$

Мы покажем, что, беря (x, y) и (x', y') в достаточно малом множестве из $\mathfrak{U} \times \mathfrak{V}$ и выбирая надлежащим образом x_1 и y_1, можно сделать каждый из членов правой части сколь угодно малым. Пусть W — произвольная окрестность нуля в G; поскольку f непрерывно в точке $(0, 0)$ произведения $A \times B$, существуют множества $U \in \mathfrak{U}$ и $V \in \mathfrak{V}$ такие, что $f(x' - x, y' - y) \in W$ для всех $x \in U$, $x' \in U$, $y \in V$, $y' \in V$. Примем за x_1 какую-нибудь точку из U и за y_1 какую-нибудь точку из V; тогда для любых x, x' из U и y, y' из V будем иметь

$$f(x' - x, y' - y_1) + f(x - x_1, y' - y) \in W + W.$$

---

*) Напомним (Алг., гл. III, § 1, n° 1), что f называется $\mathbf{Z}$-билинейным, если $f(x + x', y) = f(x, y) + f(x', y)$ и $f(x, y + y') = f(x, y) + f(x, y')$ для любых элементов x, x' из A и y, y' из B.

С другой стороны, отображение $x \mapsto f(x, y_1)$ непрерывно на A, и потому существует множество $U' \subset U$, принадлежащее $\mathfrak{U}$ и такое, что $f(x' - x, y_1) \in W$ при любых $x \in U'$ и $x' \in U'$. Точно так же в $\mathfrak{V}$ существует такое $V' \subset V$, что $f(x_1, y' - y) \in W$ при любых $y \in V'$ и $y' \in V'$. Следовательно, для произвольных двух точек (x, y) и (x', y') из $U' \times V'$ будем иметь

$$f(x', y') - f(x, y) \in W + W + W + W,$$

чем доказано существование продолжения $\overline{f}$ отображения f. $\mathbf{Z}$-билинейность $\overline{f}$ есть непосредственное следствие принципа продолжения тождеств (гл. I, § 8, следствие 1 предложения 2). Тем самым теорема доказана.

В применении этой теоремы к топологическому кольцу A имеем $E = F = G = \hat{A}$, $B = A$, а f есть $\mathbf{Z}$-билинейное отображение $(x, y) \mapsto xy$, непрерывное по предположению. Значение продолженной функции на $\hat{A} \times \hat{A}$ будем по-прежнему обозначать xy; эта функция является законом композиции в $\hat{A}$, а ее $\mathbf{Z}$-билинейность означает правую и левую *дистрибутивность* этой композиции относительно сложения; с другой стороны, она *ассоциативна* в силу принципа продолжения тождеств. Итак, имеем

Предложение 6. *Отделимое топологическое кольцо A изоморфно всюду плотному подкольцу полного отделимого кольца $\hat{A}$, определенного с точностью до изоморфизма* (и называемого *пополнением* кольца A).

Если A *коммутативно* (соотв. *обладает единичным элементом*), то это верно и для $\hat{A}$ (принцип продолжения тождеств).

Пусть A — не обязательно отделимое топологическое кольцо, N — замыкание нуля в A и $A' = A/N$ — ассоциированное с A отделимое кольцо; пополнение $\hat{A}'$ кольца A' называется *отделимым пополнением* кольца A и обозначается также $\hat{A}$. Как и в предложении 8 § 3, доказывается, что всякое непрерывное представление u кольца A в *полное отделимое* топологическое кольцо C единственным образом представимо в виде композиции $u = v \circ \varphi$, где v — непрерывное представление кольца $\hat{A}$ в C, а φ — каноническое

отображение A в $\hat{A}$. Поэтому, если A, B — топологические кольца и u: $A \to B$ — непрерывное представление, то существует, и притом единственное, непрерывное представление $\hat{u}$: $\hat{A} \to \hat{B}$ такое, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{u} & B \\ \varphi\downarrow & & \downarrow\psi \\ \hat{A} & \xrightarrow[\hat{u}]{} & \hat{B} \end{array}$$

(где φ и ψ — канонические отображения) коммутативна; действительно, достаточно применить предыдущий результат к $\psi \circ u$.

6. *Топологические модули*

Определение 3. *Пусть дано топологическое кольцо A; левым топологическим модулем над A называют множество E, наделенное*:

1° *структурой левого A-модуля*;

2° *топологией, согласующейся со структурой аддитивной группы в E и удовлетворяющей, кроме того, следующей аксиоме*:

(МТ) *Отображение $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$ произведения $A \times E$ в E непрерывно.*

Подобным же образом вводится понятие *правого* топологического модуля над топологическим кольцом A; при этом так как всякий правый модуль над A можно рассматривать как левый модуль над противоположным кольцом A^0, а топология в A согласуется со структурой кольца в A^0, то нет оснований отличать правые топологические модули над A от левых топологических модулей над A^0.

Примеры. °1) Топологическое векторное пространство над $\mathbf{R}$ (соотв. $\mathbf{C}$) есть топологический модуль над $\mathbf{R}$ (соотв. $\mathbf{C}$) (см. Топ. вект. простр., гл. I).°

2) Пусть A — кольцо, $\mathfrak{B}$ — базис фильтра, образованный его двусторонними идеалами, и E — левый A-модуль. Если наделить A топологией (согласующейся со структурой кольца), для которой $\mathfrak{B}$ является фундаментальной системой окрестностей нуля (n° 3, пример 3), а E — топологией (согласующейся со структурой аддитивной группы), для которой $\mathfrak{a}E$, где $\mathfrak{a}$ пробегает $\mathfrak{B}$, образуют фундаментальную систему окрестностей нуля (§ 1, n° 2, пример),

то непосредственно проверяется, что E — топологический модуль над A.

З а м е ч а н и е. Пусть дано топологическое кольцо A; рассмотрим в левом A-модуле E топологию, согласующуюся со структурой аддитивной группы в E. В силу тождества

$$\lambda x - \lambda_0 x_0 = (\lambda - \lambda_0) x_0 + \lambda_0 (x - x_0) + (\lambda - \lambda_0)(x - x_0)$$

аксиома (MT) равносильна системе следующих трех аксиом:

($\mathrm{MT}'_{\mathrm{I}}$) *Для любого $x_0 \in E$ отображение $\lambda \mapsto \lambda x_0$ непрерывно в точке $\lambda = 0$.*

($\mathrm{MT}'_{\mathrm{II}}$) *Для любого $\lambda_0 \in A$ отображение $x \mapsto \lambda_0 x$ непрерывно в точке $x = 0$.*

($\mathrm{MT}'_{\mathrm{III}}$) *Отображение $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$ непрерывно в точке* $(0, 0)$.

Отсюда вытекает система необходимых и достаточных условий, которым должен удовлетворять *фильтр $\mathfrak{V}$ окрестностей нуля* в A-модуле E, чтобы определять в E топологию, согласующуюся со структурой модуля; именно, $\mathfrak{V}$ должен удовлетворять аксиомам (GA_{I}) и ($\mathrm{GA}_{\mathrm{II}}$) из n° 2 § 1 и, кроме того, следующим трем аксиомам:

(MV_{I}) *Для любых $x_0 \in E$ и $V \in \mathfrak{V}$ существует такая окрестность нуля S в A, что $Sx_0 \subset V$.*

($\mathrm{MV}_{\mathrm{II}}$) *Для любых $\lambda_0 \in A$ и $V \in \mathfrak{V}$ существует такое $W \in \mathfrak{V}$, что $\lambda_0 W \subset V$.*

($\mathrm{MV}_{\mathrm{III}}$) *Для любого $V \in \mathfrak{V}$ существуют такие $U \in \mathfrak{V}$ и окрестность нуля T в A, что $TU \subset V$.*

Всякая коммутативная топологическая группа есть топологический **Z**-модуль при наделении кольца **Z** дискретной топологией.

Если M есть подмодуль топологического модуля E над A, то, очевидно, топология, индуцируемая в M из E, согласуется со структурой модуля в M. Кроме того, в A-модуле E/M фактортопология топологии модуля E по M согласуется со структурой A-модуля. В самом деле, чтобы в этом убедиться, достаточно установить непрерывность отображения $(\lambda, \dot{x}) \mapsto \lambda\dot{x}$ произведения $A \times (E/M)$ в E/M (где $x \mapsto \dot{x}$ означает каноническое отображение E на E/M). Но так как аддитивные топологические группы $A \times (E/M)$ и $(A \times E)/(\{0\} \times M)$ отождествимы (§ 2, следствие предложения 26), то достаточно доказать непрерывность отображения $(\lambda, x) \mapsto \lambda\dot{x}$ произведения $A \times E$ в E/M, а она явствует из того, что это отображение есть композиция отображений $x \mapsto \dot{x}$ и $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$.

Пусть $(E_\iota)_{\iota\in I}$ — произвольное семейство топологических модулей над A и $E = \prod_{\iota\in I} E_\iota$ — A-модуль — произведение A-модулей E_ι. Произведение топологий сомножителей E_ι в E согласуется со структурой A-модуля; чтобы в этом убедиться, достаточно доказать непрерывность отображения $(\lambda, x) \mapsto (\lambda\, \mathrm{pr}_\iota x)_{\iota\in I}$ произведения $A \times E$ в E или еще (гл. I, § 4, предложение 1), что для любого индекса $\varkappa \in I$ отображение $(\lambda, x) \mapsto \lambda\, \mathrm{pr}_\varkappa x$ произведения $A \times E$ в $E_\varkappa$ непрерывно; но это отображение есть композиция непрерывных отображений $(\lambda, x_\varkappa) \mapsto \lambda x_\varkappa$ и $(\lambda, x) \mapsto (\lambda, \mathrm{pr}_\varkappa x)$.

Пусть A — отделимое топологическое кольцо, E — отделимый топологический A-модуль и $\hat{E}$ — аддитивная группа, полученная путем пополнения коммутативной топологической группы E (§ 3, теорема 2). $\mathbf{Z}$-билинейное отображение $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$ произведения $A \times E$ аддитивных групп A и E в аддитивную группу E продолжается по непрерывности до $\mathbf{Z}$-билинейного отображения произведения $\hat{A} \times \hat{E}$ в $\hat{E}$ (теорема 1), которое мы обозначим снова $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$. В силу принципа продолжения тождеств имеем по-прежнему $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$ для всех $\lambda \in \hat{A}$, $\mu \in \hat{A}$, $x \in \hat{E}$; таким образом, внешний закон $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$ определяет в $\hat{E}$ структуру $\hat{A}$-модуля, согласующуюся с имеющейся в $\hat{E}$ топологией. Если, кроме того, A обладает единичным элементом, а E есть унитарный A-модуль, то по принципу продолжения тождеств будем иметь еще $1x = x$ для всех $x \in \hat{E}$. Так определенный топологический модуль $\hat{E}$ над $\hat{A}$ называется *пополнением* топологического модуля E над A.

Пусть E — топологический модуль над топологическим кольцом A, где A и E не обязательно отделимы. Пусть N (соотв. F) — замыкание $\{0\}$ в A (соотв. E); N есть двусторонний идеал в A (предложение 5), а F — A-подмодуль в E (предложение 1); кроме того, по непрерывности, если $\lambda \in N$ или $x \in F$, то $\lambda x \in F$. Отсюда посредством факторизации сразу получаем отображение $(\dot{\lambda}, \dot{x}) \mapsto \dot{\lambda}\dot{x}$ произведения $(A/N) \times (E/F)$ в E/F, причем (на основании следствия предложения 26 § 2) оно непрерывно и, значит, опре-

деляет в E/F структуру топологического модуля над топологическим кольцом A/N. Полагая $B = A/N$, $L = E/F$, будем говорить, что B-модуль L есть отделимый модуль, *ассоциированный* с E; его пополнение $\hat{L}$ есть топологический модуль над отделимым пополнением $\hat{A}$ (совпадающим по определению с $\hat{B}$) кольца A (n° 5); $\hat{L}$ называется *отделимым пополнением* модуля E и обозначается $\hat{E}$. Как и в § 3, предложение 8, убеждаемся в том, что всякое непрерывное представление u: $E \to G$ модуля E в полный отделимый $\hat{A}$-модуль G единственным образом представимо в виде композиции $u = v \circ \varphi$, где v — непрерывное представление $\hat{E}$ в G, а φ — каноническое отображение E в $\hat{E}$. Отсюда заключаем, что если E и E' — топологические A-модули, а u: $E \to E'$ — непрерывное представление, то существует, и притом единственное, непрерывное представление $\hat{u}$: $\hat{E} \to \hat{E}'$ такое, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{u} & E' \\ {\scriptstyle\varphi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\varphi'} \\ \hat{E} & \xrightarrow[\hat{u}]{} & \hat{E}', \end{array}$$

где φ и φ' — канонические отображения, коммутативна.

7. Топологические тела

В последующем, а также в главах IV и V, при рассмотрении *тела* K мы будем обозначать через K^* *мультипликативную группу* его ненулевых элементов.

Определение 4. *Топологическим телом называют множество* K, *наделенное структурой тела и топологией, согласующейся со структурой кольца в* K *и удовлетворяющей, кроме того, следующей аксиоме*:

(KT) *Отображение* $x \mapsto x^{-1}$ *группы* K^* *в* K^* *непрерывно.*

Говорят, что структура тела и топология в множестве K *согласуются*, если согласуются структура соответствующего кольца и топология и, кроме того, выполняется аксиома (KT).

Примеры. 1) *Дискретная* топология в теле K согласуется со структурой тела; топологическое тело с дискретной топологией называется *дискретным* телом.

°2) Топология рациональной прямой $\mathbf{Q}$ (соотв. числовой прямой $\mathbf{R}$) согласуется со структурой тела $\mathbf{Q}$ (соотв. $\mathbf{R}$; см. гл. IV, § 3).$_{\circ}$

Определение 4 показывает, что топология, *индуцируемая* из топологического тела K в мультипликативной группе K^*, *согласуется* со структурой этой группы.

Если $a \neq 0$, то гомотетии $x \mapsto ax$ и $x \mapsto xa$ являются *гомеоморфизмами* K на себя; то же верно и для отображения $x \mapsto ax+b$, каково бы ни было $b \in K$. Отметим, что при $a \neq 0$ гомотетии $x \mapsto ax$ и $x \mapsto xa$ являются *автоморфизмами* (топологической) *аддитивной группы* тела K. Поэтому для произвольной окрестности нуля V в K aV и Va будут окрестностями нуля при любом $a \neq 0$.

Пусть E — топологическое пространство и f — его отображение в топологическое тело K; если f непрерывно в точке $x_0 \in E$ и $f(x_0) \neq 0$, то f^{-1} непрерывно в x_0. В частности, если K *коммутативно*, то всякая *рациональная функция* n переменных с коэффициентами из K непрерывна в любой точке произведения K^n, в которой знаменатель функции отличен от нуля.

Точно так же, если E — множество, фильтрующееся по фильтру $\mathfrak{F}$, f — отображение E в отделимое топологическое тело K и $\lim_{\mathfrak{F}} f$ существует и $\neq 0$, то $\lim_{\mathfrak{F}} f^{-1}$ существует, причем

$$\lim_{\mathfrak{F}} f^{-1} = (\lim_{\mathfrak{F}} f)^{-1}. \tag{4}$$

Если H — *подтело* топологического тела K, то топология, индуцированная в H из K, согласуется со структурой тела в H; определенная так в H структура топологического тела называется *индуцированной* из K. Кроме того, $\overline{H}$ также есть *подтело* тела K (доказательство аналогично доказательству предложения 5).

В топологическом теле K замыкание множества, состоящего из одного элемента 0, является, по предложению 5, двусторонним идеалом, следовательно, есть либо множество $\{0\}$, либо все тело K; другими словами, если топология в K не является слабейшей (гл. I, § 2, n° 2), то она отделима (§ 1, предложение 2).

8. *Равномерные структуры топологического тела*

В топологическом теле K следует различать:

1° Равномерную структуру *аддитивной группы* K, определенную в K и называемую *аддитивной равномерной структурой* тела K.

2° Правую и левую равномерные структуры *мультипликативной* группы K^*, определенные *в* K^*, которые (допуская вольность речи) называют *мультипликативными равномерными структурами* тела K.

Структура, *индуцированная* в K^* аддитивной равномерной структурой тела K, вообще говоря, *отлична* от мультипликативных равномерных структур (см. упражнение 17).

По предложению 6 отделимое топологическое тело K можно рассматривать как *всюду плотное подкольцо полного отделимого кольца* $\hat{K}$. Для того чтобы $\hat{K}$ было *топологическим телом*, необходимо, чтобы отображение $x \mapsto x^{-1}$ могло быть *продолжено по непрерывности* на $(\hat{K})^*$; это условие является также достаточным, ибо при его выполнении функции xx^{-1}, $x^{-1}x$ и 1 совпадают на $(\hat{K})^* \times (\hat{K})^*$ по принципу продолжения тождеств, а это доказывает, что при любом $x \neq 0$ значение продолженной функции является как раз *обратным* к x на $\hat{K}$. Иначе говоря (см. гл. II, § 3, предложение 11):

Предложение 7. *Для того чтобы кольцо $\hat{K}$, полученное путем пополнения отделимого топологического тела K, было топологическим телом, необходимо и достаточно, чтобы при отображении $x \mapsto x^{-1}$ образ всякого фильтра Коши* (*в аддитивной структуре*), *для которого* 0 *не является точкой прикосновения, был снова фильтром Коши* (*в аддитивной структуре*).

Существуют топологические тела, где это условие не выполнено и кольцо $\hat{K}$ обладает делителями нуля (см. упражнение 26). Кроме того, когда кольцо $\hat{K}$, полученное путем пополнения топологического тела K, есть топологическое тело, априори нет гарантии, что *мультипликативные* структуры в $\hat{K}$ являются структурами *полного* пространства. Однако это все же будет иметь место

для тел K таких, что $\hat{K}$ *локально компактно* (см. гл. I, § 9, предложение 13 и гл. III, § 3, предложение 4) или *коммутативно*; в самом деле, в последнем случае справедливо следующее предложение:

Предложение 8. *Если аддитивная равномерная структура коммутативного топологического тела K есть структура полного отделимого пространства, то мультипликативная структура в K^* есть структура полного пространства.*

Мы покажем, что если $\mathfrak{F}$ — фильтр Коши для *мультипликативной* структуры в K^*, то $\mathfrak{F}$ есть базис фильтра Коши для *аддитивной* структуры в K, притом не сходящийся к нулю, чем и будет установлена справедливость предложения. Пусть U — произвольная окрестность нуля в K и V — такая замкнутая окрестность нуля, что $V \subset U$, $VV \subset U$ (аксиома $(\mathrm{AV_{II}})$) и $-1 \notin V$; по предположению существует множество $A \in \mathfrak{F}$ такое, что $x^{-1}y \in 1 + V$, каковы бы ни были $x \in A$ и $y \in A$. Пусть a — какая-нибудь точка из A; тогда $A \subset a + aV$, и так как $a + aV$ есть замкнутое множество, не содержащее нуля, то 0 не является точкой прикосновения для A, а тем самым и для $\mathfrak{F}$. Пусть W — окрестность нуля такая, что $aW \subset V$ (аксиома $(\mathrm{AV_I})$); по предположению существует множество $B \in \mathfrak{F}$ такое, что $B \subset A$ и $x^{-1}y \in 1 + W$, каковы бы ни были $x \in B$ и $y \in B$, откуда $y - x \in \in xW \subset AW \subset aW + aVW$; но так как K коммутативно, то $aVW = aWV \subset VV \subset U$; следовательно, $y - x \in U + U$, и предложение доказано.

То же рассуждение доказывает, что предложение 8 распространяется на тот случай, когда всякий фильтр Коши для *одной* из мультипликативных структур в K является также фильтром Коши для другой.

Упражнения

1) В отделимом топологическом кольце A коммутант любого множества из A (в частности, центр кольца A) замкнут, и то же верно для левого (соотв. правого) аннулятора любого множества из A.

2) а) Пусть $\mathfrak{a}$ — дискретный левый идеал топологического кольца A; показать, что левый аннулятор любого $x \in \mathfrak{a}$ в A открыт. Вывести отсюда, что недискретное кольцо A без делителей нуля не содержит ни одного дискретного (левого или правого) идеала, отличного от $\{0\}$.

б) Пусть A — локально связное топологическое кольцо и $\mathfrak{a}$ — вполне несвязный левый идеал; показать, что левый аннулятор любого $x \in \mathfrak{a}$ в A открыт. Вывести отсюда, что кольцо A без делителей нуля не содержит ни одного вполне несвязного (левого или правого) идеала, отличного от $\{0\}$.

3) В топологическом кольце A связная компонента нуля есть двусторонний идеал. Вывести отсюда, что квазипростое кольцо A (Алг., гл. VIII, § 5, упражнение 5), не являющееся связным (в частности, несвязное топологическое тело), вполне несвязно.

4) Пусть (x_ι) — суммируемое семейство в отделимом топологическом кольце A и s — его сумма; семейство (ax_ι) (соотв. $(x_\iota a)$) для любого $a \in A$ суммируемо и имеет суммой as (соотв. sa). Если (x_λ) и (y_μ) — суммируемые семейства в A такие, что семейство $(x_\lambda y_\mu)$ суммируемо, то $\sum\limits_{\lambda, \mu} x_\lambda y_\mu = \left(\sum\limits_\lambda x_\lambda\right)\left(\sum\limits_\mu y_\mu\right)$. Если, кроме того, A полно и одно из x_λ обратимо, то суммируемость семейства $(x_\lambda y_\mu)$ влечет суммируемость семейства (y_μ).

5) Назовем *прямоугольником* в $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ произведение двух интервалов из $\mathbf{N}$; для каждого конечного множества $E \subset \mathbf{N} \times \mathbf{N}$ обозначим через $\varphi(E)$ наименьшее число попарно дизъюнктных прямоугольников, объединением которых служит E. Пусть (E_n) — возрастающая последовательность конечных подмножеств произведения $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$, образующая его покрытие и такая, что последовательность $(\varphi(E_n))$ ограниченна. Для любых двух сходящихся рядов (x_n), (y_n), члены которых принадлежат отделимому топологическому кольцу A,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{(h, k)\in E_n} x_h y_k = \left(\mathop{\mathsf{S}}_{n=0} x_n\right)\left(\mathop{\mathsf{S}}_{n=0} y_n\right).$$

Построить пример последовательности (E_n), удовлетворяющей указанным выше условиям и такой, чтобы $E_{n+1} - E_n$ содержало только один элемент при любом n.

6) Пусть A — топологическое кольцо с единицей, а $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ — двусторонние идеалы в A такие, что $A = \mathfrak{a} + \mathfrak{b}$, $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} = \{0\}$. Показать, что топологическое кольцо A изоморфно произведению топологических колец $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$.

7) Пусть A — топологическое кольцо без единицы и B — кольцо, получаемое путем присоединения к A единичного элемента (Алг., гл. I, § 8, упражнение 3); показать, что в B произведение топологии кольца A и дискретной топологии кольца $\mathbf{Z}$ согласуется со структурой кольца и индуцирует в A (двустороннем идеале в B) заданную топологию.

8) Пусть A — топологическое кольцо с единицей.

а) Для того чтобы множество A^* всех обратимых элементов было открыто в A, необходимо и достаточно, чтобы существовала окрестность V единицы, все элементы которой обратимы в A.

б) Если A^* открыто в A, то всякий (правый или левый) максимальный идеал в A замкнут, и то же верно для радикала кольца A. Если A не имеет замкнутых левых идеалов, отличных от $\{0\}$ и A, то A — тело (Алг., гл. I, § 9, предложение 3).

в) Пусть A — подкольцо топологического тела $\mathbf{Q}$, состоящее из всех чисел $\frac{k}{2^n}$ ($k \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{N}$); показать, что оно не имеет ни одного замкнутого идеала, отличного от $\{0\}$ и A, но не является телом.

9) а) Элемент x (соотв. идеал $\mathfrak{a}$) топологического кольца A называется *топологически нильпотентным*, если последовательность $(x^n)_{n\geqslant 1}$ сходится к 0 (соотв. если базис фильтра, состоящий из множеств $\mathfrak{a}^n$ ($n \geqslant 1$), сходится к 0). Всякий элемент топологически нильпотентного идеала топологически нильпотентен.

б) Предположим, что A содержит единицу и A^* открыто в A. Показать, что для любого топологически нильпотентного элемента x из A элемент $1-x$ обратим. [Заметить, что $1-x^n$ для достаточно большого n обратимо.] Заключить отсюда, что если все элементы (правого или левого) идеала $\mathfrak{a}$ топологически нильпотентны, то $\mathfrak{a}$ содержится в радикале кольца A.

в) Предположим, что A полно, содержит единицу и обладает фундаментальной системой окрестностей нуля, состоящей из подгрупп его аддитивной группы. Показать, что если x топологически нильпотентен, то $1-x$ обратимо в A.

г) При тех же условиях, что и в в), показать, что если элемент $y \in A$ топологически нильпотентен, то уравнение $x^2 + x = y$ имеет топологически нильпотентный корень $x \in A$.

*10) а) Пусть B — кольцо с единицей, E — свободный B-модуль $B_d^{(\mathrm{I})}$ и A — кольцо $\mathfrak{L}(E)$ всех эндоморфизмов модуля E. Для любого конечного множества $F \subset E$ обозначим через V_F множество тех $u \in A$, для которых $u(x) = 0$ при всех $x \in F$. Показать, что множества V_F образуют фундаментальную систему окрестностей нуля для некоторой отделимой топологии в A, согласующейся со структурой кольца в A и такой, что A в этой топологии вполне несвязно.

б) Примем $I = \mathbf{N}$ и возьмем в качестве B коммутативное кольцо без делителей нуля, но с радикалом $\mathfrak{R}$, не сводящимся к 0 (Алг., гл. VIII, § 6, n° 3). Показать, что радикал кольца A не замкнут. [Пусть (e_n) — канонический базис модуля E. Заметить, с одной стороны, что всякое $u \in A$ такое, что $u(e_n) \neq 0$ лишь для конечного числа индексов n и $u(E) \subset \mathfrak{R}E$, принадлежит радикалу кольца A (см. Алг., гл. VIII, § 6, упражнение 5). Рассмотреть, с другой стороны, такое $u_0 \in A$, что при любом n $u_0(e_n) = e_n + te_{n+1}$, где t — ненулевой элемент из $\mathfrak{R}$.]

*11) а) Топологическое кольцо A с единицей называется *кольцом Гельфанда*, если A^* открыто в A и топология, индуцируемая в A^* из A, согласуется со структурой мультипликативной группы. Всякое

отделимое топологическое тело есть кольцо Гельфанда (см. упражнение 20д).

б) Показать, что если A — кольцо Гельфанда, то то же верно для всякого кольца матриц $\mathrm{M}_n(A)$, наделенного топологией произведения (из A^{n^2}). [Применить индукцию по n.]

12) Множество M в топологическом кольце A называется *ограниченным справа* (соотв. *слева*), если для любой окрестности нуля U в A существует такая окрестность нуля V, что $VM \subset U$ (соотв. $MV \subset U$); M называется *ограниченным*, если оно ограниченно одновременно слева и справа. Топология кольца A называется *локально ограниченной* (и A — *локально ограниченным* топологическим кольцом), если в A существует ограниченная окрестность нуля.

а) Всякое топологическое кольцо, обладающее фундаментальной системой окрестностей нуля, состоящей из правых идеалов, ограниченно справа. Показать, что если в упражнении 10а считать I бесконечным, а B — телом, то кольцо A будет ограниченно слева, но ни одна окрестность нуля в нем не будет ограничена справа.

б) Если топологическое кольцо A ограниченно справа (соотв. ограниченно) и обладает фундаментальной системой окрестностей нуля, являющихся подгруппами аддитивной группы A, то оно обладает фундаментальной системой окрестностей нуля, являющихся правыми (соотв. двусторонними) идеалами.

в) Объединение любого конечного семейства ограниченных множеств ограниченно; замыкание ограниченного множества ограниченно; если M и N ограниченны, то ограниченны также $M+N$ и MN.

г) Всякое предкомпактное множество в топологическом кольце A ограниченно.

д) Показать, что если M и N — ограниченные множества в A, то отображение $(x, y) \longmapsto xy$ произведения $M \times N$ в A равномерно непрерывно.

е) Пусть A — отделимое топологическое кольцо с единицей. Показать, что если (x_n) — последовательность его обратимых элементов, сходящаяся к 0, то множество всех x_n^{-1} не ограниченно (ни слева, ни справа) в A.

ж) Показать, что если A — ограниченное кольцо с единицей, то $x \longmapsto x^{-1}$ равномерно непрерывно на множестве A^* всех обратимых элементов из A.

з) Показать, что в полном отделимом ограниченном кольце A с единицей множество A^* всех обратимых элементов и радикал замкнуты. [Использовать ж).]

и) Для того чтобы подмножество произведения $\prod\limits_{\iota} A_{\iota}$ топологических колец было ограниченно, необходимо и достаточно, чтобы были ограниченны все его проекции.

й) Всякое подкольцо локально ограниченного кольца и всякое произведение локально ограниченных колец есть локально ограниченное кольцо.

к) Пополнение локально ограниченного отделимого кольца локально ограниченно.

13) Пусть A — ограниченное топологическое кольцо (упражнение 12) с единицей, в котором множество A^* всех обратимых элементов открыто. Показать, что радикал кольца A открыт. Таким образом, если A не имеет радикала, то оно дискретно; в частности, отделимое ограниченное топологическое тело дискретно. Компактное кольцо A без радикала, обладающее единицей и такое, что A^* открыто в A, конечно; в частности, компактное топологическое тело конечно.

*14) Пусть A — компактное кольцо с единицей, вполне несвязное *) и не имеющее радикала. Тогда A изоморфно произведению семейства конечных простых колец. [Показать сначала, используя упражнение 12б § 6 и предложение 14 § 4, что в A существует фундаментальная система окрестностей нуля, состоящая из двусторонних идеалов. Вывести отсюда, что в A существует максимальное множество Φ таких двусторонних идеалов, что: 1° всякий двусторонний идеал $\mathfrak{N} \in \Phi$ есть открытый максимальный двусторонний идеал; 2° ни один из идеалов $\mathfrak{N} \in \Phi$ не содержит пересечения конечного семейства отличных от $\mathfrak{N}$ идеалов из Φ. Показать затем, что A изоморфно произведению факторколец $A/\mathfrak{N}$, где $\mathfrak{N}$ пробегает Φ, доказав предварительно с помощью упражнения 9б, что пересечение всех $\mathfrak{N} \in \Phi$ сводится к 0.]

15) Пусть A — вполне несвязное компактное кольцо с единицей. Показать, что его радикал $\mathfrak{R}$ топологически нильпотентен (упражнение 9а). [Использовать упражнение 12б § 6 и предложение 14 § 4.] Вывести отсюда, что $\mathfrak{R}$ есть множество тех $x \in A$, для которых ax топологически нильпотентно при любом $a \in A$. [См. упражнение 9в.]

16) Показать, что в кольце A (соотв. теле K) верхняя грань $\mathcal{T}$ семейства $(\mathcal{T}_\iota)$ топологий, согласующихся со структурой кольца в A (соотв. со структурой тела в K), также согласуется с этой структурой. Множество M, ограниченное слева (соотв. справа) в каждой из топологий $\mathcal{T}_\iota$, ограниченно слева (соотв. справа) в $\mathcal{T}$.

17) Если K — недискретное отделимое топологическое тело, то каждая из его мультипликативных равномерных структур *несравнима* с равномерной структурой, индуцируемой в K^* из K. [См. упражнение 13.]

18) Пусть K — отделимое топологическое тело, A — замкнутое множество в K и B — компактное множество в K, не содержащее нуля; показать, что AB и BA замкнуты в K (см. следствие 1 предло-

---

*) Можно показать, что компактное кольцо с единицей всегда вполне несвязно.

жения 1 § 4). °Привести пример, когда множество A в поле $\mathbf{R}$ вещественных чисел замкнуто, B компактно, $0 \notin B$, но AB не замкнуто.$_\circ$

19) а) Пусть K — тело, наделенное отделимой топологией $\mathcal{T}$, согласующейся со структурой кольца в K; показать, что в K существует такая окрестность нуля V, что $(\complement V) \cup (\complement V)^{-1} = K^*$ (или, что равносильно этому, $V \cap (V \cap K^*)^{-1} = \varnothing$).

б) Предположим, кроме того, что $\mathcal{T}$ не дискретна. Показать, что для любой окрестности U нуля в K имеем $U^* (U^*)^{-1} = K^*$, где $U^* = U \cap K^*$.

*20) а) Пусть K — тело, наделенное недискретной отделимой топологией $\mathcal{T}$, согласующейся со структурой *кольца* в K. Для того чтобы множество $M \subset K$ было ограниченно справа (соотв. слева), необходимо и достаточно, чтобы для любой окрестности нуля U существовало такое $a \in K^*$, что $aM \subset U$ (соотв. $Ma \subset U$); M тогда ограниченно справа (соотв. слева) также для любой отделимой топологии $\mathcal{T}'$, мажорируемой топологией $\mathcal{T}$ и согласующейся со структурой кольца в K.

б) Если топология $\mathcal{T}$ локально ограниченна (упражнение 12) и U — ограниченная окрестность нуля для $\mathcal{T}$, то множество всех xU (соотв. Ux), где x пробегает K^*, является фундаментальной системой окрестностей нуля для $\mathcal{T}$. Для того чтобы каждая точка из K обладала счетной фундаментальной системой окрестностей в топологии $\mathcal{T}$, необходимо и достаточно, чтобы существовала последовательность (a_n) точек из K^*, имеющая 0 предельной точкой.

в) Верхняя грань любого конечного семейства локально ограниченных топологий в K (согласующихся со структурой кольца в K) локально ограниченна. Обратно, если верхняя грань $\mathcal{T}$ семейства $(\mathcal{T}_\iota)$ локально ограниченных топологий в K локально ограниченна, то $\mathcal{T}$ есть верхняя грань уже некоторого *конечного* подсемейства семейства $(\mathcal{T}_\iota)$. [Заметить, что если U — ограниченная окрестность нуля для $\mathcal{T}$, то существуют конечная система индексов (ι_k) и для каждого k ограниченная окрестность нуля V_k для $\mathcal{T}_{\iota_k}$ такие, что $\bigcap V_k \subset U$; с другой стороны, существует такое $a_k \in K^*$, что $U \subset a_k V_k$.]

г) Подмножество F тела K называется *квазикольцом*, если $F \neq K$, $0 \in F$, $1 \in F$, $-F = F$, $FF \subset F$, далее, существует такой элемент $c \in F^* = F \cap K^*$, что $c(F + F) \subset F$, и, наконец, для каждого $x \in F$ существует такое $y \in F$, что $yF \subset Fx$ и $Fy \subset xF$. Показать, что если $\mathcal{T}$ — локально ограниченная недискретная отделимая топология, согласующаяся со структурой кольца в K, то всякая симметричная ограниченная окрестность U нуля для $\mathcal{T}$ такая, что $UU \subset U$ и $1 \in U$, является квазикольцом и $U^*(U^*)^{-1} = K^*$ [упражнение 19б]. Пусть V — произвольная симметричная ограниченная окрестность нуля для $\mathcal{T}$; тогда множество U тех $x \in K$, для которых $xV \subset V$ (или

$Vx \subset V$), есть симметричная ограниченная окрестность нуля для $\mathscr{T}$ такая, что $UU \subset U$ и $1 \in U$, и, следовательно,— квазикольцо.

д) Обратно, пусть F — такое квазикольцо в K, что $F^*(F^*)^{-1} = K^*$. Показать, что в K существует недискретная отделимая топология $\mathscr{T}$, согласующаяся со структурой кольца в K и такая, что F является для нее ограниченной окрестностью нуля. В частности, можно взять в качестве F всякое подкольцо A в K, для которого K служит телом правых отношений (Алг., гл. I, § 9, упражнение 8). В частности, если $K = \mathbf{Q}$ и $F = \mathbf{Z}$, то соответствующая топология $\mathscr{T}$ в K не согласуется с его структурой тела.

* 21) а) Пусть $\mathscr{T}$ — локально ограниченная отделимая топология в теле K, в которой K связно. Показать, что в K существуют ненулевые топологические нильпотентные элементы (упражнение 9а). [Показать, используя предложение 6 § 2, что если U — ограниченная симметричная окрестность нуля, а t — такой элемент $\neq 0$, что $Ut + Ut \subset U$, то K есть объединение всех Ut^{-n}.]

б) Пусть $\mathscr{T}$ — локально ограниченная отделимая топология в K, для которой существуют топологически нильпотентные элементы $\neq 0$. Доказать существование такой окрестности нуля U, что для любой окрестности нуля V существует целое n_0 такое, что $U^n \subset V$ для всех $n \geqslant n_0$; это влечет топологическую нильпотентность всех элементов из U, а также то, что всякая точка обладает в $\mathscr{T}$ счетной фундаментальной системой окрестностей. [Пусть $t \neq 0$ — топологически нильпотентный элемент и W — ограниченная окрестность нуля; принять за U ограниченную окрестность нуля, для которой $UW \subset Wt$.] Множество T всех топологически нильпотентных элементов из K является, таким образом, окрестностью нуля для $\mathscr{T}$.

*22) Пусть K — тело, наделенное отделимой топологией $\mathscr{T}$, согласующейся с его структурой кольца; множество R в K, содержащее 0, называется *обратно ограниченным*, если $(\complement R)^{-1}$ ограниченно. Топология $\mathscr{T}$ называется *локально обратно ограниченной*, если она обладает фундаментальной системой обратно ограниченных окрестностей нуля.

а) Локально обратно ограниченная топология $\mathscr{T}$ локально ограниченна и является минимальным элементом множества всех отделимых топологий, согласующихся со структурой кольца в K; кроме того, $\mathscr{T}$ согласуется со структурой тела в K. [Использовать упражнение 19а.]

б) Будем предполагать, начиная отсюда, что $\mathscr{T}$ — локально обратно ограниченная топология. Показать, что для любой окрестности нуля V в K отображение $x \longmapsto x^{-1}$ равномерно непрерывно на $\complement V$. Вывести отсюда, что пополнение $\hat{K}$ кольца K есть топологическое тело с локально обратно ограниченной топологией.

в) Всякая окрестность нуля для $\mathscr{T}$ содержит такую окрестность нуля V, что множество $E(V) = (\complement V) \cap (\complement V)^{-1}$ не пусто. Показать,

что все три равномерные структуры, индуцируемые в $E(V)$ из K (аддитивной равномерной структурой и двумя мультипликативными равномерными структурами), совпадают. Вывести отсюда, что если K полно, то мультипликативные равномерные структуры в K^* являются равномерными структурами полного пространства.

г) Показать, что если $x \in K^*$, то либо x топологически нильпотентен, либо x^{-1} топологически нильпотентен, либо последовательность $(x^n)_{n \in \mathbf{Z}}$ ограниченна, причем эти три случая — взаимно исключающие. [Рассматривая ограниченную окрестность U, для которой $UU \subset U$ (упражнение 20г), показать, что если 0 — предельная точка последовательности $(x^n)_{n \geqslant 0}$, то элемент x топологически нильпотентен.] Показать, что если в K существуют ненулевые топологически нильпотентные элементы, то множество B, состоящее из 0 и тех $x \in K^*$, для которых x^{-1} не являются топологически нильпотентными, есть ограниченная окрестность нуля в K, инвариантная относительно всех внутренних автоморфизмов. [Использовать упражнение 21б.] B содержит тогда все ограниченные окрестности нуля U такие, что $UU \subset U$; среди тех из этих окрестностей, которые инвариантны относительно всех внутренних автоморфизмов, имеется наибольшая, совпадающая с B в случае, когда коммутант группы K^* ограничен и, в частности, когда K коммутативно.

д) Если U — ограниченная симметричная окрестность нуля в K, для которой $UU \subset U$, то существует такое $b \in U^*$, что $K^* = U^* \cup ((U^*)^{-1}b)$. Пусть $a \in U^*$ таково, что $Ua \subset bU$, и предположим, что последовательность $(a^{-n})_{n \geqslant 0}$ ограниченна. Показать, что множество V тех $x \in K$, для которых xU содержится в объединении всех Ua^{-n}, есть ограниченная окрестность нуля такая, что $VV \subset V$ и $K^* = V^* \cup (V^*)^{-1}$.

е) Предположим, что в K нет ненулевых топологически нильпотентных элементов. Показать, что в K существует ограниченная окрестность нуля A, являющаяся подкольцом кольца K и такая, что $K^* = A^* \cup (A^*)^{-1}$. [Взять за отправной пункт ограниченную окрестность нуля V, для которой $K^* = V^* \cup (V^*)^{-1}$ и $VV \subset V$ (см. д)); заметить, что если $c \in V^*$ таково, что $c(V+V) \subset V$, то кольцо A, порожденное окрестностью V, содержится в объединении всех Vc^{-n} $(n \geqslant 0)$.]

*23) Для каждого простого числа p и рационального числа $x \neq 0$ обозначим через $\nu_p(x)$ показатель степени, в которой p входит в разложение x на простые множители; отображение ν_p группы $\mathbf{Q}^*$ в $\mathbf{Z}$ называется *p-адической нормой* в $\mathbf{Q}$; множество, состоящее из $x = 0$ и тех $x \in \mathbf{Q}^*$, для которых $\nu_p(x) \geqslant m$ с фиксированным $m \in \mathbf{Z}$, есть дробный идеал (p^m) в $\mathbf{Q}$.

а) Показать, что идеалы (p^m) $(m \in \mathbf{Z})$ образуют фундаментальную систему окрестностей нуля в $\mathbf{Q}$ для локально обратно ограниченной топологии (упражнение 22) $\mathcal{T}_p$ в $\mathbf{Q}$; ее называют *p-адической топологией*. Пополнение $\mathbf{Q}_p$ поля $\mathbf{Q}$ по этой топологии есть так называемое

p-адическое поле; его элементы называются *p-адическими числами*. Замыкание $\mathbf{Z}_p$ кольца $\mathbf{Z}$ в $\mathbf{Q}_p$ есть открытое компактное кольцо главных идеалов в $\mathbf{Q}_p$, единственным простым идеалом которого является $\mathfrak{p} = p\mathbf{Z}_p$; при этом $Z_p/\mathfrak{p}$ изоморфно простому полю $\mathbf{F}_p = \mathbf{Z}/(p)$, и, более общим образом, аддитивная факторгруппа $\mathfrak{p}^m/\mathfrak{p}^n$ изоморфна $\mathbf{Z}/(p^{n-m})$ $(m < n)$. Элементы из $\mathbf{Z}_p$ называются *целыми p-адическими числами*.

б) Показать, что всякое непрерывное представление аддитивной группы $\mathbf{Q}_p$ в себя имеет вид $x \longmapsto ax$, где $a \in \mathbf{Q}_p$. [Показать, что если f — такое представление, то $f(rx) = rf(x)$ при любом $r \in \mathbf{Q}$; перейти затем к пределу в $\mathbf{Q}_p$.]

в) Показать, что всякая *компактная* подгруппа $G \neq \{0\}$ аддитивной группы $\mathbf{Q}_p$ совпадает с некоторым $\mathfrak{p}^n$ $(n \in \mathbf{Z})$ и что в $\mathbf{Q}_p$ нет замкнутой некомпактной аддитивной подгруппы, отличной от $\mathbf{Q}_p$. [Пусть m — наибольшее целое число, для которого $G \subset \mathfrak{p}^m$; рассматривая факторгруппу $(G + \mathfrak{p}^n)/\mathfrak{p}^n$ при $n > m$, показать, что $G + \mathfrak{p}^n = \mathfrak{p}^m$, и в заключение использовать формулу (1) n° 1 § 3.]

*24) а) Показать, что всякая подгруппа мультипликативной группы $\mathbf{Q}_p^*$ p-адического поля $\mathbf{Q}_p$ изоморфна произведению подгруппы мультипликативной группы U обратимых элементов из $\mathbf{Z}_p$ и дискретной аддитивной подгруппы, изоморфной $\mathbf{Z}$ или $\{0\}$.

б) Показать, что компактные подгруппы подгруппы $V = 1 + \mathfrak{p}$ группы U совпадают с группами $1 + \mathfrak{p}^n$ $(n > 0)$. [То же рассуждение, что и для упражнения 23в.]

в) Показать, что для любого $a \in U$ последовательность $(a^{p^n})_{n \in \mathbf{N}}$ стремится к пределу $\alpha \equiv a \pmod{\mathfrak{p}}$ и что $\alpha^p = \alpha$. [Доказать индукцией по n, что $a^{p^n} \equiv a^{p^{n-1}} \pmod{\mathfrak{p}^n}$.] Показать, что все корни полинома $X^{p-1} - 1$ (в замкнутом алгебраическом расширении поля $\mathbf{Q}_p$) принадлежат $\mathbf{Q}_p$ и попарно несравнимы $\operatorname{mod} \mathfrak{p}$. [Применить предыдущее к корням сравнения $x^{p-1} - 1 \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$.] Если $p > 2$, а d — наибольший общий делитель чисел n и $p - 1$, то полином $X^n - 1$ имеет точно d корней в $\mathbf{Q}_p$, являющихся корнями для $X^d - 1$. [Тот же метод, причем в качестве a берется корень полинома $X^n - 1$.]

Вывести отсюда, что если $p > 2$, то всякая компактная подгруппа мультипликативной группы $\mathbf{Q}_p^*$ есть прямое произведение *конечной* подгруппы группы U (образованной корнями $(p - 1)$-й степени из единицы) и подгруппы вида $1 + \mathfrak{p}^n$. [Использовать б).] Как изменятся эти результаты для $p = 2$? [Предоставить группе $1 + \mathfrak{p}^2$ роль, которую прежде играла группа $1 + \mathfrak{p}$.]

*25) а) Пусть a есть p-адическое число $\neq 0$. Для того чтобы отображение $n \longmapsto a^n$ было непрерывно на $\mathbf{Z}$ (рассматриваемом как подпространство в $\mathbf{Q}_p$), необходимо и достаточно, чтобы $a \in 1 + \mathfrak{p}$. Показать, что если это условие выполнено, то $n \longmapsto a^n$ равномерно

непрерывно на $\mathbf{Z}$ и может быть продолжено до непрерывного представления $x \longmapsto a^x$ группы $\mathbf{Z}_p$ в U, инъективного, если $a \neq 1$. Если $p > 2$, то $x \longmapsto a^x$ есть изоморфизм $\mathbf{Z}_p$ на $1 + \mathfrak{p}^m$, где m — наибольшее целое число, для которого $a \in 1 + \mathfrak{p}^m$. Как изменится этот результат в случае, когда $p = 2$?

б) Показать, что всякое непрерывное представление группы $\mathbf{Z}_p$ в U имеет вид $x \longmapsto a^x$, где $a \in 1 + \mathfrak{p}$. [Если f — такое представление и $f(1) = a$, то $f(n) = a^n$ для всех $n \in \mathbf{Z}$.]

в) Показать, что отображение $(x, y) \longmapsto x^y$ непрерывно на произведении $(1 + \mathfrak{p}) \times \mathbf{Z}_p$. Если $p > 2$ и $b \in \mathbf{Z}_p$, то отображение $x \longmapsto x^b$ есть изоморфизм мультипликативной группы $1 + \mathfrak{p}$ на мультипликативную подгруппу $1 + \mathfrak{p}^{m+1}$, где m — наибольшее целое число, для которого $b \in \mathfrak{p}^m$. [Использовать упражнение 24б.] Как изменится этот результат в случае, когда $p = 2$?

г) Показать, что если n — целое число, взаимно простое с $p - 1$ и p, то отображение $x \longmapsto x^n$ есть автоморфизм мультипликативной группы U. [Использовать упражнение 24в.]

26) а) Пусть p и q — два различных простых числа; верхняя грань $\mathcal{T}$ топологий $\mathcal{T}_p$ и $\mathcal{T}_q$ в $\mathbf{Q}$ локально ограниченна (упражнение 20в) и согласуется со структурой тела в $\mathbf{Q}$. В этой топологии ни одна из последовательностей $((p/q)^n)_{n \geqslant 0}$ и $((q/p)^n)_{n \geqslant 0}$ не ограниченна, но последовательность $(1/p^n)_{n \geqslant 0}$, которая ограниченна, не стремится к 0 (см. упражнение 22г). Показать, что пополнение $\mathbf{Q}$ по топологии $\mathcal{T}$ изоморфно произведению топологических тел $\mathbf{Q}_p$ и $\mathbf{Q}_q$.

б) Пусть P — множество всех простых чисел. Верхняя грань $\mathcal{T}_0$ топологий $\mathcal{T}_p$, где p пробегает P, согласуется со структурой тела в $\mathbf{Q}$, но не является локально ограниченной (упражнение 20в). Что представляет собой пополнение $\mathbf{Q}$ по топологии $\mathcal{T}_0$?

§ 7. Проективные пределы топологических групп и колец

*Во всем этом параграфе I означает непустое предупорядоченное множество, фильтрующееся вправо *), а $\alpha \leqslant \beta$ — отношение предпорядка в I. Если не оговорено противное, все рассматриваемые проективные системы имеют множеством индексов I.*

---

*) Заметим, что определение проективного предела проективной системы множеств $(E_\alpha, f_{\alpha\beta})$ не предполагает, что предупорядоченное множество индексов I — фильтрующееся; читатель проверит без труда, что это предположение совсем не участвует в большинстве определений и результатов этого параграфа, предшествующих предложению 1.

1. *Проективные пределы алгебраических структур*

Пусть $(E_\alpha, f_{\alpha\beta})$ — проективная система множеств и каждое E_α наделено всюду определенным мультипликативно записываемым внутренним законом композиции; предположим, кроме того, что все $f_{\alpha\beta}$ — гомоморфизмы для этих внутренних законов. Так как

$$f_{\alpha\beta}(x_\beta y_\beta) = f_{\alpha\beta}(x_\beta) f_{\alpha\beta}(y_\beta)$$

для $\alpha \leqslant \beta$ и x_β, y_β из E_β, то ясно, что $E = \varprojlim E_\alpha$ есть *устойчивое подмножество* произведения $\prod\limits_\alpha E_\alpha$, наделенного внутренним законом $(x_\alpha)(y_\alpha) = (x_\alpha y_\alpha)$. Пусть $(\Lambda_\alpha, \varphi_{\alpha\beta})$ — вторая проективная система относительно I и каждое E_α наделено всюду определенным мультипликативно записываемым внешним законом композиции, для которого Λ_α служит множеством операторов, причем если $\alpha \leqslant \beta$, то

$$f_{\alpha\beta}(\lambda_\beta x_\beta) = \varphi_{\alpha\beta}(\lambda_\beta) f_{\alpha\beta}(x_\beta)$$

для любых $\lambda_\beta \in \Lambda_\beta$ и $x_\beta \in E_\beta$. Тогда можно наделить $\prod\limits_\alpha E_\alpha$ внешним законом, имеющим $\prod\limits_\alpha \Lambda_\alpha$ множеством операторов, положив $(\lambda_\alpha)(x_\alpha) = (\lambda_\alpha x_\alpha)$; сузив множество операторов до $\Lambda = \varprojlim \Lambda_\alpha$, будем иметь на $\prod\limits_\alpha E_\alpha$ внешний закон, для которого E снова будет *устойчивым множеством*. Мы будем говорить, что так определенный внутренний (соотв. внешний) закон на E есть *проективный предел* внутренних (соотв. внешних) законов, заданных на множествах E_α. В случае внешних законов может случиться, что все Λ_α совпадают с одним и тем же множеством Λ_0, а все $\varphi_{\alpha\beta}$ — тождественные отображения; тогда, если I фильтрующееся, Λ отождествимо с Λ_0.

Непосредственно ясно, что (если отображения $f_{\alpha\beta}$ преобразуют нейтральный элемент в нейтральный элемент) обычные свойства: ассоциативность, коммутативность, существование нейтрального элемента для внутреннего закона, дистрибутивность внешнего закона относительно внутреннего закона и т. д. — сохраняются при переходе к проективному пределу.

Пусть теперь Σ — некоторый род алгебраической структуры, а Σ_0 — *обедненный* род структуры, соответствующий Σ (Алг., гл. I, § 4, n° 1). Говоря о проективной системе множеств $(E_\alpha, f_{\alpha\beta})$, наделенных структурами рода Σ, мы будем всегда предполагать все $f_{\alpha\beta}$ *гомоморфизмами* для этих структур. Если наделить $E = \lim\limits_{\longleftarrow} E_\alpha$ внутренними и внешними законами, получаемыми как проективные пределы соответствующих внутренних и внешних законов, заданных на множествах E_α, то E будет наделено алгебраической структурой *рода* Σ_0. Разумеется, в каждом частном случае нужно будет еще рассмотреть, будет ли это структура рода Σ или нет.

Например, если $(G_\alpha, f_{\alpha\beta})$ — проективная система групп (соотв. колец), то $\lim\limits_{\longleftarrow} G_\alpha$ есть подгруппа (соотв. подкольцо) группы (соотв. кольца) $\prod\limits_\alpha G_\alpha$, называемая *проективным пределом* системы $(G_\alpha, f_{\alpha\beta})$ групп (соотв. колец).

Пусть $(E_\alpha, g_{\alpha\beta})$ — проективная система множеств и $(G_\alpha, f_{\alpha\beta})$— проективная система групп; предположим, что каждое E_α наделено группой операторов G_α и, кроме того, что при $\alpha \leqslant \beta$

$$g_{\alpha\beta}(s_\beta x_\beta) = f_{\alpha\beta}(s_\beta)\, g_{\alpha\beta}(x_\beta) \tag{1}$$

для всех $x_\beta \in E_\beta$, $s_\beta \in G_\beta$. Тогда $E = \lim\limits_{\longleftarrow} E_\alpha$ наделено группой операторов $G = \lim\limits_{\longleftarrow} G_\alpha$. Из (1) вытекает, что при $\alpha \leqslant \beta$ отображения $f_{\alpha\beta}$ и $g_{\alpha\beta}$ согласуются (§ 2, n° 4) и, следовательно, определяют отображение $\varphi_{\alpha\beta}$: $E_\beta/G_\beta \to E_\alpha/G_\alpha$ множеств орбит, причем $(E_\alpha/G_\alpha, \varphi_{\alpha\beta})$ — проективная система. Кроме того, канонические отображения f_α: $G \to G_\alpha$ и g_α: $E \to E_\alpha$ согласуются и потому определяют отображение h_α: $E/G \to E_\alpha/G_\alpha$ множеств орбит; ясно, что эти h_α образуют проективную систему отображений; ее проективный предел h: $E/G \to \lim\limits_{\longleftarrow} E_\alpha/G_\alpha$ *не обязан быть ни инъективным, ни сюръективным* (упражнение 1).

Точно так же пусть $(A_\alpha, \varphi_{\alpha\beta})$ — проективная система колец и $(M_\alpha, f_{\alpha\beta})$ — проективная система коммутативных групп; предположим, что каждое M_α наделено структурой левого A_α-модуля, причем если $\alpha \leqslant \beta$, то

$$f_{\alpha\beta}(\lambda_\beta x_\beta) = \varphi_{\alpha\beta}(\lambda_\beta)\, f_{\alpha\beta}(x_\beta) \tag{2}$$

для всех $x_\beta \in M_\beta$, $\lambda_\beta \in A_\beta$; тогда $\varprojlim M_\alpha$ наделен структурой левого модуля над $\varprojlim A_\alpha$. Если предположить, кроме того, что при любом α кольцо A_α коммутативно, M_α наделено структурой A_α-алгебры и, наконец, что $(M_\alpha, f_{\alpha\beta})$ есть проективная система *колец*, то $\varprojlim M_\alpha$ будет наделено структурой *алгебры* относительно $\varprojlim A_\alpha$.

Пусть $(G_\alpha, f_{\alpha\beta})$ — проективная система групп и H_α для каждого α — подгруппа группы G_α; если $f_{\alpha\beta}(H_\beta) \subset H_\alpha$ при $\alpha \leqslant \beta$, то проективная система множеств $H_\alpha \subset G_\alpha$ есть проективная система групп относительно сужений отображений $f_{\alpha\beta}$ и $H = \varprojlim H_\alpha$ есть *подгруппа* группы $G = \varprojlim G_\alpha$; если каждое H_α есть нормальный делитель группы G_α, то H — нормальный делитель группы G. Пусть $(G'_\alpha, f'_{\alpha\beta})$ — вторая проективная система групп и $u_\alpha \colon G_\alpha \to G'_\alpha$ для каждого α — гомоморфизм с ядром H_α, причем эти u_α образуют проективную систему отображений; тогда $f_{\alpha\beta}(H_\beta) \subset H_\alpha$ для $\alpha \leqslant \beta$, $u = \varprojlim u_\alpha$ есть гомоморфизм G в $G' = \varprojlim G'_\alpha$ и $H = \varprojlim H_\alpha$ есть ядро гомоморфизма u. Положим $K_\alpha = u_\alpha(G_\alpha)$; тогда $f'_{\alpha\beta}(K_\beta) \subset K_\alpha$ при $\alpha \leqslant \beta$, так что K_α образуют проективную систему подгрупп групп G'_α; но $K = \varprojlim K_\alpha$ *не обязательно является образом группы G при отображении u* (упражнение 1в).

Аналогичные результаты получаются, если заменить «группу» «кольцом», а «подгруппу» «идеалом» (левым или правым); мы предоставляем читателю формулировку аналогичных результатов для модулей и алгебр.

2. Проективные пределы топологических групп и пространств с операторами

Проективная система $(G_\alpha, f_{\alpha\beta})$ называется *проективной системой топологических групп*, если все G_α — топологические группы, а все $f_{\alpha\beta}$ — *непрерывные* представления. Тогда $G = \varprojlim G_\alpha$ есть подгруппа группы $\prod_\alpha G_\alpha$; наделенная структурой топологической группы, индуцируемой из $\prod_\alpha G_\alpha$, она называется *проективным*

пределом проективной системы топологических групп $(G_\alpha, f_{\alpha\beta})$. Если все G_α отделимы (соотв. отделимы и полны), то G отделима и замкнута в $\prod\limits_\alpha G_\alpha$ (соотв. отделима и полна) (гл. I, § 8, следствие 2 предложения 7 и гл. 2, § 3, следствие предложения 10).

Если $(G'_\alpha, f'_{\alpha\beta})$ — вторая проективная система топологических групп, а $u_\alpha\colon G_\alpha \to G'_\alpha$ для каждого α — непрерывное представление, причем эти u_α образуют проективную систему отображений, то $u = \varprojlim u_\alpha$ — непрерывное представление G в $G' = \varprojlim G'_\alpha$ (гл. I, § 4, n° 4). Такие же результаты будут иметь место, если заменить «топологическую группу» «топологическим кольцом»; предоставим читателю формулировку аналогичных результатов для топологических модулей (§ 6, n° 6).

Пусть $(E_\alpha, g_{\alpha\beta})$ — проективная система топологических пространств и $(G_\alpha, f_{\alpha\beta})$ — проективная система топологических групп; предположим, что каждая группа G_α *действует непрерывно* в E_α (§ 2, n° 4) и что для $x_\beta \in E_\beta$, $s_\beta \in G_\beta$, $\alpha \leqslant \beta$ имеют место соотношения (1). Как мы видели (n° 1), $E = \varprojlim E_\alpha$ наделено группой операторов $G = \varprojlim G_\alpha$; кроме того, G действует *непрерывно* в E. Действительно, если g_α (соотв. f_α) есть каноническое отображение $E \to E_\alpha$ (соотв. $G \to G_\alpha$), то, по определению,

$$g_\alpha(sx) = f_\alpha(s)\, g_\alpha(x),$$

так что все отображения $(s, x) \mapsto g_\alpha(sx)$ непрерывны на $E \times G$, чем доказана непрерывность отображения $(s, x) \mapsto sx$ (гл. I, § 4, n° 4).

Следовательно, отображение $h_\alpha\colon E/G \to E_\alpha/G_\alpha$, получаемое из f_α и g_α, непрерывно (§ 2, n° 4), и то же справедливо для отображения $h\colon E/G \to \varprojlim E_\alpha/G_\alpha$, получаемого из отображений h_α (гл. I, § 2, предложение 4).

Предложение 1. *Пусть E_α и G_α удовлетворяют предыдущим предположениям.*

a) *Если для всякого $\alpha \in I$ стабилизатор каждой точки из E_α есть компактная подгруппа группы G_α, то стабилизатор каждой*

точки $x = (x_\alpha)$ *из* E *есть компактная подгруппа группы* G, *орбита точки* x (*относительно* G) *канонически гомеоморфна проективному пределу орбит точек* x_α (*относительно групп* G_α) *и каноническое отображение* h: $E/G \to \varprojlim E_\alpha/G_\alpha$ *инъективно*.

б) *Если для всякого* $\alpha \in I$ *орбита каждой точки из* E_α (*относительно* G_α) *компактна, то орбита каждой точки из* E (*относительно* G) *относительно компактна и* h *сюръективно. Если, кроме того,* h *биективно, то орбита каждой точки из* E *компактна.*

Пусть $x = (x_\alpha) \in E$ и $E'_\alpha = G_\alpha x_\alpha$ для каждого $\alpha \in I$ — орбита точки x_α. При $\alpha \leqslant \beta$ из (1) и соотношения $g_{\alpha\beta}(x_\beta) = x_\alpha$ вытекает, что $g_{\alpha\beta}(E'_\beta) \subset E'_\alpha$; иначе говоря, (E'_α) есть проективная система подмножеств множеств E_α. Пусть u_α: $G_\alpha \to E'_\alpha$ для каждого $\alpha \in I$ — непрерывное отображение $s_\alpha \mapsto s_\alpha x_\alpha$; u_α образуют проективную систему отображений и $u = \varprojlim u_\alpha$ есть непрерывное отображение $s \mapsto sx$ группы G в подпространство $E' = \varprojlim E'_\alpha$ пространства E. Предположение пункта а) влечет компактность $\overset{-1}{u}_\alpha(y_\alpha)$ для каждого $y_\alpha \in E'_\alpha$. Так как, кроме того, u_α сюръективно, то условия следствия 2 предложения 8 § 9 главы I выполнены, откуда вытекают первые два утверждения пункта а). Отсюда следует, что если $x = (x_\alpha)$ и $y = (y_\alpha)$ таковы, что x_α и y_α принадлежат одной и той же орбите относительно G_α при любом α, то x и y принадлежат одной и той же орбите относительно G, чем доказана инъективность h.

Точно так же предположение пункта б) влечет, что проективная система канонических отображений v_α: $E_\alpha \to E_\alpha/G_\alpha$ удовлетворяет условиям следствия 2 предложения 8 § 9 главы I; следовательно, ее проективный предел $v = \varprojlim v_\alpha$: $E \to \varprojlim E_\alpha/G_\alpha$ сюръективен и прообраз относительно v любой точки из $\varprojlim E_\alpha/G_\alpha$ компактен. Поскольку v представимо в виде композиции $E \xrightarrow{\psi} E/G \xrightarrow{h} \varprojlim E_\alpha/G_\alpha$, где ψ — каноническое отображение, отсюда вытекают утверждения пункта б).

Следствие 1. *Если все* G_α *компактны, а все* E_α *отделимы, то утверждения пунктов* а) *и* б) *справедливы.*

В самом деле, предположения пунктов а) и б) тогда выполнены, поскольку каждая замкнутая подгруппа группы G_α компактна, а $u_\alpha\colon s_\alpha \mapsto s_\alpha x_\alpha$ — непрерывное отображение компактного пространства в отделимое пространство.

Следствие 2. *Если для каждого $\alpha \in I$ группа G_α действует транзитивно в пространстве E_α, а стабилизатор всякой точки из E_α есть компактная подгруппа группы G_α, то G действует транзитивно в E и стабилизатор каждой точки из E есть компактная подгруппа группы G.*

В самом деле, предположение пункта а) тогда выполнено и $E'_\alpha = E_\alpha$ для каждого α.

Следствие 3. *Предположим, что все G_α отделимы. Пусть K_α для каждого $\alpha \in I$ — компактная подгруппа группы G_α и $f_{\alpha\beta}(K_\beta) \subset K_\alpha$ при $\alpha \leqslant \beta$. Положим $K = \varprojlim K_\alpha$. Тогда каноническое отображение однородного пространства G/K в $\varprojlim G_\alpha/K_\alpha$ есть гомеоморфизм.*

Биективность h вытекает из следствия 1, в котором E_α заменено на G_α, а G_α — на K_α, действующие как группы *правых* переносов (§ 2, n° 5). Пусть φ — каноническое отображение $G \to G/K$ и f_α для каждого α — каноническое отображение $G \to G_\alpha$; если V_α для каждого α пробегает фундаментальную систему открытых окрестностей нейтрального элемента e_α в G_α, то множества $V = \overset{-1}{f_\alpha}(V_\alpha)$ (с переменными α и V_α) образуют фундаментальную систему окрестностей нейтрального элемента e в G (гл. I, § 4, предложение 9), а множества $\varphi(VK)$ — фундаментальную систему окрестностей нейтрального элемента $\varphi(e)$ в G/K. Нужно доказать, что образ при h множества $\varphi(VK)$ содержит некоторую окрестность элемента $h(\varphi(e))$, т. е. что существуют такие $\beta \geqslant \alpha$ и окрестность W_β элемента e_β в G_β, что $\overset{-1}{f_\beta}(W_\beta K_\beta) \subset VK$. Но соотношение $x \in VK$ равносильно существованию такого $y \in K$, что $f_\alpha(xy^{-1}) \in V_\alpha$, т. е. отношению $f_\alpha(x) \in V_\alpha f_\alpha(K)$; иначе говоря, $VK = \overset{-1}{f_\alpha}(V_\alpha f_\alpha(K))$. Пусть $U_\alpha = V_\alpha f_\alpha(K)$; покажем, что существует $\beta \geqslant \alpha$, для которого $K_\beta \subset U_\beta$, где $U_\beta = \overset{-1}{f_{\alpha\beta}}(u_\alpha)$; отсюда уже будет следовать существование такой окрестности W_β

элемента e_β в G_β, что $W_\beta K_\beta \subset U_\beta$ (гл. II, § 4, следствие предложения 4), чем будет установлено требуемое соотношение $\overset{-1}{f}_\beta(W_\beta K_\beta) \subset \subset \overset{-1}{f}_\beta(U_\beta) = VK$. Рассуждая от противного, для каждого $\beta \geqslant \alpha$ положим $M_\beta = K_\beta \cap \complement U_\beta$; поскольку $\overset{-1}{f}_{\beta\gamma}(U_\beta) = U_\gamma$ при $\alpha \leqslant \leqslant \beta \leqslant \gamma$, множества M_β образуют проективную систему компактных подмножеств из G_β (для $\beta \geqslant \alpha$); если бы все они были не пусты, то то же было бы верно и для их проективного предела M (гл. I, § 9, предложение 8). Ясно, что тогда $M \subset K$ и $f_\alpha(M) \subset M_\alpha$; но это невозможно, поскольку $f_\alpha(K) \subset U_\alpha$; полученное противоречие и завершает доказательство.

3. Аппроксимация топологических групп

Пусть G — группа, $(H_\alpha)_{\alpha \in I}$ — убывающее семейство ее нормальных делителей, $G_\alpha = G/H_\alpha$ и $f_{\alpha\beta}$ при $\alpha \leqslant \beta$ — канонический гомоморфизм $G/H_\beta \to G/H_\alpha$, относящий, таким образом, каждому классу T группы $G \bmod H_\beta$ класс $TH_\alpha \bmod H_\alpha$, содержащий T. Очевидно, $(G_\alpha, f_{\alpha\beta})$ — проективная система групп, причем элементами $\widetilde{G} = \varprojlim G_\alpha$ являются убывающие семейства $(T_\alpha)_{\alpha \in I}$, где T_α — класс $G \bmod H_\alpha$ для каждого α. Проективный предел $i\colon s \longmapsto (sH_\alpha)$ канонических гомоморфизмов $G \to G/H_\alpha$ есть гомоморфизм G в $\widetilde{G}$, и прообраз элемента $(T_\alpha) \in \widetilde{G}$ относительно i равен $\bigcap_{\alpha \in I} T_\alpha$. Следовательно, ядром отображения i служит $\bigcap_{\alpha \in I} H_\alpha$, а его образ состоит из всевозможных семейств $(T_\alpha) \in \widetilde{G}$ с *непустым* пересечением.

Предположим теперь, что G — *топологическая группа*; ясно, что если наделить каждое $G_\alpha = G/H_\alpha$ фактортопологией, то $(G_\alpha, f_{\alpha\beta})$ будет проективной системой топологических групп, а $i\colon G \to \widetilde{G}$ — непрерывным представлением.

Предложение 2. *Пусть G — топологическая группа и $(H_\alpha)_{\alpha \in I}$ — убывающее семейство ее нормальных делителей, удовлетворяющее следующему условию*:

(AP) *H_α для каждого $\alpha \in I$ замкнуто в G, и всякая окрестность нейтрального элемента e в G содержит некоторое H_α* (иначе говоря, базис фильтра, состоящий из H_α, сходится к e).

Тогда отображение i: $G \to \widetilde{G} = \varprojlim G/H_\alpha$ *есть строгий морфизм группы* G *на* $i(G)$; $\widetilde{G}$ *отделимо, и* $i(G)$ *плотно в* $\widetilde{G}$; *наконец, ядром отображения* i *служит замыкание* $\{e\}$ *в* G. *Если, кроме того, какое-либо из* H_α *полно, то* i *сюръективно.*

Очевидно, все $G_\alpha = G/H_\alpha$ отделимы (§ 2, предложение 18), и, значит, то же верно для $\widetilde{G}$, подпространства в $\prod_{\alpha \in I} G_\alpha$. Ядро H отображения i является пересечением всех H_α и, значит, замкнутой подгруппой группы G; так как всякая окрестность e содержит некоторое H_α и тем самым H, то заключаем (§ 3, n° 1, формула (1)), что H — замыкание $\{e\}$. Покажем теперь, что $i(G)$ плотно в $\widetilde{G}$. Пусть f_α — каноническое отображение $\widetilde{G} \to G_\alpha$, т. е. сужение на $\widetilde{G}$ проекции pr_α; тогда $\varphi_\alpha = f_\alpha \circ i$ есть каноническое отображение $G \to G/H_\alpha$. Для каждого непустого открытого множества $U \subset \widetilde{G}$ существуют $\alpha \in I$ и непустое открытое множество $U_\alpha \subset G_\alpha$ такие, что $\overset{-1}{f_\alpha}(U_\alpha) \subset U$ (гл. I, § 4, предложение 9), откуда $\overset{-1}{i}(U) \supset \overset{-1}{\varphi_\alpha}(U_\alpha)$; но так как φ_α сюръективно, то $\overset{-1}{i}(U)$ не пусто, чем доказано, что $i(G) \cap U \neq \varnothing$.

Чтобы убедиться в том, что i — строгий морфизм на $i(G)$, рассмотрим окрестность V элемента e в G; существуют такая его окрестность W в G, что $W^2 \subset V$, и такой индекс $\alpha \in I$, что $H_\alpha \subset W$; отсюда заключаем, что V содержит $WH_\alpha = \overset{-1}{\varphi_\alpha}(\varphi_\alpha(W)) = \overset{-1}{i}(\overset{-1}{f_\alpha}(\varphi_\alpha(W)))$; поскольку $\overset{-1}{f_\alpha}(\varphi_\alpha(W))$ — окрестность нейтрального элемента в $\widetilde{G}$, этим наше утверждение доказано (§ 2, предложение 24).

Наконец, предположим, что существует $\gamma \in I$, для которого H_γ полно; чтобы убедиться в сюръективности i, достаточно доказать, что всякое убывающее семейство $(T_\alpha) \in \widetilde{G}$ имеет непустое пересечение. Получаясь из H_γ переносом, T_γ есть полное подпространство в G (как для правой, так и для левой равномерных структур). Кроме того, поскольку всякая окрестность U элемента e в G содержит некоторое H_α, соответствующее множество T_α мало порядка U_d (или U_s); иначе говоря, множество тех T_α, которые содержатся в T_γ, есть базис *фильтра Коши*; следовательно, он сходится в T_γ, и так как все T_α замкнуты в G (ибо

получаются переносом из соответствующего H_α), то их пересечение не пусто, что и требовалось доказать.

Следствие 1. *Если условие* (AP) *выполнено и, кроме того, все отделимые группы* G/H_α *полны, то группа* G *обладает отделимым пополнением, которое отождествимо с* $\widetilde{G}$, *причем отображение* $i\colon G \to \widetilde{G}$ *отождествляется с каноническим отображением* (§ 3, предложение 5).

В самом деле, $\widetilde{G}$ тогда полно (n° 2), и предложение 2 показывает, что $i(G)$ изоморфно отделимой группе, ассоциированной с G; поскольку $i(G)$ плотно в G, отсюда и вытекает следствие 1 (§ 3, предложение 5).

В частности:

Следствие 2. *Пусть* G — *группа и* (H_α) — *убывающее фильтрующееся семейство ее нормальных делителей. Если наделить* G *групповой топологией, для которой* H_α *образуют фундаментальную систему окрестностей нейтрального элемента* e (§ 1, n° 2, пример), *то отделимая группа, ассоциированная с* G, *изоморфна* $G/(\bigcap_\alpha H_\alpha) = G_1$, *группа* G_1 *обладает пополнением и каноническое отображение* $G_1 \to \widetilde{G} = \lim\limits_{\longleftarrow} G/H_\alpha$ *продолжается до изоморфизма группы* $\hat{G} = \hat{G}_1$ *на* $\widetilde{G}$.

В самом деле, подгруппа H_α группы G, будучи открытой, также замкнута (§ 2, следствие предложения 4) и факторгруппа G/H_α дискретна (§ 2, предложение 18); таким образом, условия следствия 1 выполнены.

Всюду далее в этом n° мы предполагаем, что G *отделима*, а (H_α) — фильтрующееся убывающее семейство ее *компактных* нормальных делителей, удовлетворяющее условию (AP); в силу предложения 2 отображение $i\colon G \to \widetilde{G} = \lim\limits_{\longleftarrow} G/H_\alpha$ является тогда *изоморфизмом топологических групп*, позволяющим отождествить G с $\widetilde{G}$; будем обозначать через f_α каноническое отображение $G \to G/H_\alpha$.

Лемма 1. *При условиях предложения 2 для всякого замкнутого множества* $E \subset G$ *имеем* $E = \bigcap_\alpha EH_\alpha$.

В самом деле, E есть пересечение множеств EV, где V пробегает фильтр окрестностей e (§ 3, n° 1, формула (1)), а всякая окрестность e содержит некоторое H_α; отсюда и вытекает требуемое, поскольку $E \subset EH_\alpha$.

Предложение 3. *Предположим, что* G *отделима, а все* H_α *компактны и удовлетворяют условию* (AP).

а) *Пусть* L — *замкнутая подгруппа группы* G; *тогда для каждого* $\alpha \in I$ *подгруппа* $L_\alpha = f_\alpha(L)$ *факторгруппы* $G_\alpha = G/H_\alpha$ *замкнута и сужение изоморфизма* i: $G \to \varprojlim G_\alpha$ *на* L *есть изоморфизм* L *на* $\varprojlim L_\alpha$. *Если, кроме того,* L — *нормальный делитель группы* G, *то* L_α *есть нормальный делитель группы* G_α *для каждого* $\alpha \in A$ *и* i *порождает при факторизации изоморфизм* G/L *на* $\varprojlim G_\alpha/H_\alpha$.

б) *Обратно, пусть* L_α *для каждого* $\alpha \in I$ — *замкнутая подгруппа группы* G_α *и* $L_\alpha = f_{\alpha\beta}(L_\beta)$ *при* $\alpha \leqslant \beta$. *Тогда существует, и притом единственная, замкнутая подгруппа* L *группы* G *такая, что* $L_\alpha = f_\alpha(L)$ *для каждого* $\alpha \in I$; *если, кроме того,* L_α *есть нормальный делитель группы* G_α *при любом* $\alpha \in I$, *то* L — *нормальный делитель группы* G.

а) Поскольку H_α компактно, LH_α замкнуто в G (§ 4, следствие 1 предложения 1) и, следовательно, L_α замкнуто в G_α. Так как i отождествляет топологические группы G и $\varprojlim G_\alpha$, а $\varprojlim L_\alpha$ отождествим с (топологической) подгруппой группы $\varprojlim G_\alpha$, то i отождествляет с $\varprojlim L_\alpha$ подгруппу $\bigcap_\alpha LH_\alpha$ группы G, и для доказательства первого утверждения достаточно заметить, что, по лемме 1, $L = \bigcap_\alpha LH_\alpha$. С другой стороны, если L — нормальный делитель, то для каждого $\alpha \in I$ отображение f'_α: $G/L \to G_\alpha/L_\alpha$, получаемое из f_α посредством факторизации, есть сюръективный строгий морфизм (§ 2, n° 8, замечание 3), ядром которого является *компактный* нормальный делитель $H_\alpha L/L$ группы G/L, канонический образ компактной подгруппы H_α

группы G. Так как подгруппы $H_\alpha L/L$ группы G/L удовлетворяют условию (АР) (§ 2, предложение 24), а G/L отделима, то последнее утверждение пункта а) вытекает из предложения 2.

б) Пусть $f'_{\alpha\beta}$, где $\alpha \leqslant \beta$,— сужение $f_{\alpha\beta}$ на L_β; тогда L_α, $f'_{\alpha\beta}$) — проективная система топологических групп, проективный предел которой L отождествим с подгруппой $G \cap \prod\limits_\alpha L_\alpha$ группы G. По предположению $f'_{\alpha\beta}$ сюръективно и его ядро есть компактная подгруппа $f_\beta(H_\alpha) \cap L_\beta$ группы L_β; следовательно (гл. I, § 9, следствие 1 предложения 8), $L_\alpha = f_\alpha(L)$ для каждого $\alpha \in I$. Если L' — вторая замкнутая подгруппа группы G такая, что $f_\alpha(L') = L_\alpha$ для каждого $\alpha \in I$, то $L'H_\alpha = \overset{-1}{f}_\alpha(L_\alpha)$, откуда (лемма 1) $L' = \bigcap\limits_\alpha L'H_\alpha = \bigcap\limits_\alpha \overset{-1}{f}_\alpha(L_\alpha) = L$. Наконец, последнее утверждение пункта б) вытекает из формулы $L = \bigcap\limits_\alpha \overset{-1}{f}_\alpha(L_\alpha)$, где $\overset{-1}{f}_\alpha(L_\alpha)$ являются тогда нормальными делителями группы G.

Предложение 4. *Пусть G отделима, а все H_α компактны и удовлетворяют условию* (АР). *Если C_α — нейтральная компонента факторгруппы $G_\alpha = G/H_\alpha$, то нейтральная компонента C группы G отождествима с* $\varprojlim C_\alpha$ *и* $f_\alpha(C) = C_\alpha$.

Это предложение вытекает из следующей леммы:

Лемма 2. *Пусть G — отделимая топологическая группа, H — ее компактный нормальный делитель и φ — каноническое отображение $G \to G/H$. Если C — нейтральная компонента группы G, то $\varphi(C)$ — нейтральная компонента группы $G' = G/H$.*

В самом деле, установив эту лемму, будем иметь $f_\alpha(C) = C_\alpha$ для каждого $\alpha \in I$, и так как C есть замкнутая подгруппа группы G (§ 2, предложение 7), то достаточно будет применить предложение 3а.

Для доказательства леммы 2 заметим сначала, что если C' есть связная компонента нейтрального элемента e' в G', то $\varphi(C) \subset C'$, поскольку $\varphi(C)$ связно. Предположим, что $\varphi(C) \neq C'$. Так как C — замкнутый нормальный делитель группы G (§ 2, предложение 7), то $\varphi(C)$ — нормальный делитель группы G'; тогда $\psi(C')$,

где ψ — каноническое отображение $G' \to G'/\varphi(C)$, было бы связным и не сводящимся к нейтральному элементу, так что связная компонента группы $G'/\varphi(C)$ была бы отлична от нейтрального элемента. Но $G'/\varphi(C)$ изоморфна $(G/H)/(HC/H)$ и, значит, G/HC, а следовательно,— также $(G/G)/(HC/C)$ (§ 2, следствие предложения 22 и предложение 20). Но G/C отделима и вполне несвязна (гл. I, § 11, предложение 9), а HC/C — канонический образ компактного нормального делителя H группы G — есть компактная подгруппа группы G/C. Таким образом, дело свелось к доказательству леммы 2 для того случая, когда G, кроме того, *вполне несвязна*, т. е. $C = \{e\}$.

Предположим тогда, что $C' \neq \{e'\}$; заменяя G ее подгруппой $\overset{-1}{\varphi}(C')$, которая вполне несвязна и содержит H, можем предполагать, что G' *связна* и не сводится к одной точке.

Пусть $\mathfrak{M}$ — множество тех замкнутых подгрупп L группы G, для которых $LH = G$; покажем, что $\mathfrak{M}$, упорядоченное отношением $\supset$, *индуктивно*. Действительно, пусть $\mathfrak{T}$ — совершенно упорядоченное подмножество в $\mathfrak{M}$; тогда для каждого $x \in G$ множество всех $xH \cap L$, где L пробегает $\mathfrak{T}$, есть базис фильтра, составленный из замкнутых подмножеств компактного пространства xH; таким образом, пересечение этих множеств не пусто, чем доказано, что пересечение подгрупп $L \in \mathfrak{T}$ по-прежнему принадлежит $\mathfrak{M}$. Применяя теорему Цорна, заключаем поэтому, что в $\mathfrak{M}$ существует *минимальный* элемент L_0. Поскольку H компактна, $G/H = L_0H/H$ изоморфно $L_0/(L_0 \cap H)$ (§ 4, следствие 3 предложения 1), а так как L_0 вполне несвязно и $L_0 \cap H$ компактно, то видим, что G можно заменить на L_0; иначе говоря, можно предполагать дополнительно, что нет *ни одной* замкнутой подгруппы $L \neq G$, для которой бы $LH = G$.

Пусть теперь F — пересечение всех открыто-замкнутых окрестностей e в G; покажем, что F есть замкнутая подгруппа группы G. Действительно, поскольку замкнутость F очевидна, достаточно показать, что $F^{-1}F \subset F$. Но если $x \in F$ и V — открыто-замкнутая окрестность e в G, то это верно и для xV, ибо иначе e принадлежало бы дополнению W к xV в G, которое также открыто-замкнуто, и мы имели бы $x \notin W$, откуда по определению $x \notin F$, в противоречие с предположением. Отсюда следует, что xF, как пересечение множеств xV, где V пробегает все открыто-замкнутые

окрестности e, содержит F, т. е. $x^{-1}F \subset F$, чем наше утверждение доказано. Так как G вполне несвязна и не сводится к e, то $F \neq G$. Но если V — открыто-замкнутая окрестность e в G, то VH тоже открыто-замкнуто в G (§ 4, следствие 1 предложения 1) и, значит, $\varphi(V)$ открыто-замкнуто в G/H, так что в силу предположения $\varphi(V) = G/H$. Но отсюда будет следовать, что, в противоречие со сделанным выше дополнительным предположением, $FH = G$, чем лемма и будет доказана. Действительно, xH для каждого $x \in G$ пересекается с любой открыто-замкнутой окрестностью V элемента e, а значит,— также с пересечением F этих окрестностей, поскольку множества $V \cap xH$ образуют базис фильтра в компактном пространстве xH, состоящий из замкнутых множеств. Тем самым лемма доказана.

Замечание. Если подгруппа H_α компактна для *некоторого* $\alpha \in I$, то H_β компактна для всякого $\beta \geqslant \alpha$, как замкнутая подгруппа группы H_α. Поскольку множество тех $\beta \in I$, которые $\geqslant \alpha$, кофинально с I, для исследования группы G, по существу, безразлично, предполагать ли компактность одного или *всех* H_α.

4. *Применение к проективным пределам*

Предложение 5. *Пусть* $(G_\alpha, f_{\alpha\beta})$ — *проективная система отделимых топологических групп, в которой все* $f_{\alpha\beta}$ — *сюръективные строгие морфизмы с компактными ядрами. Тогда каноническое отображение* f_α *группы* $G = \varprojlim G_\alpha$ *в* G_α *есть сюръективный строгий морфизм с компактным ядром для каждого* $\alpha \in I$.

То, что f_α сюръективно и имеет компактное ядро, вытекает из следствия 1 предложения 8 § 9 главы I. Остается убедиться в том, что f_α — строгий морфизм. Всякая окрестность V нейтрального элемента e в G содержит множество вида $\overset{-1}{f_\beta}(V_\beta)$, где V_β — окрестность нейтрального элемента e_β в G_β и можно считать $\beta \geqslant \alpha$; так как $f_{\alpha\beta}$ — сюръективный строгий морфизм, то $f_{\alpha\beta}(V_\beta)$ есть окрестность элемента e_α в G_α, и в силу сюръективности f_β имеем $V_\beta \subset f_\beta(V)$, откуда

$$f_\alpha(V) = f_{\alpha\beta}(f_\beta(V)) \supset f_{\alpha\beta}(V_\beta),$$

чем доказано, что $f_\alpha(V)$ есть окрестность e_α в G_α.

Компактные нормальные делители $H_\alpha = \overset{-1}{f_\alpha}(e_\alpha)$ группы G, очевидно, удовлетворяют условию (AP) n° 3, и G_α отождествимо с G/H_α. Предложения 3 и 4 применимы, в частности, к G и H_α.

Следствие 1. *Пусть $(G_\alpha, f_{\alpha\beta})$ — проективная система топологических групп, удовлетворяющая условиям предложения 5, $(G'_\alpha, f'_{\alpha\beta})$ — проективная система топологических групп и u_α: $G_\alpha \to G'_\alpha$ для каждого α — сюръективный строгий морфизм с компактным ядром, причем u_α образуют проективную систему отображений. Тогда $u = \varprojlim u_\alpha$ есть строгий морфизм группы $G = \varprojlim G_\alpha$ на $G' = \varprojlim G'_\alpha$, имеющий компактное ядро.*

Пусть N_α — ядро u_α; тогда $L_\alpha = \overset{-1}{f_\alpha}(N_\alpha)$ — ядро сюръективного строгого морфизма $v_\alpha = u_\alpha \circ f_\alpha$: $G \to G'_\alpha$; так как L_α/H_α изоморфно N_α (§ 2, предложение 20), то L_α есть компактный нормальный делитель группы G (§ 4, следствие 2 предложения 2). Ядро L морфизма u есть пересечение всех L_α; обозначим через φ каноническое отображение $G \to G/L$; тогда $v_\alpha = w_\alpha \circ \varphi$, где w_α — строгий морфизм G/L на G'_α с ядром L_α/L. Так как пересечением всех L_α/L служит нейтральный элемент группы G/L, а L_α/L образуют базис фильтра и компактны, то этот базис фильтра сходится к нейтральному элементу группы G/L (гл. I, § 9, следствие теоремы 1). Предложение 2 показывает тогда, что $w = \varprojlim w_\alpha$ есть *изоморфизм* G/L на G'; поэтому $w \circ \varphi$ есть строгий морфизм G на G' с ядром L; но, очевидно, $u = w \circ \varphi$, и следствие доказано.

Следствие 2. *Пусть $(G_\alpha, f_{\alpha\beta})$ — проективная система топологических групп, удовлетворяющая условиям предложения 5, и G' — топологическая группа, в которой существует окрестность V' нейтрального элемента e', не содержащая ни одной отличной от $\{e'\}$ подгруппы группы G'. Тогда для каждого непрерывного представления v: $G \to G'$ существуют индекс $\alpha \in I$ и непрерывное представление v_α: $G_\alpha \to G'$ такие, что $v = v_\alpha \circ f_\alpha$.*

В самом деле, поскольку $\overset{-1}{v}(V')$ есть окрестность e в G, существуют индекс α и окрестность V_α элемента e_α в G_α такие, что

$\overset{-1}{f_\alpha}(V_\alpha) \subset \overset{-1}{v}(V')$. Поэтому $v(H_\alpha) \subset V'$, и так как $v(H_\alpha)$ — подгруппа группы G', то $v(H_\alpha) = \{e'\}$. Поскольку f_α отождествимо с каноническим отображением $G \to G/H_\alpha$, справедливость следствия вытекает из канонического разложения непрерывного представления (§ 2, n° 8).

Упражнения

1) а) Показать, что кольцо $\mathbf{Z}_p$ целых p-адических чисел (§ 6, упражнение 23а) изоморфно проективному пределу последовательности дискретных колец $\mathbf{Z}/(p^n)$ относительно канонических гомоморфизмов f_{nm}: $\mathbf{Z}/(p^m) \to \mathbf{Z}/(p^n)$ $(n \leqslant m)$ (где $\mathbf{Z}/(p^n)$ рассматривается как факторкольцо кольца $\mathbf{Z}/(p^m)$).

б) Пусть G_n для каждого $n > 0$ — группа $\mathbf{Z}$ целых рациональных чисел, E_n — ее факторгруппа $\mathbf{Z}/(p^n)$ (p — простое), причем G_n и E_n наделены дискретной топологией. Будем рассматривать (G_n) как проективную систему с тождественными отображениями $G_m \to G_n$, а (E_n) — как проективную систему, в которой f_{nm}: $E_m \to E_n$ $(n \leqslant m)$ — канонические гомоморфизмы (см. а)). Тогда орбита относительно G_n всякой точки из E_n компактна, но орбита относительно $G = \varprojlim G_n$ точки $x = (x_n)$ проективного предела $E = \varprojlim E_n$ не компактна и не изоморфна проективному пределу орбит точек x_n, а каноническое отображение $E/G \to \varprojlim E_n/G_n$ не инъективно.

в) Пусть G_n для каждого $n > 0$ — подгруппа $p^n\mathbf{Z}$ группы $\mathbf{Z}$ (p — простое) и E_n — группа $\mathbf{Z}$, причем G_n и E_n наделены дискретной топологией и G_n действует как группа переносов в E_n. Рассмотрим (E_n) и (G_n) как проективные системы, в которых $E_m \to E_n$ $(n \leqslant m)$ — тождественные отображения, а $G_m \to G_n$ — канонические инъекции. Тогда стабилизатор всякой точки из E_n (относительно G_n) компактен, орбита всякой точки из $E = \varprojlim E_n$ относительно $G = \varprojlim G_n$ компактна, но каноническое отображение $E/G \to \varprojlim E_n/G_n$ не сюръективно.

г) Найти с помощью б) и в) пример проективной системы пространств с операторами (E_α), с проективной системой групп операторов (G_α), в котором бы каноническое отображение $E/G \to \varprojlim E_\alpha/G_\alpha$, где $E = \varprojlim E_\alpha$ и $G = \varprojlim G_\alpha$, не было ни инъективным, ни сюръективным.

2) Пусть $(E_\alpha, f_{\alpha\beta})$ — проективная система непустых множеств, для которой $\varprojlim E_\alpha = \varnothing$. Обозначим через G_α свободный $\mathbf{Z}$-модуль формальных линейных комбинаций элементов множества E_α с коэффи-

циентами из $\mathbf{Z}$ (Алг., гл. II, § 1, n° 8), через $g_{\alpha\beta}$ — представление $G_\beta \longrightarrow G_\alpha$, сводящееся к $f_{\alpha\beta}$ на E_β. Показать, что группа $\varprojlim G_\alpha$ сводится к нейтральному элементу. [Рассуждая от противного, рассмотреть для элемента $z=(z_\alpha)$ из $\varprojlim G_\alpha$ и каждого α конечное множество F_α элементов из E_α, коэффициенты при которых в z_α отличны от нуля, заметив, что $f_{\alpha\beta}(F_\beta)=F_\alpha$.] Получить отсюда пример проективной системы групп $(G_\alpha, g_{\alpha\beta})$, в котором все $g_{\alpha\beta}$ сюръективны, G_α бесконечны, а $\varprojlim G_\alpha$ сводится к нейтральному элементу. [См. Теор. мн., гл. III, § 1, упражнение 32.]

*3) а) Показать, что всякая вполне несвязная компактная группа есть проективный предел семейства конечных дискретных групп. [Использовать упражнение 18 § 4.]

б) Пусть G — вполне несвязная компактная группа и L — ее замкнутая подгруппа. Доказать существование непрерывного сечения $G/L \to G$, ассоциированного с каноническим отображением $G \to G/L$. [Использовать а) и предложение 3; рассмотреть для каждого α конечное множество F_α сечений $G_\alpha/L_\alpha \to G_\alpha$ и заметить, что эти множества образуют проективную систему относительно канонических сюръективных отображений $h_{\alpha\beta}$: $F_\beta \to F_\alpha$.]

4) Пусть G — отделимая топологическая группа и (H_α) — фильтрующееся семейство ее компактных нормальных делителей, удовлетворяющее условию (AP) n° 3. Пусть (L_α) — семейство замкнутых подгрупп группы G такое, что $H_\alpha \subset L_\alpha$ при любом $\alpha \in I$ и $L_\alpha = H_\alpha L_\beta$ при $\alpha \leqslant \beta$; положим $L = \bigcap_\alpha L_\alpha$. Показать, что $L_\alpha = H_\alpha L$ для каждого α. [Использовать предложение 3.]

5) Пусть G — отделимая топологическая группа, E — отделимое топологическое пространство, в котором G действует непрерывно, и (H_α) — фильтрующееся убывающее семейство компактных нормальных делителей группы G, удовлетворяющее условию (AP) n° 3; положим $E_\alpha = E/H_\alpha$. Показать, что каноническое отображение $E \to \varprojlim E_\alpha$ есть гомеоморфизм.

*°6) Пусть $(G_n, f_{nm})_{n\in\mathbf{N}}$ — проективная система компактных групп $G_n = \mathbf{T} = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ для каждого n, а f_{nm} $(n \leqslant m)$ — непрерывное представление $x \longmapsto p^{m-n}x$ с заданным простым p группы $\mathbf{T}$ в себя. Топологическая группа $\mathbf{T}_p = \varprojlim G_n$ называется *p-адическим соленоидом*; это — связная компактная коммутативная группа.

а) Непрерывное представление $\mathbf{T}_p \to G_n$ для каждого n сюръективно, и его ядро изоморфно группе $\mathbf{Z}_p$ целых p-адических чисел (см. упражнение 1а).

б) Пусть φ — канонический гомоморфизм $\mathbf{R} \to \mathbf{R}/\mathbf{Z} = \mathbf{T}$. Для каждого $x \in \mathbf{R}$ положим $\theta(x) = (\varphi(x/p^n))_{n\in\mathbf{N}}$; показать, что θ есть

инъективное непрерывное представление $\mathbf{R}$ в $\mathbf{T}_p$, а $\theta(\mathbf{R})$ — всюду плотная подгруппа в $\mathbf{T}_p$.

в) Пусть I — открытый интервал в $\mathbf{R}$ с центром 0 и длиной <1; показать, что подпространство $\overset{-1}{f_0}(\varphi(I))$ в $\mathbf{T}_p$ гомеоморфно произведению $I \times \mathbf{Z}_p$. В частности, группа $\mathbf{T}_p$ не является локально связной.

г) Показать, что всякая замкнутая подгруппа группы $\mathbf{T}_p$, отличная от $\mathbf{T}_p$ и $\{0\}$, вполне несвязна и изоморфна группе вида $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ или $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}) \times \mathbf{Z}_p$, где n — целое число, взаимно простое с p. [Использовать предложение 3.]

д) Показать, что $\mathbf{T}_p$ есть *неразложимое* связное компактное пространство, т. е. что не существует его покрытия, которое бы состояло из двух связных компактных множеств P, Q, отличных от $\mathbf{T}_p$. [Заметить, что существует такое целое n, что $f_n(P) \neq G_n$ и $f_n(Q) \neq G_n$, и для получения противоречия рассмотреть множества $f_{n+1}(P)$ и $f_{n+1}(Q)$.]

ИСТОРИЧЕСКИЙ ОЧЕРК

К ГЛАВЕ III

Римские цифры относятся к библиографии, помещенной в конце настоящего очерка.)

Общая теория топологических групп является одной из самых молодых ветвей анализа; однако отдельные топологические группы были известны уже давно, а во второй половине XIX века Софус Ли создал обширную теорию топологических групп, названных им «непрерывными группами» и известных в настоящее время под названием «групп Ли»; читатель найдет более полные сведения о возникновении и развитии этой теории в Историческом очерке к книге этого трактата, которая будет ей посвящена.

Начало изучению общих топологических групп положил в 1926 г. О. Шрейер (I); оно сделалось с тех пор объектом многочисленных работ, которые позволили выяснить в значительной мере структуру локально компактных групп. Мы имели в виду дать здесь только самые элементарные определения и результаты теории и отсылаем читателя, интересующегося более углубленным изложением, к монографиям Л. Понтрягина (II), А. Вейля (III) и Д. Монтгомери — Л. Циппина (IV).

БИБЛИОГРАФИЯ

(I) O. Schreier, Abstrakte kontinuierliche Gruppen, Hamb. Abh., т. IV, 1926, стр. 15.

(II) Л. С. Понтрягин, Непрерывные группы, 2-е изд., Гостехиздат, Москва, 1954.

(III) A. Weil, L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications, Actual. Scient. et Ind., 2-е изд., n° 869—1145, Paris (Hermann), 1953. [Русск. перевод с первого издания: А. Вейль, Интегрирование в топологических группах и его применения, ИЛ, Москва, 1950.]

(IV) D. Montgomery — L. Zippin, Topological transformation groups, New York (Interscience), 1955.

ГЛАВА IV

ВЕЩЕСТВЕННЫЕ ЧИСЛА

§ 1. Определение вещественных чисел

1. *Упорядоченная группа рациональных чисел*

В алгебре (Алг., гл. I, § 9, n° 5) определяется отношение порядка $x \leqslant y$ в множестве $\mathbf{Q}$ всех рациональных чисел; оно превращает $\mathbf{Q}$ в *совершенно упорядоченное* множество и притом *согласуется* со структурой *аддитивной группы* в $\mathbf{Q}$, т. е. (Алг., гл. VI, § 1, n° 1) для каждого $z \in \mathbf{Q}$ отношение $x \leqslant y$ эквивалентно отношению $x+z \leqslant y+z$ (что выражают еще, говоря, что *порядок инвариантен относительно переносов*). Напомним, что в $\mathbf{Q}$ (как и во всякой совершенно упорядоченной группе) вводятся обозначения

$$x^{+} = \sup(x, 0), \quad x^{-} = \sup(-x, 0) = (-x)^{+}, \quad |x| = \sup(x, -x);$$

$|x|$ называют *абсолютным значением* x; имеют место равенства

$$x = x^{+} - x^{-}, \qquad |x| = x^{+} + x^{-}$$

и *неравенство треугольника*

$$|x+y| \leqslant |x| + |y|, \tag{1}$$

из которого непосредственно вытекает также неравенство

$$||x| - |y|| \leqslant |x-y|; \tag{2}$$

точно так же

$$|x^{+} - y^{+}| \leqslant |x-y|. \tag{3}$$

Отношения $x \geqslant 0$, $x = x^{+}$, $x^{-} = 0$, $|x| = x$ (соотв. $x \leqslant 0$, $x = -x^{-}$, $x^{+} = 0$, $|x| = -x$) равносильны. Отношение $|x| = 0$ равносильно отношению $x = 0$; при $a \geqslant 0$ отношение $|x| \leqslant a$ равносильно отношению $-a \leqslant x \leqslant a$, а отношение $|x| \geqslant a$ —

отношению «$x \geqslant a$ или $x \leqslant -a$». Каковы бы ни были $x, y, z \in \mathbf{Q}$, имеем

$$\sup(x, y) + z = \sup(x + z, y + z), \tag{4}$$
$$\inf(x, y) = -\sup(-x, -y) \tag{5}$$

и, в качестве частных случаев,

$$\sup(x, y) = x + (y - x)^{+} = x + (x - y)^{-}, \tag{6}$$
$$\inf(x, y) = x - (y - x)^{-} = x - (x - y)^{+}. \tag{7}$$

Наконец, обозначая через $\mathbf{Q}_+$ множество всех рациональных чисел $\geqslant 0$, имеем

$$\mathbf{Q}_+ + \mathbf{Q}_+ \subset \mathbf{Q}_+, \tag{8}$$
$$\mathbf{Q}_+ \cap (-\mathbf{Q}_+) = \{0\}, \tag{9}$$
$$\mathbf{Q}_+ \cup (-\mathbf{Q}_+) = \mathbf{Q}. \tag{10}$$

Отношение $x \leqslant y$ *равносильно* отношению $y - x \in \mathbf{Q}_+$.

С помощью этого отношения порядка мы определим в $\mathbf{Q}$ *топологию, согласующуюся с его структурой аддитивной группы.*

2. *Рациональная прямая*

Рассмотрим множество $\mathfrak{F}$ *симметричных открытых интервалов* $]-a, +a[$, где a пробегает множество всех рациональных чисел > 0; мы покажем, что $\mathfrak{F}$ есть *фундаментальная система окрестностей нуля* для топологии, согласующейся со структурой аддитивной группы в $\mathbf{Q}$.

$\mathbf{Q}$ есть коммутативная группа и аксиома $(\mathrm{GV}'_{\mathrm{II}})$ очевидно выполнена; достаточно, таким образом, убедиться в том, что выполнена также аксиома $(\mathrm{GV}'_{\mathrm{I}})$, т. е. что для любого $a > 0$ существует $b > 0$ такое, что условия $|x| < b$, $|y| < b$ влекут $|x + y| < a$; но в силу неравенства треугольника для этого достаточно взять $b = \frac{a}{2}$.

Определение 1. *Рациональной прямой называется топологическое пространство, полученное путем наделения множества* $\mathbf{Q}$ *топологией группы с фундаментальной системой окрестностей нуля, образованной симметричными открытыми интервалами* $]-a, +a[$ $(a > 0)$.

Определенная таким образом топологическая группа $\mathbf{Q}$ *называется аддитивной группой рациональной прямой.*

Каково бы ни было рациональное число $a > 0$, существует целое число $n > 0$ такое, что $\frac{1}{n} < a$; тем самым открытые интервалы $\left]-\frac{1}{n}, +\frac{1}{n}\right[$ $(n = 1, 2, \ldots)$ образуют фундаментальную систему окрестностей нуля на рациональной прямой.

Фундаментальную систему окрестностей произвольной точки $x \in \mathbf{Q}$ получим, взяв открытые интервалы $]x-a, x+a[$, где a пробегает множество всех рациональных чисел > 0 (или только множество чисел $\frac{1}{n}$).

Таким образом, определение 1 равносильно определению, данному нами в главе I, § 1, n° 2.

Для любой пары (a, b), где $a < b$, существует $c \in \mathbf{Q}$ такое, что $a < c < b$ (например, $c = \frac{a+b}{2}$); отсюда следует, что рациональная прямая есть *отделимое* и *недискретное* пространство.

Пусть U_a для каждого $a > 0$ означает множество всех пар $(x, y) \in \mathbf{Q} \times \mathbf{Q}$ таких, что $|x - y| < a$; когда a пробегает множество всех рациональных чисел >0 (или только множество чисел $\frac{1}{n}$), множества U_a образуют *фундаментальную систему окружений* равномерной структуры аддитивной группы $\mathbf{Q}$ рациональной прямой. Неравенства (2) и (3) показывают, что $|x|$, x^+ и x^- *равномерно непрерывны* на $\mathbf{Q}$. Отсюда следует, что функции $\sup(x, y)$ и $\inf(x, y)$ равномерно непрерывны на $\mathbf{Q} \times \mathbf{Q}$.

3. *Числовая прямая и вещественные числа*

Определение 2. $\mathbf{R}$ *будет означать топологическую группу, являющуюся пополнением аддитивной группы* $\mathbf{Q}$ *рациональной прямой. Элементы из* $\mathbf{R}$ *называются вещественными числами; как топологическое пространство,* $\mathbf{R}$ *называется числовой прямой, а как топологическая группа — аддитивной группой числовой прямой.*

$\mathbf{Q}$ всегда будет отождествляться с канонически изоморфной ей всюду плотной подгруппой группы $\mathbf{R}$; при этом условии всякое рациональное число есть вещественное число. Всякое

не рациональное вещественное число называется *иррациональным*; в главе II, § 3, n° 3, мы видели, что такие числа существуют (другим способом это будет показано в n° 3 § 3 настоящей главы; см. также упражнение 2 § 2); тем самым (гл. III, § 2, n° 1) множество $\complement \mathbf{Q}$ иррациональных чисел *всюду плотно* в $\mathbf{R}$.

Покажем, что *структуру порядка* в $\mathbf{Q}$ можно *продолжить* на $\mathbf{R}$ так, чтобы продолженная структура порядка согласовалась со структурой аддитивной группы в $\mathbf{R}$.

Предложение 1. *Отношение* $y-x \in \overline{\mathbf{Q}}_+$ *есть отношение порядка в* $\mathbf{R}$, *которое превращает* $\mathbf{R}$ *в совершенно упорядоченное множество, согласуется со структурой аддитивной группы в* $\mathbf{R}$ *и индуцирует в* $\mathbf{Q}$ *отношение порядка* $x \leqslant y$.

Покажем прежде всего, что отношения $y-x \in \overline{\mathbf{Q}}_+$ и $z-y \in \overline{\mathbf{Q}}_+$ влекут $z-x \in \overline{\mathbf{Q}}_+$; в самом деле, так как функция $x+y$ непрерывна на $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$, то на основании (8) имеем $\overline{\mathbf{Q}}_+ + \overline{\mathbf{Q}}_+ \subset \overline{\mathbf{Q}}_+$ (гл. I, § 2, теорема 1). Во-вторых, покажем, что отношения $y-x \in \overline{\mathbf{Q}}_+$ и $x-y \in \overline{\mathbf{Q}}_+$ влекут $x=y$, чем будет установлено, что $y-x \in \overline{\mathbf{Q}}_+$ есть *отношение порядка* в $\mathbf{R}$. Докажем для этого, что $\overline{\mathbf{Q}}_+ \cap (-\overline{\mathbf{Q}}_+) = \{0\}$. Ввиду равномерной непрерывности функций $x \mapsto x^+$ и $x \mapsto x^-$ на $\mathbf{Q}$, их можно продолжить по непрерывности на $\mathbf{R}$ (гл. II, § 3, теорема 2); пусть f и g — соответственно продолжения этих функций. По продолжению имеем $x = f(x) - g(x)$, каково бы ни было $x \in \mathbf{R}$; для $x \in \overline{\mathbf{Q}}_+$ имеем $g(x) = 0$; с другой стороны, так как (вследствие непрерывности $-x$) $-\overline{\mathbf{Q}}_+$ есть замыкание $-\mathbf{Q}_+$, то $f(x) = 0$ для $x \in -\overline{\mathbf{Q}}_+$. Таким образом, если $x \in \overline{\mathbf{Q}}_+ \cap (-\overline{\mathbf{Q}}_+)$, то $f(x) = g(x) = 0$, откуда $x = 0$.

На основании (10) имеем $\overline{\mathbf{Q}}_+ \cup (-\overline{\mathbf{Q}}_+) = \mathbf{R}$, так что $\mathbf{R}$ *совершенно упорядочено* отношением порядка $y-x \in \overline{\mathbf{Q}}_+$.

С другой стороны, поскольку отношения $y-x \in \overline{\mathbf{Q}}_+$ и $(y+z)-(x+z) \in \overline{\mathbf{Q}}_+$ равносильны, отношение порядка $y-x \in \overline{\mathbf{Q}}_+$ согласуется со структурой аддитивной группы в $\mathbf{R}$.

Наконец, если x и y принадлежат $\mathbf{Q}$, отношения $y-x \in \overline{\mathbf{Q}}_+$ и $y-x \in \mathbf{Q}_+$ равносильны; это показывает, что отношение порядка $y-x \in \overline{\mathbf{Q}}_+$ индуцирует в $\mathbf{Q}$ отношение $x \leqslant y$, чем дока-

зательство и завершается. Отношение $y - x \in \overline{\mathbf{Q}}_+$ будет записываться снова в виде $x \leqslant y$.

$\overline{\mathbf{Q}}_+$ совпадает с множеством всех чисел $x \geqslant 0$ из $\mathbf{R}$; мы будем обозначать его $\mathbf{R}_+$; это — *замкнутое* множество. $\mathbf{R}_+^*$ будет обозначать множество всех чисел $x > 0$; оно является дополнением к $-\mathbf{R}_+$ и тем самым *открытым* множеством в $\mathbf{R}$.

4. *Свойства интервалов из* R

Предложение 2. *Всякий замкнутый* (соотв. *открытый*) *интервал из* $\mathbf{R}$ *есть замкнутое* (соотв. *открытое*) *множество в* $\mathbf{R}$.

В самом деле, множества $[a, \rightarrow[\ = a + \mathbf{R}_+$ и $]\leftarrow, a] = a - \mathbf{R}_+$ получаются путем переноса соответственно $\mathbf{R}_+$ и $-\mathbf{R}_+$ и потому (гл. III, § 1, n° 1) замкнуты; множества $]\leftarrow, a[$ и $]a, \rightarrow[$, как их дополнения, открыты; наконец, замкнутый интервал $[a, b]$ (соотв. открытый интервал $]a, b[$), являясь пересечением интервалов $[a, \rightarrow[$ и $]\leftarrow, b]$ (соотв. $]a, \rightarrow[$ и $]\leftarrow, b[$), есть замкнутое (соотв. открытое) множество.

Таким образом, замкнутые интервалы $[-a, +a]$ $(a > 0)$ числовой прямой $\mathbf{R}$ являются окрестностями нуля; покажем, что они образуют *фундаментальную систему окрестностей нуля*, когда a пробегает $\mathbf{R}_+^*$. Для этого достаточно установить следующее предложение:

Предложение 3. *Когда r пробегает множество всех рациональных чисел >0, интервалы $S_r = [-r, +r]$ числовой прямой* $\mathbf{R}$ *образуют фундаментальную систему окрестностей нуля.*

В самом деле (гл. III, § 3, предложение 7), фундаментальную систему окрестностей нуля в $\mathbf{R}$ можно получить, беря *замыкания* в $\mathbf{R}$ интервалов $S_r \cap \mathbf{Q} = [-r, +r]$ *рациональной прямой* $\mathbf{Q}$. Предложение будет доказано, если мы установим, что S_r есть замыкание множества $S_r \cap \mathbf{Q}$. Поскольку S_r замкнуто в $\mathbf{R}$, достаточно показать, что всякое вещественное число x такое, что $-r < x < r$, есть точка прикосновения для $S_r \cap \mathbf{Q}$. Но так как $]-r, +r[$ — открытое множество в $\mathbf{R}$, то для всякой достаточно малой окрестности V нуля в $\mathbf{R}$ имеем $x + V \subset\ ]-r, +r[$; поскольку $\mathbf{Q}$ всюду плотно в $\mathbf{R}$, существует рациональное число $r' \in x + V$; тогда $-r < r' < r$, т. е. $r' \in S_r \cap \mathbf{Q}$.

Следствие. *Всякая точка числовой прямой обладает счетной фундаментальной системой окрестностей.*

Предложение 4. *Для любой пары вещественных чисел* (x, y), *где* $x < y$, *существует рациональное число* r *такое, что* $x < r < y$.

Так как $\mathbf{Q}$ всюду плотно в $\mathbf{R}$, то достаточно убедиться в том, что $]x, y[$ *не пусто*; путем переноса вопрос сводится к случаю, когда $x = 0$, $y > 0$. Но так как $\mathbf{R}$ — отделимое пространство, то по предложению 3 существует рациональное число $r > 0$ такое, что $y \notin [-r, +r]$, откуда $0 < r < y$.

Предложение 5. *Пусть* I — *произвольный интервал числовой прямой* $\mathbf{R}$. *Топология, индуцируемая в* I *из* $\mathbf{R}$, *порождается множеством всех открытых интервалов множества* I (рассматриваемого как множество, совершенно упорядоченное отношением $x \leqslant y$).

Всякий открытый интервал из I является следом на I открытого интервала из $\mathbf{R}$; для ограниченного интервала это очевидно; неограниченный же интервал $]a, \rightarrow[$ *в* I есть след неограниченного интервала $]a, \rightarrow[$ *из* $\mathbf{R}$; таким образом, достаточно рассмотреть только случай $I = \mathbf{R}$; но тогда требуемое следует из предложения 3, ибо всякая окрестность точки $x \in \mathbf{R}$ содержит некоторый открытый интервал $]x - a, x + a[$.

Замечание. Пусть A — множество, *всюду плотное* в $\mathbf{R}$; тогда топология в $\mathbf{R}$ порождается также множеством всех открытых интервалов, концы которых принадлежат A. В самом деле, если $]x - a, x + a[$ — открытый интервал, содержащий x, то существуют точки y, z из A такие, что $x - a < y < x$ и $x < z < x + a$; таким образом, интервал $]y, z[$ содержит x и содержится в $]x - a, x + a[$. Это рассуждение показывает также, что рассматриваемые интервалы образуют *базис* (гл. I, § 1, n° 3) топологии числовой прямой $\mathbf{R}$. В частности, беря $A = \mathbf{Q}$, видим, что топология числовой прямой $\mathbf{R}$ обладает *счетным базисом*.

5. Длина интервала

Определение 3. *Длиной ограниченного интервала с началом* a *и концом* b *называют вещественное число* $b - a \geqslant 0$.

Таким образом, всякий ограниченный интервал, содержащий более одной точки, имеет длину >0. Интервалы $[a, b]$, $]a, b[$,

$]a, b[$, $]a, b]$, где $a \leqslant b$, обладают одной и той же длиной. Интервал с концами $a + c$ и $b + c$ имеет ту же длину, что и интервал с концами a и b; другими словами, *длина интервала инвариантна относительно переноса.*

Если $a \leqslant c \leqslant d \leqslant b$, то $d - c \leqslant b - a$; таким образом, если ограниченный интервал I содержится в ограниченном интервале I', то длина I не превышает длины I'.

Пусть $I_1, I_2, \ldots, I_n$ — попарно непересекающиеся открытые интервалы, содержащиеся в интервале $[a, b]$ $(a < b)$; пусть $I_k =]c_k, d_k[$; индукцией по n легко убеждаемся в существовании перестановки σ индексов k $(1 \leqslant k \leqslant n)$ такой, что $d_{\sigma(k)} \leqslant c_{\sigma(k+1)}$ $(1 \leqslant k \leqslant n - 1)$. Отсюда сразу следует, что сумма длин интервалов I_k самое большее равна длине интервала $[a, b]$; при этом она может быть равна ей, только если $c_{\sigma(1)} = a$, $d_{\sigma(n)} = b$ и $d_{\sigma(k)} = c_{\sigma(k+1)}$ $(1 \leqslant k \leqslant n - 1)$.

6. *Аддитивная равномерная структура в* R

Поскольку $\mathbf{R}$ — совершенно упорядоченная группа, функции x^+, x^- и $|x|$ определяются на $\mathbf{R}$ так же, как и на $\mathbf{Q}$, и удовлетворяют всем отмеченным выше для $\mathbf{Q}$ соотношениям (1) — (7). Пусть a — вещественное число > 0 и U_a — множество всех пар $(x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ таких, что $|x - y| < a$; когда a пробегает множество всех вещественных чисел > 0 (или только множество чисел $\frac{1}{n}$), множества U_a образуют *фундаментальную систему окружений* равномерной структуры аддитивной группы $\mathbf{R}$ числовой прямой (называемой также *аддитивной равномерной структурой числовой прямой*).

Функции $|x|$, x^+ и x^- *равномерно непрерывны* на $\mathbf{R}$, функции $\sup(x, y)$ и $\inf(x, y)$ *равномерно непрерывны* на $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$; следовательно, эти функции совпадают с теми, которые получаются путем *продолжения по непрерывности* одноименных функций, определенных соответственно на $\mathbf{Q}$ и $\mathbf{Q} \times \mathbf{Q}$.

Упражнения

1) Говорят, что топология $\mathscr{T}$ в упорядоченной коммутативной группе G *согласуется* со структурой упорядоченной группы, если она согласуется со структурой группы G и множество G_+ элементов $x \geqslant 0$ *замкнуто* в топологии $\mathscr{T}$.

а) Пусть $\mathscr{T}$ — отделимая топология, согласующаяся со структурой упорядоченной группы в G, и $\hat{G}$ — пополнение группы G (по $\mathscr{T}$); в группе $\hat{G}$ замыкание P множества G_+ обладает тем свойством, что $y - x \in P$ есть отношение предпорядка, согласующееся со структурой группы в $\hat{G}$.

б) Пусть θ — иррациональное число; рассмотрим в $\mathbf{Q}^2$ отношение порядка, для которого множество положительных элементов состоит из $(0, 0)$ и тех пар (x, y), для которых $y - \theta x \geqslant 0$. Относительно этой структуры порядка $\mathbf{Q}^2$ есть совершенно упорядоченная группа G, и произведение топологии рациональной прямой на себя согласуется с этой структурой упорядоченной группы. Однако на $\hat{G} = \mathbf{R}^2$ отношение $y - x \in P = \overline{G}_+$ не будет отношением порядка.

в) В совершенно упорядоченной группе G топология $\mathscr{T}_0(G)$ (гл. I, § 2, упражнение 5) есть слабейшая из топологий, согласующихся со структурой упорядоченной группы. [Различать два случая, смотря по тому, имеется ли в множестве элементов $x > 0$ наименьший элемент или нет]. Всякая топология в G, согласующаяся со структурой группы в G и мажорирующая $\mathscr{T}_0(G)$, согласуется со структурой упорядоченной группы, и при такой топологии отображение $x \longmapsto x^+$ непрерывно; показать, однако, что $x \longmapsto x^+$ равномерно непрерывно при топологии $\mathscr{T}_0(G)$, но не обязательно при групповой топологии $\mathscr{T}$ в G, мажорирующей $\mathscr{T}_0(G)$ [см. б)].

2) а) Пусть G — коммутативная решеточно упорядоченная группа; для каждого $x \geqslant 0$ из G обозначим через $I(x)$ интервал $[-x, x]$ в G (Теор. мн., гл. III, § 1, n° 15). Для того чтобы непустое семейство (c_α) элементов $\geqslant 0$ из G обладало тем свойством, что интервалы $I(c_\alpha)$ образуют фундаментальную систему окрестностей нуля для некоторой топологии $\mathscr{T}$ в G, согласующейся со структурой группы G, необходимо и достаточно, чтобы множество всех c_α было фильтрующимся по убыванию и для любого α существовало такое β, что $2c_\beta \leqslant c_\alpha$. Если это имеет место, то отображение $x \longmapsto x^+$ группы G в себя равномерно непрерывно. [См. Алг., гл. VI, § 1, упражнение 14.] Для того чтобы топология $\mathscr{T}$ была отделимой, необходимо и достаточно, чтобы $0 = \inf c_\alpha$; тогда $\mathscr{T}$ согласуется со структурой упорядоченной группы в G.

б) Во вполне решеточно упорядоченной группе $G = \mathbf{Z}^{\mathbf{N}}$, произведении счетно-бесконечного набора экземпляров совершенно упорядоченной группы $\mathbf{Z}$, нет ни одной недискретной топологии, определяемой способом, намеченным в а); однако произведение дискретных топологий сомножителей $\mathbf{Z}$ согласуется со структурой упорядоченной группы в G и является отделимой и недискретной топологией.

в) В совершенно упорядоченной группе G единственной отделимой топологией, определяемой по способу, намеченному в а), служит топология $\mathscr{T}_0(G)$ (гл. I, § 2, упражнение 5).

*3) Пусть G — коммутативная решеточно упорядоченная группа, M — полурешеточный снизу моноид из *высших* множеств в G (Алг., гл. VI, § 1, упражнение 30); всякая мажорируемая (соотв. минорируемая) часть в M обладает верхней (соотв. нижней) гранью, и G канонически отождествимо с подмножеством из M. Обозначим через G' наибольшую подгруппу в M (множество всех симметризуемых элементов из M).

а) Рассмотрим в G топологию $\mathcal{T}$, определяемую по способу упражнения 2а; пусть V_α — множество тех пар (z, z') из $M \times M$, для которых $z - c_\alpha \leqslant z' \leqslant z + c_\alpha$; показать, что множества V_α образуют фундаментальную систему окружений некоторой равномерной структуры $\mathcal{U}$ в M и что топология $\mathcal{T}'$, порождаемая $\mathcal{U}$, индуцирует в G топологию $\mathcal{T}$; если $\mathcal{T}$ отделима, то $\mathcal{U}$ есть отделимая равномерная структура [заметить, что тогда элементы множества M, рассматриваемые как подмножества из G, замкнуты]; кроме того, определенное так равномерное пространство M будет тогда *полно*. Показать, что отображение $(z, z') \longmapsto z + z'$ произведения $M \times M$ в M равномерно непрерывно. Предполагая $\mathcal{T}$ отделимой, показать, что в M множество всех мажорант (соотв. минорант) любого подмножества замкнуто в топологии $\mathcal{T}'$. [Доказать это сначала для множества мажорант или минорант одного элемента в M, рассматривая элементы из M как подмножества в G.] Отображение $(z, z') \longmapsto \inf(z, z')$ произведения $M \times M$ в M равномерно непрерывно. [Тот же метод.]

б) Будем предполагать далее, что $\mathcal{T}$ отделима; замыкание $\overline{G}$ множества G в M будет тогда в топологии, индуцируемой топологией $\mathcal{T}'$, полной решеточно упорядоченной группой. Группа G' замкнута в M [заметить, что ее замыкание есть подгруппа группы M], и топология, индуцируемая в G' топологией $\mathcal{T}'$, согласуется со структурой упорядоченной группы в G'. Для того чтобы $G' = \overline{G}$, достаточно, чтобы всякий непустой открытый интервал $]a, b[$ в G' содержал некоторый элемент из G, что всегда имеет место, если G совершенно упорядочено. В этом последнем случае топология, индуцируемая в G' топологией $\mathcal{T}'$, совпадает с $\mathcal{T}_0(G')$.

в) Возьмем в качестве G упорядоченную группу $\mathbf{Q}^2$ — произведение совершенно упорядоченной группы $\mathbf{Q}$ на себя; тогда $G' = M = \mathbf{R}^2$, наделенному произведением порядков. Показать, что в G имеется только три различные недискретные отделимые топологии, определяемые по способу упражнения 2а, а именно получаемые, если принять за множество всех c_α соответственно множество тех пар (x, y), в которых $x > 0$, $y > 0$, либо множество пар $(x, 0)$, в которых $x > 0$, либо множество пар $(0, y)$, в которых $y > 0$. При первой из этих топологий имеем $\overline{G} = G'$, хотя в этом случае имеются непустые открытые интервалы в G', не содержащие ни одного элемента из G; при остальных двух топологиях $\overline{G} \neq G'$. При каждой из

этих трех топологий множество всех элементов $z > 0$ в G — не открытое.

г) Возьмем в качестве G группу $\mathbf{Q}^2$, наделенную лексикографическим порядком (Теор. мн., гл. III, § 2, n° 6), превращающим ее в неархимедову совершенно упорядоченную группу. Тогда $\overline{G}=G' \neq M$; M совершенно упорядоченно, но в нем топология $\mathcal{T}'$ отлична от топологии $\mathcal{T}_0(M)$; G' изоморфно группе $\mathbf{R} \times \mathbf{Q}$, наделенной лексикографическим порядком; в G' подгруппа $H = \mathbf{R} \times \{0\}$ открыта и изолированна, но в факторгруппе G'/H фактортопология отлична от $\mathcal{T}_0(G'/H)$.

*4) а) Пусть E — совершенно упорядоченное множество. Определим в $\mathbf{Z}$-модуле F формальных линейных комбинаций элементов из E с коэффициентами из $\mathbf{Z}$ структуру совершенно упорядоченной группы, приняв за множество F_+ всех элементов $\geqslant 0$ множество, состоящее из 0 и тех линейных комбинаций $\sum\limits_{\xi \in E} n(\xi)\,\xi \neq 0$, у которых $n(\xi) > 0$ для наибольшего элемента $\xi \in E$ такого, что $n(\xi) \neq 0$. Показать, что E отождествимо с кофинальной частью F_+.

б) Предположим, что E вполне упорядоченно, и рассмотрим группу G ограниченных отображений E в F; определим в G структуру совершенно упорядоченной группы, приняв за множество G_+ всех элементов $\geqslant 0$ множество, состоящее из 0 и тех ограниченных отображений x множества E в F, при которых $x(\xi) > 0$ для наименьшего $\xi \in E$ такого, что $x(\xi) \neq 0$ (лексикографический порядок). Показать, что группа G в топологии $\mathcal{T}_0(G)$ полна; если, кроме того, E несчетно, а всякий отрезок $]\leftarrow, \xi]$ ($\xi \in E$) не более чем счетен, то пересечение любого счетного семейства открытых множеств в G открыто и всякое компактное множество конечно. [См. гл. I, § 9, упражнение 4.]

в) Будем предполагать далее, что E вполне упорядоченно и несчетно, но всякий отрезок $]\leftarrow, \xi]$ не более чем счетен. Пусть c_ξ для каждого $\xi \in E$ означает постоянное отображение E в E, равное ξ; c_ξ образуют кофинальное множество в G_+. Пусть E_0 — множество, получаемое присоединением к E элемента ω; рассмотрим в множестве $H = G \times E_0$ топологию $\mathcal{T}$, порождаемую следующими множествами: 1° $V_{a,b,\xi} =]a, b[\times \{\xi\}$ для $a < b$ в G и $\xi \in E$; 2° $W_{a,b,\xi}$, определенными для $a < b$ в G и таких $\xi \in E$, что $c_\xi > \sup(|a|, |b|)$, следующим образом: $W_{a,b,\xi}$ состоит из всевозможных (x, ω) с $a < x < b$ и тех (x, ζ), в которых $\zeta \in E$, $\zeta \geqslant \xi$ и либо $a < x < b$, либо $4c_\zeta + a < x < 4c_\zeta + b$. Показать, что топология $\mathcal{T}$ отделима и всякое компактное при $\mathcal{T}$ множество в H конечно. Кроме того, G действует непрерывно в H по закону $(x, (y, \zeta)) \longmapsto (x + y, \zeta)$; однако G не действует в H совершенно, хотя условия а), б), в), г) предложения 4 § 4 главы III выполнены и для любой пары компактных множеств K, L в H множество $P(K, L)$ (гл. III, § 4, теорема 1) компактно.

§ 2. Основные топологические свойства числовой прямой

1. *Аксиома Архимеда*

Топологические свойства числовой прямой, которые мы изложим в этом параграфе, вытекают из следующей теоремы:

Теорема 1. *Каковы бы ни были вещественные числа $x > 0$ и $y > 0$, существует целое $n > 0$ такое, что $y < nx$.*

В самом деле, так как открытые интервалы $]0, x[$ и $]y, \rightarrow[$ не пусты, то существуют рациональные числа $\frac{p}{q}$ и $\frac{r}{s}$ такие, что $0 < \frac{p}{q} < x$ и $y < \frac{r}{s}$ (§ 1, предложение 4); число n достаточно взять так, чтобы $nps > qr$.

Замечание. В § 2 главы V будет дано аксиоматическое построение теории вещественных чисел, в котором вышеприведенное утверждение фигурирует в качестве аксиомы; подробнее об этой аксиоме см. Исторический очерк к главе IV.

2. *Компактные множества в* **R**

Теорема 2 (Борель — Лебег). *Для компактности множества на числовой прямой* **R** *необходимо и достаточно, чтобы оно было замкнуто и ограниченно.*

1) Условие *необходимо*. Пусть A — компактное множество в **R** и a — вещественное число >0. Множество A замкнуто (гл. I, § 9, предложение 4), и в **R** существует конечное число точек x_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ таких, что A содержится в объединении окрестностей $[x_i - a, x_i + a]$ (гл. I, § 9, n° 3). Пусть b — наибольшее из чисел $|x_i|$; тогда $A \subset [-b-a, b+a]$.

2) Условие *достаточно*. Чтобы в этом убедиться, достаточно показать, что всякий интервал $[-a, a]$ $(a > 0)$ *компактен*; поскольку он есть замкнутое множество в полном равномерном пространстве, достаточно показать, что при любом $b > 0$ его можно покрыть *конечным* числом интервалов вида $[x-b, x+b]$ (гл. II, § 4, следствие теоремы 3). Пусть n — целое > 0 такое, что $a < nb$; если $x \in [-a, a]$ и m — наибольшее (положительное или отрицательное) целое такое, что $mb \leqslant x$, то $-n \leqslant m \leqslant n$

и $mb \leqslant x < (m+1)b$; таким образом, $2n+1$ интервалов $[(k-1)b, (k+1)b]$ $(-n \leqslant k \leqslant n)$ образуют покрытие требуемого типа.

Следствие 1. *Для того чтобы множество на числовой прямой* $\mathbf{R}$ *было относительно компактным, необходимо и достаточно, чтобы оно было ограниченно.*

Следствие 2. *Числовая прямая есть некомпактное локально компактное пространство.*

Замечание. Теорему 2 часто называют «теоремой Гейне — Бореля»; см. Исторические очерки к главам II и IV.

3. Верхняя грань множества в R

Напомним (Теор. мн., Сводка результ., § 6, n° 7), что *верхняя* (соотв. *нижняя*) *грань* подмножества A упорядоченного множества E (если она существует) — это *наименьшая мажоранта* (соотв. *наибольшая миноранта*) множества A.

Теорема 3. *Всякое непустое ограниченное сверху* (соотв. *снизу*) *множество на числовой прямой имеет верхнюю* (соотв. *нижнюю*) *грань.*

В самом деле, пусть A — непустое ограниченное сверху множество из $\mathbf{R}$ и b — его мажоранта, так что $A \subset]\leftarrow, b]$. Для каждого $x \in A$ рассмотрим множество A_x всех его мажорант, принадлежащих A; множества A_x образуют *базис фильтра* $\mathfrak{B}$ в $\mathbf{R}$, ибо $A_y \subset A_x$, если $y \geqslant x$. Пусть a — точка из A; для всякого $x \geqslant a$, принадлежащего A, множество A_x содержится в *компактном* интервале $[a, b]$, и потому базис фильтра $\mathfrak{B}$ имеет точку прикосновения c. Так как интервалы $[x, \rightarrow[$ замкнуты, то c принадлежит их пересечению и является, таким образом, *мажорантой* для A; с другой стороны, всякая другая мажоранта z множества A будет $\geqslant c$, ибо в противном случае окрестность $]z, \rightarrow[$ точки c не содержала бы ни одной точки из A; это и показывает, что c есть *верхняя грань* множества A.

Так же можно рассуждать и в случае непустого ограниченного снизу множества B; впрочем, в этом случае можно просто заме-

тить, что $-B$ не пусто и ограниченно сверху и что если c — верхняя грань для $-B$, то $-c$ будет нижней гранью для B.

Верхняя грань c множества A может быть охарактеризована следующими двумя свойствами:

1° каково бы ни было $x \in A$, $x \leqslant c$;

2° каково бы ни было $a < c$, существует $x \in A$ такое, что $a < x \leqslant c$.

Верхняя грань *замкнутого* множества (ограниченного сверху и непустого) принадлежит этому множеству и является его *наибольшим элементом*; верхняя грань любого непустого ограниченного множества из $\mathbf{R}$ может быть, таким образом, определена как *наибольшее вещественное число, являющееся точкой прикосновения для A*.

4. *Характеризация интервалов*

Предложение 1. *Для того чтобы непустое множество $A \subset \mathbf{R}$ было интервалом, необходимо и достаточно, чтобы для любых точек a и b из A таких, что $a < b$, замкнутый интервал $[a, b]$ содержался в A.*

Условие, очевидно, необходимо. Обратно, предположим, что оно выполнено. Если A не ограниченно ни сверху, ни снизу, то оно совпадает с $\mathbf{R}$, ибо тогда для любого $x \in \mathbf{R}$ существуют точки a, b в A такие, что $a < x < b$. Пусть A ограниченно сверху, но не снизу, и пусть k — его верхняя грань; каково бы ни было $x < k$, в A будут существовать точки a и b такие, что $a < x < b \leqslant k$, откуда $x \in A$; таким образом, A может быть только одним из интервалов $]\leftarrow, k]$, $]\leftarrow, k[$. Так же рассуждаем и в остальных случаях.

5. *Связные множества в* $\mathbf{R}$

Теорема 4. *Для того чтобы множество $A \subset \mathbf{R}$ было связным, необходимо и достаточно, чтобы оно было интервалом.*

1) Условие *необходимо*. Предположим, что A связно; если оно сводится к одной точке, то это интервал. Если нет, то пусть a и b — точки из A такие, что $a < b$; согласно предложению 1 достаточно показать, что всякая точка x такая, что $a < x < b$,

принадлежит A. Но если $x \notin A$, то $A \subset \complement\{x\}$, и так как $\complement\{x\}$ есть объединение непересекающихся открытых множеств $]\leftarrow, x[$ и $]x, \rightarrow[$, каждое из которых пересекается с A, то, следовательно, A не может быть связным, в противоречие с предположением.

2) Условие *достаточно*. Покажем сначала, что всякий *компактный* интервал $[a, b]$ связен. Пусть $V_{\frac{1}{n}}$ для каждого целого $n>0$ есть окружение, образованное парами (x, y) такими, что $|x-y| \leqslant \frac{1}{n}$; согласно предложению 6 § 4 главы II достаточно убедиться в том, что любые две точки x, y из $[a, b]$ такие, что $x<y$, соединимы посредством $V_{\frac{1}{n}}$-цепи. Пусть p — наибольшее целое такое, что $\frac{p}{n} \leqslant x$, и q — наибольшее целое такое, что $\frac{q}{n} \leqslant y$ (существующие по теореме 1); очевидно, $p \leqslant q$. Если $q=p$, то $y-x<\frac{1}{n}$, и точки x, y уже образуют $V_{\frac{1}{n}}$-цепь. Если $q>p$, то положим $x_i=\frac{p+i}{n}$ $(i=1, 2, \ldots, q-p)$; тогда $x_1-x \leqslant \frac{1}{n}$, $y-x_{q-p} \leqslant \frac{1}{n}$ и $x_{i+1}-x_i=\frac{1}{n}$, так что точки $x, x_1, x_2, \ldots, x_{q-p}, y$ образуют $V_{\frac{1}{n}}$-цепь, соединяющую x и y.

Пусть теперь I — произвольный интервал, не сводящийся к одной точке, и a, b — любые две точки из I такие, что $a<b$; интервал $[a, b]$ содержится в I и связен, следовательно, и I связен.

Следствие 1. *Числовая прямая есть связное локально связное пространство.*

Следствие 2. *Единственными связными компактными множествами в* **R** *являются ограниченные замкнутые интервалы.*

В силу теоремы 4 множество из **R**, не содержащее ни одного интервала, не сводящегося к точке, *вполне несвязно*; в частности, это относится к множеству **Q** рациональных чисел, поскольку множество $\complement$**Q** иррациональных чисел всюду плотно.

Предложение 2. *Всякое непустое открытое множество в* **R** *есть объединение не более чем счетного семейства попарно не пересекающихся открытых интервалов.*

Пусть A — непустое открытое множество в $\mathbf{R}$; так как $\mathbf{R}$ локально связно, то всякая *связная компонента* множества A есть связное открытое множество (гл. I, § 11, предложение 11), т. е. согласно теореме 4 *открытый интервал*. Никакая пара этих интервалов не имеет ни одной общей точки; с другой стороны, каждый из них содержит рациональное число, так что множество этих интервалов имеет мощность, не превышающую мощности $\mathbf{Q}$, т. е. *не более чем счетно*.

Таким образом, всякое *замкнутое* множество в $\mathbf{R}$ есть дополнение объединения (конечной или бесконечной) последовательности (I_n) попарно не пересекающихся открытых интервалов; эти интервалы называются *смежными* к рассматриваемому замкнутому множеству. Обратно, если дана такая последовательность интервалов, то дополнение их объединения есть замкнутое множество, для которого они служат смежными интервалами.

Пример. Определим по индукции счетное семейство $(I_{n,\,p})$ попарно непересекающихся открытых интервалов следующим образом.

Пусть целое число n принимает все значения $\geqslant 0$ и для каждого n число p принимает значения $1, 2, 3, \ldots, 2^n$. Все интервалы $I_{n,\,p}$ содержатся в $A=[0,\,1]$, причем $I_{0,\,1}=\left]\frac{1}{3},\,\frac{2}{3}\right[$ («средняя треть» интервала $]0,\,1[$). Предположим далее, что $2^{m+1}-1$ интервалов $I_{n,\,p}$ $(0\leqslant n\leqslant m)$ уже определены, причем, если J_m — их объединение, множество $A\cap \complement J_m$ является объединением 2^{m+1} попарно непересекающихся замкнутых интервалов $K_{m,p}$ $(1\leqslant p\leqslant 2^{m+1})$, каждый из которых имеет длину $\frac{1}{3^{m+1}}$. Пусть $K_{m,p}=[a,\,b]$; в качестве $I_{m+1,\,p}$ берем открытый интервал $\left]a+\frac{b-a}{3},\;b-\frac{b-a}{3}\right[$ («среднюю треть» интервала $]a,\,b[$). Непосредственная проверка показывает, что индукция неограниченно продолжаема (рис. 1).

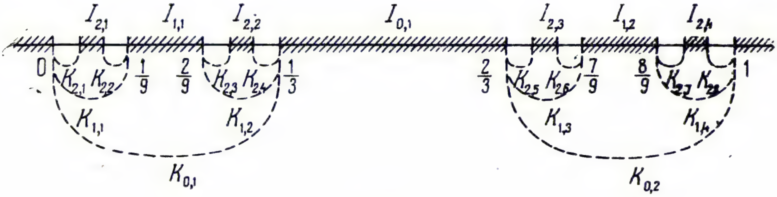

Рис. 1.

Пусть K' — дополнение объединения всех $I_{n,p}$; замкнутое множество $K=A\cap K'$ называется *канторовым множеством*;

очевидно, оно *компактно* (теорема 2); кроме того, оно *вполне несвязно*. В самом деле, если бы оно содержало интервал I длины >0, то I необходимо содержался бы в одном из интервалов $K_{m,p}$ и длина I была бы $\leqslant \frac{1}{3^{m+1}}$ при любом m, что невозможно.

6. Гомеоморфизмы интервала на интервал

Теорема 5. *Для того чтобы отображение f интервала $I \subset \mathbf{R}$ в $\mathbf{R}$ было гомеоморфизмом I на $f(I)$, необходимо и достаточно, чтобы f было строго монотонно и непрерывно на I; $f(I)$ является тогда интервалом в $\mathbf{R}$.*

1) Условие *необходимо*. В самом деле, пусть a и b — две точки из I такие, что $a < b$; и пусть, например, $f(a) < f(b)$. Покажем, что f строго возрастает на I. Прежде всего, если $a < c < b$, то необходимо $f(a) < f(c) < f(b)$; в самом деле, если бы, например, было $f(a) < f(b) < f(c)$, то так как образ интервала $[a, c]$ при отображении f, будучи связным множеством (гл. I, § 11, предложение 4), содержит интервал $[f(a), f(c)]$, существовало бы $x \in [a, c]$ такое, что $f(x) = f(b)$, в противоречие с предположением, что f инъективно.

Из сказанного вытекает, что если x и y — две точки из I такие, что $x < y$, то $f(x) < f(y)$; в самом деле, при $a < x < b$ имеем $f(a) < f(x) < f(b)$, при $b < x$ имеем $f(a) < f(b) < f(x)$ и при $x < a$ имеем $f(x) < f(a) < f(b)$; повторяя рассуждение для a, x и y вместо a, b и x, видим, что $f(x) < f(y)$.

2) Условие *достаточно*. Предположим, что f непрерывно и строго монотонно (например, строго возрастает) на I; $f(I)$ связно и потому является интервалом, а так как f строго возрастает, то оно отображает биективно I на $f(I)$. Кроме того, образ открытого интервала *из* I при отображении f есть открытый интервал *в* $f(I)$. Следовательно (§ 1, предложение 5), f есть гомеоморфизм I на $f(I)$.

Замечание. Первая часть проведенного доказательства устанавливает в действительности, что *инъективное непрерывное* отображение I в $\mathbf{R}$ *строго монотонно*, а вторая часть показывает, что *всякое непрерывное инъективное отображение f интервала I в $\mathbf{R}$ есть гомеоморфизм I на $f(I)$.*

Упражнения

1) Точка $a \in \mathbf{R}$ называется *левой точкой прикосновения* множества $A \subset \mathbf{R}$, если она является его точкой прикосновения и существует интервал $]a, b[$ $(a < b)$, не содержащий ни одной точки из A. Показать, что множество всех левых точек прикосновения всякого множества из $\mathbf{R}$ счетно. [Установить взаимно однозначное соответствие между этим множеством и некоторым множеством попарно непересекающихся открытых интервалов.] Вывести отсюда, что всякое вполне упорядоченное множество в $\mathbf{R}$ счетно.

*2) Счетное всюду плотное множество $A \subset \mathbf{R}$ не может быть замкнутым. [Пусть (a_n) — последовательность перенумерованных определенным образом точек множества A; определить последовательность интервалов $[b_n, c_n]$ так, чтобы при любом n выполнялись неравенства $b_{n-1} < b_n < c_n < c_{n-1}$ и интервал $[b_n, c_n]$ не содержал ни одной точки a_k с номером $k \leqslant n$; в заключение воспользоваться теоремой 2.] Вывести отсюда, что $\mathbf{R}$ несчетно. [См. § 8, n° 6.]

3) Пусть (I_n) — бесконечная последовательность непустых открытых интервалов в $\mathbf{R}$ таких, что $\overline{I}_n \cap \overline{I}_m = \varnothing$ для $m \neq n$. Показать, что дополнение объединения всех I_n есть совершенное множество (гл. I, § 1, n° 6); в частности, канторово множество совершенно.

4) Сумма длин смежных интервалов канторова множества равна 1. Определить таким же способом вполне несвязное совершенное множество $A \subset [0, 1]$, сумма длин смежных интервалов которого была бы равна любому наперед заданному числу m, удовлетворяющему неравенствам $0 < m \leqslant 1$.

*5) Предположим, что каждой точке $x \in \mathbf{R}$ соответствует открытый интервал $I(x)$ с центром x и длиной $\leqslant l$, где l — заданное число > 0. Показать, что всякий компактный интервал $[a, b]$ может быть покрыт конечным числом интервалов $I(x_i)$, сумма длин которых $\leqslant l + 2(b - a)$. [Доказать, что если утверждение справедливо для всякого интервала $[a, x]$ такого, что $a \leqslant x < c$, то существует $d > c$ такое, что утверждение будет верным и для всякого интервала $[a, y]$ такого, что $a \leqslant y < d$.] Показать, что при $l = (b - a)/n$, где n — целое $\geqslant 1$, результат не может быть улучшен.

*6) a) Пусть E — непустое совершенно упорядоченное пространство, наделенное топологией $\mathcal{T}_0(E)$ (гл. I, § 2, упражнение 5). Для того чтобы E было компактным, необходимо и достаточно, чтобы всякое его подмножество имело верхнюю грань, т. е. чтобы E было *полным* (Теор. мн., гл. III, § 1, упражнение 11). [Для установления необходимости условия рассуждать, как при доказательстве теоремы 3; чтобы убедиться в его достаточности, рассмотреть фильтр $\mathfrak{F}$ в E и, обозначив через A множество нижних граней всевозможных множеств из $\mathfrak{F}$, показать, что верхняя грань множества A есть точка прикосновения для $\mathfrak{F}$.]

б) Дать пример полной решетки E, которая не была бы компактной в топологии $\mathcal{T}_0(E)$.

*7) Пусть E — непустое совершенно упорядоченное множество, наделенное топологией $\mathcal{T}_0(E)$.

а) Показать, что если E связно, то оно обладает следующими двумя свойствами:

α) Всякое непустое ограниченное сверху подмножество множества E имеет верхнюю грань. [Пусть A — непустое множество, ограниченное сверху, B — множество всех его мажорант и C — множество всех минорант множества B; показать, что $B \cup C = E$ и что B и C замкнуты.]

β) Множество E *не имеет дыр*, т. е. (Теор. мн., гл. III, § 1, упражнение 18) всякий открытый интервал $]a, b[$ $(a < b)$ в E не пуст. [Рассуждать, как в теореме 4.]

б) Обратно, если E обладает свойствами α) и β), то оно связно. [Показать сначала, что всякий замкнутый интервал $[a, b]$ связен: предполагая, что существует разбиение этого интервала на два непустых замкнутых множества A, B, причем $a \in A$, рассмотреть нижнюю грань множества B и прийти к противоречию.]

в) Показать, что если E связно, то оно локально компактно и локально связно, и что единственными связными множествами в E являются интервалы (ограниченные или нет).

8) Пусть E и F — совершенно упорядоченные множества, наделенные топологиями $\mathcal{T}_0(E)$ и $\mathcal{T}_0(F)$.

а) Предположим, что E связно. Пусть f — непрерывное отображение E в F. Показать, что для любых x, y из E таких, что $x < y$, всякое $z \in F$, принадлежащее замкнутому интервалу с концами $f(x)$ и $f(y)$, принадлежит $f(E)$. [Использовать упражнение 7.] Вывести отсюда, что для того, чтобы f было гомеоморфизмом E на $f(E)$, необходимо и достаточно, чтобы f было непрерывно и строго монотонно.

б) Дать пример не строго монотонного гомеоморфизма рациональной прямой $\mathbf{Q}$ на себя.

*9) а) Пусть E — счетное совершенно упорядоченное множество без дыр (упражнение 7). Показать, что существует строго возрастающее биективное отображение φ множества E на один из четырех интервалов в $\mathbf{Q}$ с концами 0 и 1. [Расположить элементы множества E и надлежащего из указанных интервалов в $\mathbf{Q}$ в последовательности (a_n), (b_n) и определить φ по индукции.] Если наделить E топологией $\mathcal{T}_0(E)$, то φ будет гомеоморфизмом E на $\varphi(E)$.

б) Вывести из а), что всякое счетное подмножество открытого интервала $]a, b[$ в $\mathbf{R}$, плотное в этом интервале, гомеоморфно $\mathbf{Q}$.

в) Вывести из а), что для любого счетного упорядоченного множества E, наделенного топологией $\mathcal{T}_0(E)$, существует строго возрастающий гомеоморфизм E на некоторое подпространство рациональной прямой $\mathbf{Q}$. [Погрузить E в счетное совершенно упорядочен-

ное пространство E' без дыр так, чтобы топология $\mathcal{T}_0(E)$ индуцировалась топологией $\mathcal{T}_0(E')$.]

10) Показать, что всякое счетное подмножество канторова множества K, плотное относительно K и не содержащее ни одного из концов смежных с K интервалов, гомеоморфно рациональной прямой $\mathbf{Q}$. [Использовать упражнение 9.]

*11) а) Пусть E — совершенно упорядоченное множество, наделенное топологией $\mathcal{T}_0(E)$. Показать, что если E связно и содержит счетное всюду плотное подмножество A, то существует (строго монотонный в силу упражнения 8) гомеоморфизм E на один из интервалов в $\mathbf{R}$ с концами 0 и 1, отображающий A на пересечение $\mathbf{Q}$ с этим интервалом. [Использовать упражнения 9 и 7).

б) Вывести из а), что если B — множество из $\mathbf{R}$, имеющее всюду плотное дополнение, то существует гомеоморфизм $\mathbf{R}$ на себя, отображающий B на подмножество множества $\complement\mathbf{Q}$ иррациональных чисел. [Рассмотреть счетное всюду плотное множество $A \subset \mathbf{R}$, содержащееся в $\complement B$.]

в) В множестве $\mathbf{R} \times \{0, 1\}$, совершенно упорядоченном лексикографически, обозначим через $\mathbf{R}'$ дополнение к $\mathbf{Q} \times \{1\}$. Показать, что $\mathbf{R}'$, наделенное топологией $\mathcal{T}_0(\mathbf{R}')$, локально компактно, вполне несвязно, содержит счетное плотное множество $\mathbf{Q}'$, гомеоморфное $\mathbf{Q}$, но индуцированная топология в некотором непустом открытом интервале из $\mathbf{R}'$ не имеет счетного базиса; в частности, такой интервал не может быть гомеоморфен никакой части $\mathbf{R}$.

*12) а) Пусть A — вполне упорядоченное множество, I — интервал $[0, 1[\subset \mathbf{R}$; показать, что множество $E = A \times I$, совершенно упорядоченное лексикографически и наделенное топологией $\mathcal{T}_0(E)$, связно [упражнение 7]; таким образом, имеются совершенно упорядоченные множества E, связные в топологии $\mathcal{T}_0(E)$ и имеющие произвольную мощность [см. § 4, упражнение 7б].

б) Примем за A несчетное вполне упорядоченное множество, всякий отрезок $]\leftarrow, t]$ которого не более чем счетен; соответствующее топологическое пространство E называется тогда *полупрямой Александрова*. Показать, что для всякого интервала $[a, b]$ из E существует строго возрастающий гомеоморфизм $[a, b]$ на интервал $[0, 1] \subset \mathbf{R}$. [Доказать с помощью трансфинитной индукции, что существует строго возрастающий гомеоморфизм $A \cap [a, b]$ (где A отождествлено с множеством точек $(t, 0)$ из E) на некоторое подпространство в $[0, 1]$.]

*13) Пусть a — иррациональное число > 0; сопоставим каждому рациональному числу x то вещественное число $f_a(x) \in [0, a[$, для которого $x - f_a(x)$ есть целое кратное числа a; показать, что f_a — непрерывное инъективное отображение $\mathbf{Q}$ в $[0, a[$. Вывести отсюда с помощью упражнения 9, что существуют непрерывные биективные отображения $\mathbf{Q}$ на себя, обратные к которым не непрерывны ни в одной точке.

*14) Пусть E — связное отделимое неодноточечное топологическое пространство и Δ — диагональ произведения $E \times E$.

а) Показать, что $\complement\Delta$ не может обладать разбиением, образованным такими двумя открытыми множествами D_1, D_2, что $\overset{-1}{D_1} = D_1$ и $\overset{-1}{D_2} = D_2$. [Заметить сначала, используя упражнение 4а § 11 главы I, что $\overline{D_1(x)}$ и $\overline{D_2(x)}$ связны для всякого $x \in E$; вывести отсюда, что если $y \in D_1(x)$, то $\overline{D_2(x)} \times \{y\} \subset D_1$, и показать, что это влечет пустоту одного из множеств $D_1(x)$, $D_2(x)$ для любого $x \in E$; заключить, что одно из множеств D_1, D_2 пусто, в противоречие с предположением.] Вывести отсюда, что $\complement\Delta$ либо связно, либо имеет ровно две связные компоненты A, B такие, что $B = \overset{-1}{A}$.

б) Говорят, что структура совершенного порядка в E *согласуется* с топологией $\mathcal{T}$ в E, если $\mathcal{T}_0(E)$ минорирует $\mathcal{T}$. Вывести из а), что для того, чтобы в E существовала такая структура совершенного порядка, необходимо и достаточно, чтобы $\complement\Delta$ было несвязно; тогда существуют ровно две такие структуры порядка. [В обозначениях пункта а), показать, что требуемым отношением порядка необходимо служит $(x, y) \in A$ или $(x, y) \in B = \overset{-1}{A}$.] Показать, что интервалы относительно этих структур порядка связны в топологии $\mathcal{T}$, причем это единственные связные в $\mathcal{T}$ подмножества пространства E.

в) Показать, что если E в $\mathcal{T}$ локально связно или локально компактно и в E существует структура совершенного порядка, согласующаяся с $\mathcal{T}$, то необходимо $\mathcal{T} = \mathcal{T}_0(E)$. [В случае, когда E локально связно, использовать б). В случае, когда E локально компактно, показать, что всякая компактная окрестность точки $x \in E$ для $\mathcal{T}$ есть также окрестность x для $\mathcal{T}_0(E)$, рассмотрев границу этой окрестности.]

°г) Пусть E — подпространство в $\mathbf{R}^2$, состоящее из точки $(0, 0)$ и множества всех пар (x, y) таких, что $x > 0$ и $y = \sin\frac{1}{x}$; показать, что в E имеется структура совершенного порядка, согласующаяся с топологией, индуцируемой из $\mathbf{R}^2$, но последняя сильнее, чем $\mathcal{T}_0(E)$.$_\circ$

Дать пример связного отделимого пространства E, ни одна точка которого не обладает фундаментальной системой связных окрестностей и в котором имеется структура совершенного порядка, согласующаяся с топологией пространства E. [См. упражнение 2б § 11 главы I.]

*15) а) Пусть E — такое связное отделимое пространство, что $\complement\{x\}$ имеет ровно две связные компоненты для любого $x \in E$; для каждой из этих связных компонент K имеем тогда $\overline{K} = K \cup \{x\}$ [гл. I, § 11, упражнение 4а]. Пусть x, y — две различные точки из E, а A, B и A', B' — связные компоненты соответственно множеств

$\complement\{x\}$ и $\complement\{y\}$. Показать, что одно из множеств A, B содержится в A' или B'.

б) Пусть $x_0 \in E$ и $A(x_0)$, $B(x_0)$ — связные компоненты множества $\complement\{x_0\}$. Для каждого $x \neq x_0$ имеется однозначно определенная связная компонента множества $\complement\{x\}$, содержащаяся в $A(x_0)$ или содержащая $A(x_0)$; обозначим ее $A(x)$. Показать, что $A(x) \subset A(y)$ есть отношение совершенного порядка, согласующееся (упражнение 14) с топологией пространства E.

в) Распространить заключение пункта б) на случай, когда $\complement\{x\}$ имеет две связные компоненты для всех x, за исключением одного $a \in E$, для которого $\complement\{a\}$ связно.

°г) Пусть E — подпространство в $\mathbf{R}^2$, образованное точками $a = (0, 1)$, $b = (0, -1)$ и всеми точками (x, y), у которых $x \neq 0$ и $y = \sin\frac{1}{x}$. Показать, что в топологии $\mathcal{T}$, индуцируемой из $\mathbf{R}^2$, пространство E связно, $\complement\{a\}$ и $\complement\{b\}$ связны, а для любого x, отличного от a и b, $\complement\{x\}$ имеет ровно две связные компоненты, но в E не существует совершенного порядка, согласующегося с $\mathcal{T}$.₀

*16) Пусть E — связное отделимое пространство, *вполне неприводимое* между двумя различными точками a, b, т. е. такое, что в E не существует ни одного связного множества, отличного от E и содержащего a и b. Показать, что $E' = \complement\{a, b\}$ связно и дополнение любого $x \in E'$ в E имеет ровно две связные компоненты $A(x)$ и $B(x)$ такие, что $a \in A(x)$, $b \in B(x)$, $a \notin B(x)$, $b \notin A(x)$. [Используя упражнение 4a § 11 главы I, показать, что $\complement\{x\}$ не может допускать разбиения на три непустых открытых множества.] Вывести отсюда, что в E имеется структура совершенного порядка, согласующаяся с топологией в E. [Использовать упражнение 15.]

*17) Пусть E — связное отделимое пространство такое, что для любого его покрытия связными множествами, отличными от E, какие-то два из этих множеств имеют объединение, отличное от E.

а) Показать, что $\complement\{x\}$ для любого $x \in E$ имеет не более двух связных компонент. [Тот же метод, что и в упражнении 16.]

б) Показать, что в E имеется не более двух точек со связным дополнением. Кроме того, если a, b — две различные точки, обладающие этим свойством, то для любого x, отличного от a и b, a и b принадлежат различным связным компонентам множества $\complement\{x\}$.

в) Вывести из а) и б), что в E имеется структура совершенного порядка, согласующаяся с топологией в E. [Использовать упражнение 15.]

*18) а) Пусть E — компактное связное локально связное пространство, неприводимое между двумя своими точками a, b (гл. II, § 4, упражнение 19), и x — точка из E, отличная от a и b. Показать, что $\complement\{x\}$ имеет ровно две связные компоненты, причем a и b принадлежат различным его связным компонентам. [Рассуждая, как

в упражнении 16, показать сначала, что $\complement\{x\}$ не может иметь более двух связных компонент. С другой стороны, пусть для каждой замкнутой связной окрестности V точки x, не содержащей ни a ни b, A_V и B_V означают связные компоненты соответственно a и b в $\complement V$; показать, что они различны, используя упражнение 17 § 4 главы II; рассмотреть, наконец, объединение всех A_V (соответственно B_V), когда V пробегает множество всех связных замкнутых окрестностей x в E.] Вывести отсюда, что в E существует структура совершенного порядка такая, что $\mathscr{T}_0(E)$ совпадает с заданной топологией в E [упражнения 15 и 14в.]

б) Пусть E — связное компактное пространство, неприводимое между своими точками a, b. Показать, что если E содержит более одной простой составляющей (гл. II, § 4, упражнение 20), то пространство E' простых составляющих пространства E (там же) неприводимо между простыми составляющими точек a и b, и что в E' существует структура совершенного порядка такая, что топология в E' совпадает с $\mathscr{T}_0(E')$. °Дать пример, в котором E' было бы отлично от E [см. упражнение 15г].$_\circ$

*19) а) Пусть E — отделимое связное пространство и a, b — такие две различные его точки, что в E не существует ни одного *замкнутого* связного множества, отличного от E и содержащего a и b. Для того чтобы отличная от a и b точка $x \in E$ обладала несвязным дополнением $\complement\{x\}$, необходимо и достаточно, чтобы для любого $y \in \complement\{x\}$ в $\complement\{y\}$ существовало связное подмножество, замкнутое в E и содержащее x и одну из точек a, b. [Для доказательства необходимости использовать упражнение 4а § 11 главы I. Чтобы убедиться в достаточности условия, рассмотреть множество A (соотв. B) тех y, для которых в $\complement\{y\}$ имеется связное подмножество, замкнутое в E и содержащее a и x (соотв. b и x); показать, что A и B открыты, не пусты, не имеют общих точек и что $\complement\{x\} = A \cup B$.]

б) Пусть E — связное компактное пространство, неприводимое между двумя своими точками a, b (гл. II, § 4, упражнение 19). Показать, что если для любой пары различных точек $x, y \in E$ в E существует связное компактное множество, содержащее y и одну из точек a, b, но не содержащее x, то в E существует структура совершенного порядка такая, что $\mathscr{T}_0(E)$ совпадает с заданной топологией в E. [Упражнения 15 и 16.]

20) Пусть в конструкции упражнения 24 § 9 главы I в качестве X_0 взят интервал $[0, 1]$ из $\mathbf{R}$. Показать, что гомеоморфизмы X на себя — те же, что и гомеоморфизмы X_0 на себя, хотя топология в X сильнее топологии в X_0. [Использовать упражнение 20б § 8 главы I.]

21) Показать, что при $r > 2$ не существует r-кратно транзитивной группы (Алг., гл. I, § 7, упражнение 9), состоящей из гомеоморфизмов $\mathbf{R}$ на себя. [Рассмотреть подгруппу, оставляющую инвариантными две точки из $\mathbf{R}$.]

§ 3. Поле вещественных чисел

1. *Умножение в* R

Топология рациональной прямой $\mathbf{Q}$ согласуется не только со структурой *аддитивной группы* в $\mathbf{Q}$, но также со структурой *тела* в $\mathbf{Q}$. В самом деле, функция xy непрерывна в точке $(0, 0) \in \mathbf{Q} \times \mathbf{Q}$, ибо для любого целого $n > 0$ из $|x| \leqslant \frac{1}{n}$ и $|y| \leqslant \frac{1}{n}$ следует $|xy| \leqslant \leqslant \frac{1}{n^2} \leqslant \frac{1}{n}$; с другой стороны, для любого рационального числа $a \neq 0$ функция ax непрерывна в точке $x = 0$, ибо для целого $n > 0$ из $|x| \leqslant \frac{1}{n|a|}$ следует $|ax| \leqslant \frac{1}{n}$. Это показывает, что функция xy непрерывна во всех точках произведения $\mathbf{Q} \times \mathbf{Q}$ (гл. III, § 6, n° 3).

Для доказательства непрерывности $\frac{1}{x}$ в $\mathbf{Q}^*$ покажем, что эта функция, более того, *равномерно непрерывна* (относительно аддитивной структуры) на дополнении любой окрестности нуля V. В самом деле, $\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| = \frac{|x-y|}{|xy|}$, и так как существует целое $m > 0$ такое, что $|x| \geqslant \frac{1}{m}$ для любого $x \in \complement V$, то, взяв две точки x и y из $\complement V$ так, чтобы $|x-y| \leqslant \frac{1}{m^2 n}$, получим $\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| \leqslant \frac{1}{n}$.

При отображении посредством функции $\frac{1}{x}$ образ всякого фильтра Коши из $\mathbf{Q}^*$ (относительно аддитивной равномерной структуры), не имеющего 0 своей точкой прикосновения, есть снова фильтр Коши (для аддитивной равномерной структуры). Таким образом (гл. III, § 6, предложение 7):

Предложение 1. *Функции xy и $\frac{1}{x}$, определенные соответственно на $\mathbf{Q} \times \mathbf{Q}$ и $\mathbf{Q}^*$, могут быть продолжены по непрерывности соответственно на $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ и $\mathbf{R}^*$ и определяют в $\mathbf{R}$ структуру коммутативного тела. Наделенное этой структурой, $\mathbf{R}$ называется полем вещественных чисел.*

Все свойства топологических тел, установленные в § 6 главы III, разумеется, применимы; в частности, всякая *рациональная функция* n вещественных переменных с вещественными коэффициентами *непрерывна* во всякой точке из $\mathbf{R}^n$, где ее знаменатель не равен нулю.

2. *Мультипликативная группа* $\mathbf{R}^*$

Как мы знаем (гл. III, § 6, n° 7), топология, индуцируемая в $\mathbf{R}^*$ топологией числовой прямой, *согласуется* со структурой мультипликативной группы в $\mathbf{R}^*$; поскольку $\mathbf{R}^*$ *открыто* в локально компактном пространстве $\mathbf{R}$, оно является *локально компактной* топологической группой (гл. I, § 9, предложение 13), тем самым *полной* (гл. III, § 3, следствие 1 предложения 4; вытекает также из предложения 8 § 6 главы III); конечно, это последнее свойство относится к *мультипликативной* равномерной структуре в $\mathbf{R}^*$, а не к равномерной структуре, индуцируемой в $\mathbf{R}^*$ аддитивной равномерной структурой, заданной в $\mathbf{R}$.

Функция xy отображает множество $\mathbf{Q}_+ \times \mathbf{Q}_+$ в $\mathbf{Q}_+$ и потому $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+$ в $\mathbf{R}_+$ (гл. I, § 2, теорема 1); *в других терминах: произведение двух положительных вещественных чисел положительно*. Формулы $(-x)\,y = -\,xy$, $(-x)(-y) = xy$ показывают тогда, что произведение положительного числа на отрицательное отрицательно, а произведение двух отрицательных чисел положительно; отсюда вытекает соотношение

$$|\,xy\,| = |\,x\,| \cdot |\,y\,| \tag{1}$$

(которое можно было бы вывести путем продолжения того же соотношения, имеющегося в $\mathbf{Q} \times \mathbf{Q}$).

Если $x > 0$ и $y > 0$, то $xy \neq 0$ и, следовательно, $xy > 0$; точно так же, если $x < 0$ и $y > 0$, то $xy < 0$; если $x < 0$ и $y < 0$, то $xy > 0$. В частности, если $x \neq 0$, то $x^2 > 0$; *сумма квадратов* вещественных чисел может быть равна нулю только в случае, когда каждое из этих чисел равно нулю.

Если $x > 0$ и $y \leqslant z$ (соотв. $y < z$), то $xy \leqslant xz$ (соотв. $xy < xz$); иначе говоря, *гомотетия с коэффициентом* > 0 *сохраняет порядок* в $\mathbf{R}$; поскольку $(-x)\,y = -\,xy$, гомотетия с коэффициентом < 0 заменяет порядок в $\mathbf{R}$ на противоположный.

Если $x > 0$, то $\frac{1}{x} > 0$, ибо $x \cdot \left(\frac{1}{x}\right) = 1 > 0$; если $0 < x < y$, то $xy > 0$ и потому $x \cdot \left(\frac{1}{xy}\right) < y \cdot \left(\frac{1}{xy}\right)$, т. е. $\frac{1}{y} < \frac{1}{x}$; отображение $x \mapsto \frac{1}{x}$ множества $\mathbf{R}_+^*$ всех вещественных чисел > 0 на себя является *строго убывающим*.

Таким же образом убеждаемся, что функция $\frac{1}{x}$ — строго убывающая в интервале $]\leftarrow, 0[$, откуда вытекает, что функция $\frac{1}{x-a}$ — строго убывающая в каждом из интервалов $]\leftarrow, a[$ и $]a, \rightarrow[$.

Из предыдущего следует, что $\mathbf{R}_+^*$ есть *подгруппа* мультипликативной группы $\mathbf{R}^*$; при этом отношение порядка $x \leqslant y$ *согласуется* со структурой мультипликативной группы в $\mathbf{R}_+^*$, иными словами, последняя является *совершенно упорядоченной группой* (Алг., гл. VI, § 1).

Тот факт, что произведение двух положительных вещественных чисел положительно, выражают еще, говоря, что $\mathbf{R}$ есть *упорядоченное поле* (Алг., гл. VI, § 2); и в Алгебре было показано (см. там же), что все предыдущие свойства являются общими свойствами упорядоченных полей.

Предложение 2. *Мультипликативная группа* $\mathbf{R}^*$ *вещественных чисел* $\neq 0$ *есть топологическая группа, изоморфная произведению ее подгрупп* $\mathbf{R}_+^*$ *и* $U_0 = \{-1, +1\}$.

Для каждого $x \neq 0$ положим $\operatorname{sgn} x = \frac{x}{|x|}$ (*знак* числа x); функция sgn является представлением группы $\mathbf{R}^*$ на U_0; имеем $x = |x| \cdot \operatorname{sgn} x$, и это разложение элемента x в произведение элемента из $\mathbf{R}_+^*$ и элемента из U_0 единственно; таким образом, структура группы в $\mathbf{R}^*$ есть произведение структур групп в $\mathbf{R}_+^*$ и в U_0. С другой стороны, отображение $x \mapsto |x|$ непрерывно, а потому непрерывно и отображение $x \mapsto \operatorname{sgn} x = \frac{x}{|x|}$, поскольку $x \neq 0$; тем самым предложение полностью доказано.

Функцию $\operatorname{sgn} x$ продолжают на все $\mathbf{R}$, полагая $\operatorname{sgn} 0 = 0$.

Мы увидим в главе V (§ 4, теорема 1), что топологическая группа $\mathbf{R}_+^*$ *изоморфна аддитивной* группе $\mathbf{R}$, чем и будет окончательно определена структура топологической группы $\mathbf{R}^*$.

3. *Корни n-й степени*

Пусть n — произвольное целое > 0; из отношения $0 < x < y$ индукцией по n получаем $0 < x^n < y^n$; иначе говоря, функция $x \mapsto x^n$ — *строго возрастающая* при $x \geqslant 0$; она, очевидно, *непрерывна* в каждой точке и потому (§ 2, теорема 5) является *гомеоморфизмом* $\mathbf{R}_+$ на некоторый интервал I; с другой стороны, так как $x \geqslant 1$ влечет $x^{n-1} \geqslant 1$ и значит $x^n \geqslant x$, то интервал I не ограничен и, следовательно, $I = \mathbf{R}_+$.

Значения *отображения, обратного к* $x \mapsto x^n$, для $x \geqslant 0$ обозначают $x^{\frac{1}{n}}$ или $\sqrt[n]{x}$ и называют x *в степени* $\frac{1}{n}$ *или корнем n-й степени из* x (при $n = 2$, 3 соответственно *квадратным* корнем, *кубическим* корнем; при $n = 2$ вместо $\sqrt[2]{x}$ пишут $\sqrt{x}$). Неотрицательное число $x^{\frac{1}{n}}$ определено, таким образом, как единственное неотрицательное решение уравнения

$$y^n = x \quad (x \geqslant 0). \tag{2}$$

В частности, видим, что существует вещественное число x, для которого $x^2 = 2$, тогда как никакое рациональное число не обладает этим свойством; тем самым это вновь показывает, что рациональная прямая $\mathbf{Q}$ не является полным пространством.

Отображение $x \mapsto x^{\frac{1}{n}}$ множества $\mathbf{R}_+$ на себя — *строго возрастающее* и *непрерывное*. На основании (2) имеем $0^{\frac{1}{n}} = 0$, $1^{\frac{1}{n}} = 1$ и, кроме того,

$$(xy)^{\frac{1}{n}} = x^{\frac{1}{n}} y^{\frac{1}{n}}, \tag{3}$$

откуда видим, что $x \mapsto x^{\frac{1}{n}}$ есть *автоморфизм* топологической группы $\mathbf{R}_+^*$.

В n° 1 § 4 главы V мы обобщим этот результат, найдя *все* автоморфизмы мультипликативной группы $\mathbf{R}_+^*$.

Упражнения

1) Пусть x — вещественное число $\geqslant 0$, p и q — целые > 0. Доказать соотношения

$$(x^{\frac{1}{p}})^{\frac{1}{q}} = x^{\frac{1}{pq}}, \quad (x^p)^{\frac{1}{q}} = (x^{\frac{1}{q}})^p, \quad x^{\frac{1}{p}} x^{\frac{1}{q}} = (x^{p+q})^{\frac{1}{pq}}.$$

2) а) Рассмотрим в кольце полиномов $A = \mathbf{R}[X]$ структуру совершенно упорядоченного кольца, для которой элементами $\geqslant 0$ служат 0 и полиномы $\neq 0$ со старшим коэффициентом >0. Показать, что топология $\mathcal{T}_0(A)$ не согласуется со структурой кольца в A.

б) В упорядоченном поле K (Алг., гл. VI, § 2, n° 2) топология $\mathcal{T}_0(K)$ согласуется со структурой кольца в K, и множествами, ограниченными в этой кольцевой топологии (гл. III, § 6, упражнение 12), служат множества, ограниченные относительно структуры порядка. Топология $\mathcal{T}_0(K)$ локально обратно ограниченна (гл. III, § 6, упражнение 22) и, в частности, согласуется со структурой поля в K; кроме того, пополнение $\hat{K}$ поля K по этой топологии, являющееся полем (там же), канонически наделено структурой упорядоченного поля. [§ 1, упражнение 3б.]

в) В поле $K = \mathbf{Q}(\sqrt{2})$, рассматриваемом как упорядоченное подполе в $\mathbf{R}$, рассмотрим топологию $\mathcal{T}$, полученную перенесением топологии произведения $\mathbf{Q}^2$ посредством биекции $(x, y) \mapsto x + y\sqrt{2}$. Эта топология мажорирует $\mathcal{T}_0(K)$ и согласуется со структурой поля в K; но пополнение этого топологического поля не есть поле.

г) Поле $K = \mathbf{Q}(\sqrt[3]{2})$, рассматриваемое как векторное пространство над $\mathbf{Q}$, есть прямая сумма векторного подпространства G', порожденного 1 и $\sqrt[3]{2}$, и векторного подпространства G'', порожденного $\sqrt[3]{4}$. Рассмотрим в G' и G'' топологии, индуцируемые из $\mathbf{R}$, а в K — произведение $\mathcal{T}$ этих топологий в G' и G''. Показать, что $\mathcal{T}$ согласуется со структурой аддитивной группы в K и мажорирует $\mathcal{T}_0(K)$ (где K рассматривается как упорядоченное подполе в $\mathbf{R}$), но не согласуется со структурой кольца в K.

*3) а) Показать, что изоморфизм f поля $\mathbf{R}$ на его подполе необходимо есть тождественное отображение $\mathbf{R}$ на себя. [Заметить, что рациональные числа инвариантны относительно f, а с другой стороны, $f(x^2) = (f(x))^2 \geqslant 0$, так что f — возрастающее отображение.]

б) Пусть K_0 — поле $\mathbf{R}(X)$ рациональных дробей с одной переменной над $\mathbf{R}$, упорядоченное принятием за полиномы >0 полиномов со старшим коэффициентом >0. Пусть K — максимальное упорядоченное алгебраическое расширение поля K_0. Показать, что существует возрастающий автоморфизм f поля K такой, что $f(\xi) = \xi$ для всех $\xi \in \mathbf{R}$ и $f(X) = X^2$ *).

---

*) Использовать свойство единственности, с точностью до изоморфизма, максимального упорядоченного алгебраического расширения упорядоченного поля (B. L. van der Waerden, Moderne Algebra, т. I, 1-е изд., Berlin, Springer, 1930, стр. 232—234). [Во втором издании сохранено доказательство только для случая счетных полей; см. русский перевод: Б. Л. Ван-дер-Варден, Современная алгебра, ч. I, Гостехиздат, 1947, стр. 294—296, а также предисловие А. Г. Куроша к этому переводу. — *Ред.*]

§ 4. Расширенная числовая прямая

1. *Гомеоморфизм открытых интервалов числовой прямой* $\mathbf{R}$

Предложение 1. *Все непустые открытые интервалы числовой прямой* $\mathbf{R}$ *гомеоморфны* $\mathbf{R}$.

Рассмотрим сначала *ограниченный* открытый интервал $I =]a, b[$ $(a < b)$. Для каждого $x \in I$ положим $f(x) = -\left(\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b}\right)$. Это строго возрастающая непрерывная функция на I, ибо, как мы видели, $\frac{1}{x-b}$ строго убывает в $]\leftarrow, b[$, а $\frac{1}{x-a}$ строго убывает в $]a, \rightarrow[$. Отсюда следует, что f есть гомеоморфизм I на интервал $f(I) \subset \mathbf{R}$ (§ 2, теорема 5); при этом $f(I)$ не ограниченно ни сверху, ни снизу, ибо если бы, например, при любом $x \in I$ было $f(x) \leqslant c$, то, поскольку $b - x > 0$, отсюда следовало бы, что $1 - \frac{b-x}{x-a} \leqslant c(b-x)$, а это приводит к противоречию, как только x взято достаточно близко к b (в силу непрерывности рациональных функций, стоящих в обеих частях неравенства, в точке b).

Таким образом, $f(I) = \mathbf{R}$, чем установлено, что все ограниченные открытые интервалы гомеоморфны $\mathbf{R}$. Пусть g — отображение, обратное к f; оно переводит всякий неограниченный открытый интервал из $\mathbf{R}$ в интервал J, содержащийся в I и открытый относительно I. Поскольку I открыт в $\mathbf{R}$, также J открыт в $\mathbf{R}$; будучи ограниченным, интервал J гомеоморфен $\mathbf{R}$, чем доказано, что и всякий неограниченный открытый интервал гомеоморфен $\mathbf{R}$.

Замечание. Для доказательства того, что все *ограниченные* открытые интервалы гомеоморфны между собой, достаточно заметить, что при $a \neq b$, $a' \neq b'$ существует (и притом единственный) гомеоморфизм $\mathbf{R}$ на себя вида $x \mapsto \alpha x + \beta$, отображающий a на a' и b на b', а потому весь открытый (соотв. замкнутый, полуоткрытый) интервал с концами a и b на открытый (соотв. замкнутый, полуоткрытый) интервал с концами a' и b'; читатель легко проверит это, вычислив α и β.

2. Расширенная прямая

Нашей целью теперь будет, путем *присоединения* к $\mathbf{R}$ двух новых элементов, определить топологическое пространство $\overline{\mathbf{R}}$ так, чтобы всякий гомеоморфизм пространства $\mathbf{R}$ на ограниченный открытый интервал $I \subset \mathbf{R}$ мог быть продолжен до гомеоморфизма пространства $\overline{\mathbf{R}}$ на замкнутый интервал с теми же концами, что и I.

Пусть $\overline{\mathbf{R}}$ — множество, полученное путем присоединения к $\mathbf{R}$ (Теор. мн., Сводка результ., § 4, n° 5) двух элементов, которые мы обозначим соответственно $-\infty$ и $+\infty$. Продолжим на $\overline{\mathbf{R}}$ структуру порядка в $\mathbf{R}$, положив $-\infty < a$, $a < +\infty$, каково бы ни было $a \in \mathbf{R}$, и $-\infty < +\infty$; очевидно, мы получим так совершенно упорядоченное множество, структура порядка которого индуцирует в $\mathbf{R}$ структуру порядка числовой прямой. Далее, рассмотрим в $\overline{\mathbf{R}}$ топологию, порождаемую множеством всех открытых интервалов из $\overline{\mathbf{R}}$; так как следом на $\mathbf{R}$ открытого интервала из $\overline{\mathbf{R}}$ является открытый интервал в $\mathbf{R}$, то эта топология индуцирует в $\mathbf{R}$ топологию числовой прямой.

Определение 1. *Расширенной числовой прямой называется множество* $\overline{\mathbf{R}}$, *наделенное структурой порядка и топологией, определенными указанным образом.*

В рассуждениях, относящихся к расширенной числовой прямой $\overline{\mathbf{R}}$, часто бывает удобно, допуская вольность речи, называть и ее точки *вещественными числами*; точки из $\mathbf{R}$ (которым это наименование было присвоено прежде) называются тогда *конечными вещественными числами*. Мы примем это соглашение *в настоящем параграфе и трех следующих*; всякий раз, принимая его в последующем, мы будем точно указывать, на какую часть текста оно распространяется.

Пусть a — конечное вещественное число; интервалы $[a, +\infty[$ и $]-\infty, a]$ (соотв. $]a, +\infty[$ и $]-\infty, a[$) из $\overline{\mathbf{R}}$ содержатся в $\mathbf{R}$ и совпадают с интервалами в $\mathbf{R}$, обозначавшимися до сих пор через $[a, \rightarrow[$ и $]\leftarrow, a]$ (соотв. $]a, \rightarrow[$ и $]\leftarrow, a[$); эти новые обозначения используются гораздо чаще. Точно так же $\mathbf{R}$ совпадает с интервалом $]-\infty, +\infty[$ из $\overline{\mathbf{R}}$ и иногда обозначается этим символом.

Предложение 2. *Всякий гомеоморфизм f пространства* $\mathbf{R}$ *на интервал* $]a, b[$ *может быть продолжен до гомеоморфизма* $\bar{f}$ *пространства* $\overline{\mathbf{R}}$ *на* $[a, b]$; *если* f — *возрастающая функция, то* $\bar{f}$ *есть изоморфизм структуры порядка в* $\overline{\mathbf{R}}$ *на структуру порядка в* $[a, b]$.

В самом деле, предположим сначала, что f — возрастающий гомеоморфизм. Если продолжить f на $\overline{\mathbf{R}}$, положив $\bar{f}(-\infty) = a$, $\bar{f}(+\infty) = b$, то ясно, что $\bar{f}$ будет строго возрастающим (и потому биективным) отображением $\overline{\mathbf{R}}$ на $[a, b]$. Поэтому $\bar{f}$ будет отображать всякий открытый интервал из $\overline{\mathbf{R}}$ на интервал, открытый относительно $[a, b]$, и, следовательно, согласно определению 1, а также предложению 5 § 1, будет гомеоморфизмом $\overline{\mathbf{R}}$ на $[a, b]$.

Если гомеоморфизм f убывающий, то нужно только применить сказанное к возрастающему гомеоморфизму $x \mapsto -f(x)$ числовой прямой $\mathbf{R}$ на $]-b, -a[$.

Все полученные в § 2 свойства интервала $[a, b]$, связанные только со структурой порядка и топологией этого интервала, переносятся, таким образом, на $\overline{\mathbf{R}}$, откуда вытекают следующие предложения:

Предложение 3. *Расширенная числовая прямая компактна.*

Таким образом, существует (гл. II, § 4, теорема 1) однозначно определенная равномерная структура, согласующаяся с топологией в $\overline{\mathbf{R}}$; эта структура изоморфна равномерной структуре, индуцируемой в $[a, b]$ аддитивной равномерной структурой числовой прямой $\mathbf{R}$. Но следует заметить, что равномерная структура, *индуцируемая* в $\mathbf{R}$ из $\overline{\mathbf{R}}$ (и согласующаяся с топологией числовой прямой), *не совпадает с аддитивной равномерной структурой* числовой прямой $\mathbf{R}$; в самом деле, при этой последней структуре $\mathbf{R}$ есть *полное* пространство, тогда как $\mathbf{R}$ не является полным подпространством пространства $\overline{\mathbf{R}}$, поскольку $\mathbf{R}$ не замкнуто в $\overline{\mathbf{R}}$.

Предложение 4. *Всякое непустое множество в* $\overline{\mathbf{R}}$ *имеет верхнюю и нижнюю грани.*

Верхняя (соотв. нижняя) грань множества $A \subset \overline{\mathbf{R}}$ обозначается $\sup A$ (соотв. $\inf A$). Очевидно,

$$\inf A \leqslant \sup A. \tag{1}$$

Если $A \subset B$, то $\sup A \leqslant \sup B$ и $\inf A \geqslant \inf B$ (Теор. мн., гл. III, § 1, предложение 4).

Предложение 5. *Для того чтобы множество $A \subset \overline{\mathbf{R}}$ было связным, необходимо и достаточно, чтобы оно было интервалом.*

Следствие. *Расширенная числовая прямая есть связное локально связное пространство.*

Предложение 6. *Для того чтобы отображение f интервала $I \subset \overline{\mathbf{R}}$ в $\overline{\mathbf{R}}$ было гомеоморфизмом I на $f(I)$, необходимо и достаточно, чтобы f было строго монотонным и непрерывным на I; $f(I)$ является тогда интервалом в $\overline{\mathbf{R}}$.*

Наконец, функции $\sup(x, y)$ и $\inf(x, y)$ *непрерывны* на $\overline{\mathbf{R}} \times \overline{\mathbf{R}}$.

3. *Сложение и умножение в $\overline{\mathbf{R}}$*

Заметим, прежде всего, что функция $-x$ может быть продолжена по непрерывности на $\overline{\mathbf{R}}$ с помощью формул $-(+\infty) = -\infty$ и $-(-\infty) = +\infty$; продолженная таким образом функция тоже будет гомеоморфизмом $\overline{\mathbf{R}}$ на себя.

Во-вторых, рассмотрим функции $x + y$ и xy, определенные на $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$, со значениями в $\mathbf{R}$; считая эти функции принимающими свои значения *в топологическом пространстве* $\overline{\mathbf{R}}$, покажем, что эти функции также можно продолжить по непрерывности на некоторые точки из $\overline{\mathbf{R}} \times \overline{\mathbf{R}}$.

Что касается $x + y$, то, положив $A' =]-\infty, +\infty]$ и $A'' = [-\infty, +\infty[$, будем иметь следующее предложение:

Предложение 7. *Функция $x + y$ может быть продолжена по непрерывности на каждое из множеств $A' \times A'$ и $A'' \times A''$ с помощью формул*

$$\left.\begin{aligned} x+(+\infty)=(+\infty)+x=+\infty \quad & (x \neq -\infty), \\ x+(-\infty)=(-\infty)+x=-\infty \quad & (x \neq +\infty). \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Покажем, например, что если (x, y) стремится к точке $(a, +\infty)$ $(a \neq -\infty)$, оставаясь в $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$, то $x + y$ стремится к $+\infty$. В самом деле, существует конечное число $b < a$, и интервал $]b, +\infty]$ является окрестностью a в $\overline{\mathbf{R}}$; каково бы ни было конечное c, из $x > b$, $y > c - b$ следует $x + y > c$, откуда видно, что $x + y$ сколь угодно близко к $+\infty$, если (x, y) достаточно близко к $(a, +\infty)$. Так же рассуждаем и в остальных случаях.

Напротив, $x + y$ *не имеет предела* в точках $(-\infty, +\infty)$ и $(+\infty, -\infty)$ произведения $\overline{\mathbf{R}} \times \overline{\mathbf{R}}$; в самом деле, если бы $x + y$ имело (конечный или бесконечный) предел k, когда (x, y) стремится к $(+\infty, -\infty)$, оставаясь в $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$, то отсюда следовало бы, что для любого конечного a функция $(x + a) - x$ стремится к k, когда x стремится к $+\infty$, оставаясь в $\mathbf{R}$; но это абсурдно, поскольку $(x + a) - x = a$, где a произвольно.

Функция $x + y$ отображает $A' \times A'$ (соотв. $A'' \times A''$) в A' (соотв. A''). Она является, таким образом, *законом композиции* в A' (соотв. A''), продолжающим сложение, заданное в $\mathbf{R}$; в силу принципа продолжения тождеств (гл. I, § 8, следствие 1 предложения 2) этот закон *коммутативен* и *ассоциативен*. 0 есть нейтральный элемент для него; единственным *не регулярным* (Алг., гл. I, § 2, n° 2) элементом A' является, по формулам (2), $+\infty$.

Пусть x, y, z, t — точки из $\overline{\mathbf{R}}$ такие, что $x \leqslant y$ и $z \leqslant t$; тогда $x + z \leqslant y + t$, если обе части этого неравенства имеют смысл.

Отметим, что в $\overline{\mathbf{R}}$, согласно формулам (2), $x < y$ влечет $x + z < y + z$, только когда z *конечно*; легко убедиться в том, что из $x < y$ и $z < t$ по-прежнему следует $x + z < y + t$, когда обе части последнего неравенства имеют смысл.

Введем и в $\overline{\mathbf{R}}$ обозначения $x^+ = \sup(x, 0)$, $x^- = \sup(-x, 0)$, $|x| = \sup(x, -x)$; тогда $(+\infty)^+ = (-\infty)^- = +\infty$, $(+\infty)^- = (-\infty)^+ = 0$, $|+\infty| = |-\infty| = +\infty$. Суммы $x^+ - x^-$ и $x^+ + x^-$ имеют смысл при любом $x \in \overline{\mathbf{R}}$ и, значит, равны соответственно x и $|x|$ по принципу продолжения тождеств. Кроме того, всякий раз, когда сумма $x + y$ определена, имеем $|x + y| \leqslant |x| + |y|$.

Отметим, что, напротив, формулы (6) и (7) n° 1 § 1 могут потерять смысл для некоторых значений x и y из $\overline{\mathbf{R}}$; например, для $x = -\infty$, $y = 0$ имеем $\sup(x, y) = 0$, сумма же $x + (y - x)^+$ не определена, ибо $(y - x)^+ = +\infty$.

Обозначим теперь через $\overline{\mathbf{R}}^*$ дополнение нуля в $\overline{\mathbf{R}}$; аналогом предложения 7 для умножения будет

Предложение 8. *Функция xy может быть продолжена по непрерывности на множество $\overline{\mathbf{R}}^* \times \overline{\mathbf{R}}^*$ с помощью формул*

$$\left.\begin{aligned} x\cdot(+\infty) = (+\infty)\cdot x &= \begin{cases} +\infty, & \text{если } x > 0, \\ -\infty, & \text{если } x < 0, \end{cases} \\ x\cdot(-\infty) = (-\infty)\cdot x &= \begin{cases} -\infty, & \text{если } x > 0, \\ +\infty, & \text{если } x < 0. \end{cases} \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Доказательство этого предложения, аналогичное доказательству предложения 7, мы предоставляем читателю.

Можно также показать, что xy *не имеет предела* в точках $(0, +\infty)$, $(+\infty, 0)$, $(0, -\infty)$, $(-\infty, 0) \in \overline{\mathbf{R}} \times \overline{\mathbf{R}}$.

Функция xy является *законом композиции* в $\overline{\mathbf{R}}^*$, продолжающим умножение, заданное в $\mathbf{R}^*$; этот закон *ассоциативен* и *коммутативен* (принцип продолжения тождеств); 1 служит для него единичным элементом; не регулярными элементами в $\overline{\mathbf{R}}^*$ будут $+\infty$ и $-\infty$.

Если $x \leqslant y$ и $z > 0$, то $xz \leqslant yz$, когда обе части последнего неравенства определены. Если произведение xy имеет смысл, то $|x|\,|y|$ тоже имеет смысл, и $|xy| = |x|\cdot|y|$.

Наконец, в силу принципа продолжения тождеств имеет еще место формула дистрибутивности

$$x(y+z) = xy + xz, \tag{4}$$

если *все* операции, фигурирующие в левой и правой ее частях, определены.

Отметим, что левая часть формулы (4) может иметь смысл и тогда, когда правая не определена; достаточно, например, рассмотреть случай, когда $x = +\infty$, $y = 2$, $z = -1$. Таким образом, формулой дистрибутивности в $\overline{\mathbf{R}}$ следует пользоваться осмотрительно.

Упражнения

1) Показать, что в $\mathbf{R}$ все ограниченные полуоткрытые интервалы и неограниченные с одной стороны замкнутые интервалы гомеоморфны между собой. Ни один из трех интервалов $]a, b[$, $[a, b[$, $[a, b]$, где $a < b$, не гомеоморфен никакому из двух других.

2) Показать, что отображение $x \longmapsto \frac{x}{1+|x|}$ есть гомеоморфизм $\mathbf{R}$ на открытый интервал $]-1, 1[$.

3) Пусть I — интервал $[0, 1]$ в $\mathbf{R}$ и f — такой гомеоморфизм I на себя, что $f(0) = 0$, $f(1) = 1$. Показать, что существует непрерывное отображение g произведения $I \times I$ в I такое, что: 1° $g(x, 0) = x$, $g(x, 1) = f(x)$ для всех $x \in I$; 2° для любого $y \in I$ частичное отображение $x \longmapsto g(x, y)$ есть гомеоморфизм I на себя такой, что $g(0, y) = 0$ и $g(1, y) = 1$.

4) Показать, что равномерная структура в $\mathbf{R}$, индуцируемая единственной равномерной структурой из $\overline{\mathbf{R}}$, слабее аддитивной равномерной структуры в $\mathbf{R}$.

5) Показать, что, когда точка (x, y) стремится к $(+\infty, -\infty)$, оставаясь в $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$, множество предельных точек функции $x + y$ совпадает с $\overline{\mathbf{R}}$. Точно так же, когда (x, y) стремится к $(0, +\infty)$, оставаясь в $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$, множество предельных точек функции xy совпадает с $\overline{\mathbf{R}}$.

6) Показать, что всякая рациональная функция $\frac{P(x)}{Q(x)}$ с коэффициентами из $\mathbf{R}$, определенная на множестве тех точек, где $Q(x) \neq 0$, может быть продолжена по непрерывности на точки $+\infty$ и $-\infty$ (если считать ее принимающей значения в $\overline{\mathbf{R}}$).

*7) Пусть E — совершенно упорядоченное множество.

а) Пусть E_1 — *пополнение* E (Теор. мн., гл. III, § 1, упражнение 15), т. е. совершенно упорядоченное множество, элементами которого являются такие множества $X \subset E$, что: 1° если $x \in X$ и $y \leqslant x$, то $y \in X$; 2° если X обладает верхней гранью в E, то эта грань принадлежит X (условие, означающее замкнутость X в топологии $\mathcal{T}_0(E)$); элементы множества E_1 упорядочены по включению. E_1 в топологии $\mathcal{T}_0(E_1)$ компактно. [§ 2, упражнение 6а.] Отображение $x \longmapsto]\leftarrow, x]$ множества E в E_1 строго возрастающее, и при отождествлении со своим образом при этом отображении E плотно в E_1, а $\mathcal{T}_0(E_1)$ индуцирует $\mathcal{T}_0(E)$. Для того чтобы E_1 было связным, необходимо и достаточно, чтобы E было без дыр (§ 2, упражнение 7).

б) Для любого кардинального числа $\mathfrak{c}$ дать пример совершенно упорядоченного пространства E, связного в топологии $\mathcal{T}_0(E)$ и такого, что всякая фундаментальная система окрестностей любой точки из E имеет мощность $\geqslant \mathfrak{c}$. [Использовать а) и метод упражнения 4б § 1.]

в) Пусть, в обозначениях из а), E_2 означает подмножество лексикографического произведения $E_1 \times \{-1, 0, 1\}$, дополнительное к множеству, образованному: 1° точками $(x, 0)$, где $x \notin E$; 2° точками $(x, 1)$, где $x \in E$ и множество всех $y > x$ в E имеет наименьший элемент; 3° точками $(x, -1)$, где $x \in E$ и множество всех $y < x$ в E имеет наибольший элемент. Показать, что E_2, наделенное топологией $\mathcal{T}_0(E_2)$, компактно и вполне несвязно, что E отождествимо посредством строго возрастающего отображения $x \longmapsto (x, 0)$ со всюду

плотным подмножеством из E_2 и что топология, индуцируемая в E топологией $\mathscr{T}_0(E_2)$, дискретна.

г) Пусть E' — совершенно упорядоченное множество, содержащее E, индуцирующее в E заданную структуру порядка, компактное в топологии $\mathscr{T}_0(E')$ и такое, что E плотно в E' при этой топологии. Показать, что существуют непрерывное возрастающее сюръективное отображение $f\colon E' \to E_1$ и непрерывное возрастающее сюръективное отображение $g\colon E_2 \to E'$, сводящиеся к тождественному отображению на E.

§ 5. Числовые функции

1. *Числовые функции*

Определение 1. *Отображения множества E в числовую прямую называются числовыми функциями* (*или вещественными функциями*), *определенными на* E.

Допуская вольность речи, аналогичную отмеченной в n° 2 § 4, мы *в настоящем и следующем параграфах* будем называть *числовыми функциями*, определенными на E, отображения E в $\overline{\mathbf{R}}$; отображения же E в $\mathbf{R}$ будут называться *конечными числовыми функциями*.

Пусть f и g — числовые функции, определенные на E; по определению отношение $f \leqslant g$ эквивалентно отношению «$f(x) \leqslant g(x)$, каково бы ни было $x \in E$»; это есть *отношение порядка* в множестве $\overline{\mathbf{R}}^E$ всех числовых функций, определенных на E. При этом $\overline{\mathbf{R}}^E$, упорядоченное этим отношением, является *решеткой*; в самом деле, если f и g — две числовые функции, то числовая функция h такая, что $h(x) = \sup(f(x), g(x))$ при любом $x \in E$, будет наименьшей среди числовых функций, которые одновременно $\geqslant f$ и $\geqslant g$; в соответствии с общими соглашениями мы будем обозначать эту функцию (являющуюся верхней гранью f и g в $\overline{\mathbf{R}}^E$) $\sup(f, g)$; точно так же числовая функция, равная $\inf(f(x), g(x))$ для каждого $x \in E$, будет обозначаться $\inf(f, g)$.

Заметим, что $\sup(f, g)$ есть композиция отображения $(u, v) \longmapsto \sup(u, v)$ произведения $\overline{\mathbf{R}} \times \overline{\mathbf{R}}$ в $\overline{\mathbf{R}}$ и отображения $x \longmapsto (f(x), g(x))$ множества E в $\overline{\mathbf{R}} \times \overline{\mathbf{R}}$. Аналогичное верно для $\inf(f, g)$.

Числовая функция f, определенная на множестве E, называется *ограниченной сверху* (соотв. *снизу*) на E, если $f(E)$ есть

ограниченное сверху множество в $A'' = [-\infty, +\infty[$ (соотв. ограниченное снизу множество в $A' =]-\infty, +\infty]$); функция f называется *ограниченной* на E, если она одновременно ограниченна сверху и снизу, т. е. если $f(E)$ есть ограниченное множество *в* $\mathbf{R}$.

Таким образом, всякая ограниченная функция *конечна*; обратное неверно, как показывает пример функции $\frac{1}{x}$ на $\mathbf{R}_+^* =]0, +\infty[$.

2. *Числовые функции, определенные на фильтрующемся множестве*

Предложение 1. *Пусть f и g — числовые функции, определенные на множестве E, фильтрующемся по фильтру $\mathfrak{F}$. Если $\lim_{\mathfrak{F}} f$ и $\lim_{\mathfrak{F}} g$ существуют и если для любого множества $A \in \mathfrak{F}$ существует $x \in A$ такое, что $f(x) \leqslant g(x)$, то $\lim_{\mathfrak{F}} f \leqslant \lim_{\mathfrak{F}} g$.*

Для установления справедливости этого предложения мы докажем следующее эквивалентное ему утверждение:

Предложение 2. *Пусть f и g — числовые функции, определенные на множестве E, фильтрующемся по фильтру $\mathfrak{F}$. Если $\lim_{\mathfrak{F}} f$ и $\lim_{\mathfrak{F}} g$ существуют и если $\lim_{\mathfrak{F}} f > \lim_{\mathfrak{F}} g$, то существует множество $A \in \mathfrak{F}$ такое, что $f(x) > g(x)$ для всех $x \in A$.*

Положим $a = \lim_{\mathfrak{F}} f$, $b = \lim_{\mathfrak{F}} g$, и пусть c таково, что $b < c < a$. Интервал $]c, +\infty]$ (соотв. $[-\infty, c[$) в $\overline{\mathbf{R}}$ есть окрестность точки a (соотв. b); следовательно, существует множество $M \in \mathfrak{F}$ (соотв. множество $N \in \mathfrak{F}$) такое, что $f(x) > c$ для всех $x \in M$ (соотв. $g(x) < c$ для всех $x \in N$); множество $A = M \cap N$ принадлежит $\mathfrak{F}$, и $f(x) > c > g(x)$ для всех $x \in A$.

Из предложения 1 вытекает как частный случай следующая теорема:

Теорема 1 (принцип продолжения неравенств). *Пусть f, g — числовые функции, определенные на множестве E, фильтрующемся по фильтру $\mathfrak{F}$. Если $\lim_{\mathfrak{F}} f$ и $\lim_{\mathfrak{F}} g$ существуют и $f \leqslant g$, то и $\lim_{\mathfrak{F}} f \leqslant \lim_{\mathfrak{F}} g$.*

Замечание. Если, в частности, $f(x) < g(x)$ для всех $x \in E$ (или хотя бы для всех точек некоторого множества, принадлежащего фильтру $\mathfrak{F}$), то отсюда по теореме 1 можно заключить, что $\lim_{\mathfrak{F}} f \leqslant$

$\leqslant \lim_{\mathfrak{F}} g$; *но не следует думать, что можно было бы вывести более точное неравенство* $\lim_{\mathfrak{F}} f < \lim_{\mathfrak{F}} g$. Например, если за E взять множество $\mathbf{N}$ натуральных чисел, фильтрующееся по фильтру Фреше, и если $f(n) = 0$, $g(n) = \frac{1}{n}$, то $f(n) < g(n)$ при любом n, но $\lim\limits_{n\to\infty} f(n) = \lim\limits_{n\to\infty} g(n) = 0$.

Более образно можно сказать, что при переходе к пределу в *строгом* неравенстве происходит *потеря точности*.

Теорема 2 (теорема о пределе монотонной функции). *Пусть E — упорядоченное множество, A — его подмножество, фильтрующееся вправо* *). *Всякая монотонная числовая функция f, определенная на A, имеет предел по A* (гл. I, § 7, n° 3); *если функция f возрастающая* (соотв. *убывающая*), *то этот предел равен верхней* (соотв. *нижней*) *грани множества* $f(A) \subset \overline{\mathbf{R}}$.

Предположим, например, что f — возрастающая функция, и пусть $a = \sup f(A)$. Если $a = -\infty$, то теорема тривиальна. Если $a > -\infty$, то для любого $b < a$ существует $x \in A$ такое, что $b < f(x) \leqslant a$; обозначив через S_x *сечение* множества A, отвечающее x (множество точек $y \geqslant x$, см. гл. I, § 6, n° 3), заключаем, что $f(S_x)$ содержится в окрестности $]b, +\infty]$ точки a, что и доказывает теорему. В случае убывания f доказательство аналогично.

Следствие. *Для того чтобы возрастающая* (соотв. *убывающая*) *числовая функция, определенная на фильтрующемся подмножестве A упорядоченного множества E, имела предел по A, необходимо и достаточно, чтобы она была ограниченна сверху* (соотв. *снизу*) *на A.*

Применяя теорему 2 к случаю множества $A = E = \mathbf{N}$ (упорядоченного отношением $\leqslant$), имеем следующее предложение:

Предложение 3. *Всякая монотонная последовательность вещественных чисел имеет предел в* $\overline{\mathbf{R}}$.

---

*) Эта формулировка содержит неявное предположение, что отношение порядка в E обозначается $x \leqslant y$. Если оно обозначается $x\ (\sigma)\ y$, где (σ) — некоторый знак или набор знаков, характеризующий рассматриваемое отношение, то слова «фильтрующееся вправо» в формулировке теоремы следует заменить словами «фильтрующееся по отношению (σ)».

В частности, всякая возрастающая (соотв. убывающая) последовательность *конечных* чисел сходится к конечному вещественному числу, если она ограниченна сверху (соотв. снизу), и к $+\infty$ (соотв. $-\infty$) в противном случае. Например, последовательность положительных целых чисел сходится к $+\infty$.

Отсюда и ведет начало обозначение $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$ для предела последовательности (гл. I, § 7, n° 3).

Точно так же всякая *строго возрастающая* последовательность целых чисел (p_n) сходится к $+\infty$, ибо, как устанавливается по индукции, $p_n \geqslant p_0 + n$ для любого n.

3. Пределы справа и слева функции вещественной переменной

Пусть A — непустое множество из $\overline{\mathbf{R}}$ и $a \neq -\infty$ — точка прикосновения множества $B = A \cap [-\infty, a[$ в $\overline{\mathbf{R}}$. Множество B — фильтрующееся по отношению $\leqslant$, и его фильтр сечений $\mathfrak{F}$ совпадает со *следом* на B фильтра окрестностей точки a в $\overline{\mathbf{R}}$.

Определение 2. *Пусть f — функция, определенная на множестве $A \subset \overline{\mathbf{R}}$, со значениями в топологическом пространстве E. Предел f по фильтру $\mathfrak{F}$, если этот предел существует, называется пределом слева функции f в точке a относительно множества A и обозначается* $\lim\limits_{x\to a,\ x<a,\ x\in A} f(x)$ *или* $f(a-)$, *когда E отделимо.*

Если $a \neq +\infty$ — точка прикосновения множества $A \cap]a, +\infty]$, то таким же образом определяется *предел справа* (если он существует) функции f в точке a; обозначается он $\lim\limits_{x\to a,\ x>a,\ x\in A} f(x)$ или $f(a+)$, когда E отделимо.

Из теоремы 2 непосредственно вытекает следующее предложение:

Предложение 4. *Пусть $A \subset \overline{\mathbf{R}}$ и $a \neq -\infty$ — точка прикосновения множества $A \cap [-\infty, a[$; всякая монотонная числовая функция f, определенная на A, имеет предел слева $f(a-)$ в точке a относительно A.*

4. Грани числовой функции

Определение 3. *Пусть f — числовая функция, определенная на множестве E; ее верхней гранью* $\sup\limits_{x \in A} f(x)$ (соотв. *нижней гранью* $\inf\limits_{x \in A} f(x)$) *на непустом множестве $A \subset E$ называют верхнюю* (соотв. *нижнюю*) *грань множества $f(A)$ в $\overline{\mathbf{R}}$.*

В частности, для непустого множества $A \subset \overline{\mathbf{R}}$

$$\sup A = \sup_{x \in A} x. \tag{1}$$

Для обозначения верхней грани множества A часто бывает удобнее пользоваться правой частью этого равенства.

Число $a = \sup\limits_{x \in A} f(x)$ характеризуется следующими двумя свойствами:

1° $f(x) \leqslant a$ для всех $x \in A$;

2° каково бы ни было $b < a$, существует $x \in A$ такое, что $b < f(x) \leqslant a$.

Числа $\sup\limits_{x \in A} f(x)$ и $\inf\limits_{x \in A} f(x)$ принадлежат *замыканию* множества $f(A)$ в $\overline{\mathbf{R}}$. При этом $\inf\limits_{x \in A} f(x) \leqslant \sup\limits_{x \in A} f(x)$; для того чтобы эти два числа *совпадали*, необходимо и достаточно, чтобы f была *постоянна* на A.

Для того чтобы числовая функция f, определенная на множестве E, была *ограниченна сверху* (соотв. *снизу*) на его непустом подмножестве A, необходимо и достаточно, чтобы $\sup\limits_{x \in A} f(x) < +\infty$ (соотв. $\inf\limits_{x \in A} f(x) > -\infty$). Для того чтобы f была *ограниченна* на A, необходимо и достаточно, чтобы функция $|f|$ была *ограниченна сверху* на A, т. е. чтобы $\sup\limits_{x \in A} |f(x)| < +\infty$.

Имеет место соотношение

$$\inf_{x \in A} f(x) = -\sup_{x \in A} (-f(x)). \tag{2}$$

Оно сводит все свойства нижней грани к свойствам верхней грани; поэтому мы будем говорить вообще только об этих последних.

Предложение 5. *Пусть f — числовая функция, определенная на множестве E. На множестве $\mathfrak{F}(E)$ всех конечных подмножеств*

множества E, упорядоченном и фильтрующемся по отношению $\subset$, числовая функция $H \mapsto \sup_{x\in H} f(x)$ возрастающая, а числовая функция $H \mapsto \inf_{x\in H} f(x)$ убывающая, причем

$$\left.\begin{aligned} \sup_{x\in E} f(x) &= \lim_{H\in\mathfrak{F}(E)} (\sup_{x\in H} f(x)), \\ \inf_{x\in E} f(x) &= \lim_{H\in\mathfrak{F}(E)} (\inf_{x\in H} f(x)). \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Положим $\varphi(H) = \sup_{x\in H} f(x)$; очевидно, φ возрастает и потому имеет некоторый предел a (теорема 2); так как при этом $\varphi(H) \leqslant \sup_{x\in E} f(x)$, каково бы ни было H, то $a \leqslant \sup_{x\in E} f(x)$ (теорема 1). Если бы имело место неравенство $a < \sup_{x\in E} f(x)$, то существовало бы $x_0 \in E$ такое, что $a < f(x_0)$, а это невозможно, ибо $\varphi(H) \geqslant f(x_0)$, если $x_0 \in H$.

В частности, согласно (1) для любого непустого множества $A \subset \overline{\mathbf{R}}$

$$\sup A = \lim_{H\in\mathfrak{F}(A)} (\sup_{x\in H} x). \tag{4}$$

Предложение 6. *Пусть f и g — числовые функции, определенные на E. Если $f(x) \leqslant g(x)$ во всех точках непустого множества $A \subset E$, то*

$$\left.\begin{aligned} \sup_{x\in A} f(x) &\leqslant \sup_{x\in A} g(x), \\ \inf_{x\in A} f(x) &\leqslant \inf_{x\in A} g(x). \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Предложение 7. *Пусть f — числовая функция, определенная на E; если A и B — непустые подмножества множества E такие, что $A \subset B$, то*

$$\sup_{x\in A} f(x) \leqslant \sup_{x\in B} f(x). \tag{6}$$

Предложение 8. *Пусть f — числовая функция, определенная на E, и $(A_\iota)_{\iota\in I}$ — семейство непустых подмножеств множества E; тогда*

$$\sup_{x\in \bigcup_{\iota\in I} A_\iota} f(x) = \sup_{\iota\in I} (\sup_{x\in A_\iota} f(x)). \tag{7}$$

Эти предложения — частные случаи предложений 5 и 6 и следствия предложения 4 § 1 главы III Теории множеств.

Пусть f — числовая функция, определенная на произведении $E_1 \times E_2$ множеств E_1 и E_2, и A_2 — непустое подмножество множества E_2; обозначим через $\sup\limits_{x_2 \in A_2} f(x_1, x_2)$ верхнюю грань на A_2 числовой функции $x_2 \mapsto f(x_1, x_2)$, определенной на E_2. Из предложения 8, в частности, следует

Предложение 9. *Пусть f — числовая функция, определенная на произведении $E_1 \times E_2$ множеств E_1 и E_2. Каковы бы ни были непустые множества $A_1 \subset E_1$ и $A_2 \subset E_2$, имеем*

$$\sup_{(x_1, x_2) \in A_1 \times A_2} f(x_1, x_2) = \sup_{x_1 \in A_1} (\sup_{x_2 \in A_2} f(x_1, x_2)) = \sup_{x_2 \in A_2} (\sup_{x_1 \in A_1} f(x_1, x_2)). \quad (8)$$

5. Огибающие семейства числовых функций

Определение 4. *Пусть $(f_\iota)_{\iota \in I}$ — семейство числовых функций, определенных на множестве E. Верхней огибающей $\sup\limits_{\iota \in I} f_\iota$* (соотв. *нижней огибающей $\inf\limits_{\iota \in I} f_\iota$*) *семейства (f_ι) называют определенную на E числовую функцию, значение которой в каждой точке $x \in E$ равно $\sup\limits_{\iota \in I} (f_\iota(x))$* (соотв. $\inf\limits_{\iota \in I} (f_\iota(x))$).

Верхняя огибающая семейства (f_ι) есть не что иное, как *верхняя грань* этого семейства в решетке $\overline{\mathbf{R}}^E$ числовых функций, определенных на E, чем и оправдывается обозначение $\sup\limits_{\iota} f_\iota$.

Далее, если наделить $\overline{\mathbf{R}}^E$ *произведением топологий* его сомножителей (каждый из которых совпадает с $\overline{\mathbf{R}}$), то будем иметь следующее предложение:

Предложение 10. *В пространстве $\overline{\mathbf{R}}^E$ верхняя огибающая $\sup\limits_{\iota} f_\iota$ семейства числовых функций $(f_\iota)_{\iota \in I}$ есть предел по фильтрующемуся множеству $\mathfrak{F}(I)$ всех конечных подмножеств H множества I отображения $H \mapsto \sup\limits_{\iota \in H} f_\iota$* (сопоставляющего каждому $H \subset I$ верхнюю огибающую конечного подсемейства $(f_\iota)_{\iota \in H}$).

Это сразу вытекает из следствия 1 предложения 10 § 7 главы I и предложения 5.

Таким образом, можем написать

$$\sup_{\iota \in I} f_\iota = \lim_{H \in \mathfrak{F}(I)} (\sup_{\iota \in H} f_\iota). \tag{9}$$

Определение 5. *Семейство* $(f_\iota)_{\iota \in I}$ *числовых функций, определенных на множестве* E, *называется равномерно ограниченным сверху* (соотв. *снизу*) *на* E, *если существует конечное число* a *такое, что* $f_\iota(x) \leqslant a$ (соотв. $f_\iota(x) \geqslant a$) *при любых* $x \in E$ *и* $\iota \in I$. *Семейство* (f_ι) *называется равномерно ограниченным на* E, *если оно одновременно равномерно ограниченно сверху и снизу на* E.

Таким образом, для того чтобы семейство (f_ι) было равномерно ограниченно сверху на E, необходимо и достаточно, чтобы его *верхняя огибающая* была *ограниченна сверху* на E. Для того чтобы (f_ι) было равномерно ограниченно на E, необходимо и достаточно, чтобы верхняя огибающая семейства $(|f_\iota|)$ была ограниченна сверху на E (т. е. чтобы существовало число $a \geqslant 0$ такое, что $|f_\iota(x)| \leqslant a$ для любого $\iota \in I$ и любого $x \in E$).

6. *Верхний и нижний пределы числовой функции по фильтру*

Пусть f —числовая функция, определенная на множестве E, *фильтрующемся* по фильтру $\mathfrak{G}$. Как известно (гл. I, § 6), $\mathfrak{G}$ есть упорядоченное множество, *фильтрующееся* по отношению $\supset$. Сопоставим каждому множеству $X \in \mathfrak{G}$ вещественное число $\sup_{x \in X} f(x)$; этим будет определено отображение $X \mapsto \sup_{x \in X} f(x)$ фильтра $\mathfrak{G}$ в $\overline{\mathbf{R}}$, по предложению 7 *убывающее* на $\mathfrak{G}$. Тем самым, на основании теоремы 2, оно будет иметь *предел* по фильтрующемуся множеству $\mathfrak{G}$.

Определение 6. *Предел числовой функции* $X \mapsto \sup_{x \in X} f(x)$ *по фильтрующемуся множеству* $\mathfrak{G}$ *называется верхним пределом* f *по фильтру* $\mathfrak{G}$ *и обозначается* $\limsup_{\mathfrak{G}} f$ *или* $\limsup_{x, \mathfrak{G}} f(x)$.

Так же определяется *нижний предел* функции f по фильтру $\mathfrak{G}$, обозначаемый $\lim\inf_{\mathfrak{G}} f$ или $\lim\inf_{x,\mathfrak{G}} f(x)$.

Таким образом, по определению

$$\lim\sup_{\mathfrak{G}} f = \lim_{X\in\mathfrak{G}} (\sup_{x\in X} f(x)), \qquad \lim\inf_{\mathfrak{G}} f = \lim_{X\in\mathfrak{G}} (\inf_{x\in X} f(x)). \qquad (10)$$

В случаях, когда это не может повести к недоразумению, фильтр $\mathfrak{G}$ часто не указывают и пишут просто $\lim\sup f$, или $\lim\sup_x f(x)$, или $\lim\sup f(x)$.

По формулам (10) и теореме 1 имеем

$$\inf_{x\in E} f(x) \leqslant \lim\inf_{\mathfrak{G}} f \leqslant \lim\sup_{\mathfrak{G}} f \leqslant \sup_{x\in E} f(x). \qquad (11)$$

По теореме 2 можно также написать

$$\lim\sup_{\mathfrak{G}} f = \inf_{X\in\mathfrak{G}} (\sup_{x\in X} f(x)), \qquad \lim\inf_{\mathfrak{G}} f = \sup_{X\in\mathfrak{G}} (\inf_{x\in X} f(x)). \qquad (12)$$

При этом в правых частях формул (10) и (12) фильтр $\mathfrak{G}$ может быть заменен любым из его *базисов* $\mathfrak{B}$.

Согласно (2) и (10)

$$\lim\inf_{\mathfrak{G}} f = -\lim\sup_{\mathfrak{G}} (-f), \qquad (13)$$

что позволяет ограничиться изучением лишь свойств верхнего предела.

Теорема 3. *Верхний предел числовой функции f по фильтру $\mathfrak{G}$ равен наибольшей из предельных точек функции f по фильтру $\mathfrak{G}$.*

В самом деле, пусть b — предельная точка функции f по фильтру $\mathfrak{G}$; при любом $X\in\mathfrak{G}$ она будет точкой прикосновения для $f(X)$, так что $b \leqslant \sup_{x\in X} f(x)$, откуда, на основании (12), $b \leqslant \lim\sup_{\mathfrak{G}} f = a$.

С другой стороны, пусть V — какая-либо открытая окрестность точки a в $\overline{\mathbf{R}}$; существует $X_0\in\mathfrak{G}$ такое, что $\sup_{x\in X} f(x)\in V$ для всякого $X\in\mathfrak{G}$, содержащегося в X_0; поскольку V открыто, отсюда следует, что $f(X)$ пересекается с V; таким образом, a есть *предельная точка* функции f по фильтру $\mathfrak{G}$, что и завершает доказательство.

Следствие 1. *Для того чтобы* $\limsup_{\mathfrak{S}} f = \liminf_{\mathfrak{S}} f$, *необходимо и достаточно, чтобы функция* f *имела предел по фильтру* $\mathfrak{S}$; *тогда*

$$\lim_{\mathfrak{S}} f = \limsup_{\mathfrak{S}} f = \liminf_{\mathfrak{S}} f.$$

В самом деле, так как $\overline{\mathbf{R}}$ компактно, то для того, чтобы базис фильтра $f(\mathfrak{S})$ имел предел, необходимо и достаточно, чтобы его замыкание сводилось к одной точке (гл. I, § 9, следствие теоремы 1).

Следствие 2. *Если* $\mathfrak{H}$ — *фильтр, мажорирующий* $\mathfrak{S}$, *то*

$$\liminf_{\mathfrak{S}} f \leqslant \liminf_{\mathfrak{H}} f \leqslant \limsup_{\mathfrak{H}} f \leqslant \limsup_{\mathfrak{S}} f.$$

В самом деле, всякая предельная точка функции f по фильтру $\mathfrak{H}$ является также предельной точкой функции f по фильтру $\mathfrak{S}$ (гл. I, § 7, n° 3).

В частности, если $\lim_{\mathfrak{H}} f$ существует, то

$$\liminf_{\mathfrak{S}} f \leqslant \lim_{\mathfrak{H}} f \leqslant \limsup_{\mathfrak{S}} f.$$

Следствие 3. *Пусть* A — *одно из множеств фильтра* $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}_A$ — *фильтр, индуцируемый фильтром* $\mathfrak{S}$ *на* A, *и* f_A — *сужение* f *на* A; *тогда*

$$\limsup_{\mathfrak{S}_A} f_A = \limsup_{\mathfrak{S}} f.$$

В самом деле, всякая точка прикосновения базиса фильтра $f(\mathfrak{S})$ есть точка прикосновения базиса фильтра $f_A(\mathfrak{S}_A)$, и обратно.

Если функция f определена только на множестве $A \subset E$, принадлежащем $\mathfrak{S}$, то, основываясь на сказанном, часто, допуская вольность речи, вместо $\limsup_{\mathfrak{S}_A} f$ пишут $\limsup_{\mathfrak{S}} f$.

Предложение 11. *Пусть* f *и* g — *числовые функции, определенные на фильтрующемся множестве* E. *Если* $f \leqslant g$, *то*

$$\limsup f \leqslant \limsup g, \qquad \liminf f \leqslant \liminf g. \tag{14}$$

Это — непосредственное следствие формул (12).

Если E — *топологическое пространство* и $\mathfrak{S}$ — *фильтр окрестностей* точки $a \in E$, то вместо $\limsup_{\mathfrak{S}} f$ (соотв. $\liminf_{\mathfrak{S}} f$)

пишут $\limsup\limits_{x\to a} f(x)$ (соотв. $\liminf\limits_{x\to a} f(x)$); очевидно,

$$\liminf_{x\to a} f(x) \leqslant f(a) \leqslant \limsup_{x\to a} f(x). \tag{15}$$

Более общим образом, когда E — *подпространство* топологического пространства F, а $\mathfrak{S}$ — след на E фильтра окрестностей некоторой точки $a \in \overline{E}$, вместо $\limsup_{\mathfrak{S}} f$ (соотв. $\liminf_{\mathfrak{S}} f$) пишут $\limsup\limits_{x\to a,\ x\in E} f(x)$ (соотв. $\liminf\limits_{x\to a,\ x\in E} f(x)$); говорят, что $\limsup\limits_{x\to a,\ x\in E} f(x)$ есть *верхний предел функции* $f(x)$, *когда* x *стремится к* a, *оставаясь в* E. Если E — дополнение множества $\{a\}$, то в этих обозначениях «$x \in E$» заменяют на «$x \neq a$».

Если A — подмножество множества E такое, что $a \in \overline{A}$, то (следствие 2 теоремы 3)

$$\liminf_{x\to a,\ x\in E} f(x) \leqslant \liminf_{x\to a,\ x\in A} f(x) \leqslant \limsup_{x\to a,\ x\in A} f(x) \leqslant \limsup_{x\to a,\ x\in E} f(x).$$

Если V — окрестность точки a в F, то (следствие 3 теоремы 3)

$$\limsup_{x\to a,\ x\in V\cap E} f(x) = \limsup_{x\to a,\ x\in E} f(x).$$

Иначе говоря, понятия нижнего и верхнего пределов в точке топологического пространства имеют, как и понятие предела, *локальный* характер.

Наконец, если $\mathfrak{S}$ — *фильтр Фреше* в $\mathbf{N}$, то верхний (соотв. нижний) предел по $\mathfrak{S}$ отображения $n \mapsto u_n$ множества $\mathbf{N}$ в $\overline{\mathbf{R}}$ обозначается $\limsup\limits_{n\to\infty} u_n$ (соотв. $\liminf\limits_{n\to\infty} u_n$) и называется *верхним* (соотв. *нижним*) *пределом последовательности вещественных чисел* u_n.

Таким образом, отношение $\limsup\limits_{n\to\infty} u_n = a \in \mathbf{R}$ эквивалентно следующему: каково бы ни было $\varepsilon > 0$, существует целое n_0 такое, что $u_n \leqslant a + \varepsilon$ для всякого $n \geqslant n_0$ и $u_n \geqslant a - \varepsilon$ для бесконечного множества значений n. Аналогично расшифровывается определение верхнего предела последовательности в случае, когда он имеет значение $+\infty$ или $-\infty$.

Пусть дана последовательность (f_n) числовых функций, определенных на множестве E; через $\limsup\limits_{n\to\infty} f_n$ (соотв. $\liminf\limits_{n\to\infty} f_n$) обозначается числовая функция, значение которой в любой точке

$x \in E$ равно $\limsup\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ (соотв. $\liminf\limits_{n\to\infty} f_n(x)$). Согласно (10) и (12)

$$\left.\begin{aligned} \limsup_{n\to\infty} f_n &= \inf_{n\in N}(\sup_{m\geqslant n} f_m) = \lim_{n\to\infty}(\sup_{m\geqslant n} f_m), \\ \liminf_{n\to\infty} f_n &= \sup_{n\in N}(\inf_{m\geqslant n} f_m) = \lim_{n\to\infty}(\inf_{m\geqslant n} f_m), \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

причем пределы берутся в *пространстве* $\overline{\mathbf{R}}^E$. Для того чтобы последовательность (f_n) имела *предел* в $\overline{\mathbf{R}}^E$, необходимо и достаточно, чтобы $\limsup\limits_{n\to\infty} f_n = \liminf\limits_{n\to\infty} f_n$ (следствие 1 теоремы 3 этого параграфа и следствие 1 предложения 10 § 7 главы I).

7. *Алгебраические операции над числовыми функциями*

Пусть f и g — числовые функции, определенные на некотором множестве E; если сумма $f(x)+g(x)$ (соотв. произведение $f(x)\,g(x)$) имеет смысл при любом $x \in E$, то через $f+g$ (соотв. fg) обозначают числовую функцию $x \mapsto f(x)+g(x)$ (соотв. $x \mapsto f(x)\,g(x)$). Точно так же, если $\frac{1}{f(x)}$ имеет смысл при любом $x \in E$, то через $\frac{1}{f}$ обозначают функцию $x \mapsto \frac{1}{f(x)}$.

Таким образом, эта последняя функция определена, когда f не принимает значения 0. Если функция f принимает значения из интервала $[0, +\infty]$ (соотв. из $[-\infty, 0]$), то можно условиться считать, что $\frac{1}{f(x)}$ определено всюду, полагая $\frac{1}{0} = +\infty$ (соотв. $\frac{1}{0} = -\infty$); функция $\frac{1}{f}$ будет определена и в этом случае.

Предположим, что множество E — фильтрующееся по фильтру $\mathfrak{F}$ и существуют пределы $\lim_{\mathfrak{F}} f$ и $\lim_{\mathfrak{F}} g$; если, во-первых, функция $f+g$ (соотв. fg, $\frac{1}{f}$) определена и, во-вторых, выражение $\lim_{\mathfrak{F}} f + \lim_{\mathfrak{F}} g$ (соотв. $\lim_{\mathfrak{F}} f \cdot \lim_{\mathfrak{F}} g$, $\frac{1}{\lim_{\mathfrak{F}} f}$) имеет смысл, то $\lim_{\mathfrak{F}}(f+g)$ (соотв. $\lim_{\mathfrak{F}}(fg)$, $\lim_{\mathfrak{F}} \frac{1}{f}$) существует и равен этому выражению в силу непрерывности функции $x+y$ (соотв. xy, $\frac{1}{x}$) в тех точках, где она определена.

Предложение 12. *Пусть f и g — числовые функции, определенные на множестве E, и A — его непустое подмножество.*

1° *Имеем*

$$\sup_{x\in A}(f(x)+g(x)) \leqslant \sup_{x\in A} f(x)+\sup_{x\in A} g(x), \tag{17}$$

$$\sup_{x\in A} f(x)+\inf_{x\in A} g(x) \leqslant \sup_{x\in A}(f(x)+g(x)), \tag{18}$$

если обе части этих неравенств определены.

2° *Если $f(x)$ и $g(x)\geqslant 0$ при любом $x\in A$, то*

$$\sup_{x\in A}(f(x)g(x)) \leqslant \sup_{x\in A} f(x)\sup_{x\in A} g(x), \tag{19}$$

$$\sup_{x\in A} f(x)\inf_{x\in A} g(x) \leqslant \sup_{x\in A}(f(x)g(x)), \tag{20}$$

если обе части этих неравестсв определены.

3° *Если $f(x)\geqslant 0$ при любом $x\in A$, то*

$$\sup_{x\in A}\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{\inf\limits_{x\in A} f(x)} \tag{21}$$

(где по условию $\frac{1}{0}=+\infty$).

В самом деле, пусть H — произвольное *конечное* подмножество множества A; если x_0 — точка из H, в которой $f+g$ принимает свое максимальное значение, то

$$f(x_0)+g(x_0) \leqslant \sup_{x\in H} f(x)+\sup_{x\in H} g(x);$$

с другой стороны, если x_1 — точка из H, в которой f принимает свое наибольшее значение, то

$$f(x_1)+g(x_1) \geqslant \sup_{x\in H} f(x)+\inf_{x\in H} g(x);$$

поэтому

$$\sup_{x\in H} f(x)+\inf_{x\in H} g(x) \leqslant \sup_{x\in H}(f(x)+g(x)) \leqslant \sup_{x\in H} f(x)+\sup_{x\in H} g(x).$$

Применяя предложение 5 и теорему 1, получаем отсюда неравенства (17) и (18). Аналогично доказываются остальные неравенства.

Следствие 1. *Пусть f — числовая функция, определенная на E, k — вещественное число. Тогда*

$$\sup_{x\in A}(f(x)+k)=k+\sup_{x\in A} f(x) \tag{22}$$

в предположении, что обе части равенства определены; далее, если $k \geqslant 0$, то

$$\sup_{x \in A} (kf(x)) = k \sup_{x \in A} f(x) \tag{23}$$

в предположении, что обе части равенства определены.

Следствие 2. *Пусть f_1 и f_2 — числовые функции, определенные соответственно на множествах E_1 и E_2; каковы бы ни были непустые подмножества $A_1 \subset E_1$, $A_2 \subset E_2$, имеем*

$$\sup_{(x_1, x_2) \in A_1 \times A_2} (f_1(x_1) + f_2(x_2)) = \sup_{x_1 \in A_1} f_1(x_1) + \sup_{x_2 \in A_2} f_2(x_2) \tag{24}$$

в предположении, что обе части равенства определены; если f_1 и $f_2 \geqslant 0$ соответственно на A_1 и A_2, то

$$\sup_{(x_1, x_2) \in A_1 \times A_2} (f_1(x_1) f_2(x_2)) = \sup_{x_1 \in A_1} f_1(x_1) \cdot \sup_{x_2 \in A_2} f_2(x_2) \tag{25}$$

в предположении, что обе части равенства определены.

Это вытекает непосредственно из предыдущего следствия и предложения 9.

В частности, если A и B — два подмножества множества $\overline{\mathbf{R}}$ такие, что множество $A + B$ всех сумм $x + y$ $(x \in A, y \in B)$ определено, то

$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B, \tag{26}$$

если правая часть имеет смысл. Точно так же, если A и B — подмножества интервала $[0, +\infty]$, то

$$\sup AB = \sup A \cdot \sup B, \tag{27}$$

если обе части имеют смысл.

Предложение 13. *Пусть f и g — числовые функции, определенные на фильтрующемся множестве E.*

1° *Имеем*

$$\limsup (f + g) \leqslant \limsup f + \limsup g, \tag{28}$$

$$\limsup f + \liminf g \leqslant \limsup (f + g), \tag{29}$$

если обе части этих неравенств определены.

2° *Если f и $g \geqslant 0$ на E, то*

$$\limsup (fg) \leqslant (\limsup f)(\limsup g), \tag{30}$$

$$(\limsup f)(\liminf g) \leqslant \limsup (fg), \tag{31}$$

если обе части этих неравенств определены.

3° *Если $f \geqslant 0$ на E, то*

$$\limsup \frac{1}{f} = \frac{1}{\liminf f} \tag{32}$$

(где по условию $\frac{1}{0} = +\infty$).

Это — следствия предложения 12 и соотношений (10).

Следствие 1. *Пусть f и g — числовые функции, определенные на фильтрующемся множестве E. Если $\lim g$ существует, то*

$$\limsup (f + g) = \limsup f + \lim g \tag{33}$$

в предположении, что обе части равенства определены; если, кроме того, f и $g \geqslant 0$, то

$$\limsup (fg) = (\limsup f)(\lim g) \tag{34}$$

в предположении, что обе части равенства определены.

Следствие 2. *Пусть f и g — числовые функции, определенные на фильтрующемся множестве E. Если $\lim f = +\infty$, $\liminf g > -\infty$ и сумма $f + g$ определена, то $\lim (f + g) = +\infty$. Если $\lim f = +\infty$, $\liminf g > 0$ и произведение fg определено, то $\lim (fg) = +\infty$.*

Упражнения

1) Пусть E_1, E_2 — упорядоченные множества, фильтрующиеся вправо, и f — числовая функция, определенная на $E_1 \times E_2$, такая, что отображение $x_2 \mapsto f(x_1, x_2)$ возрастающее на E_2 при любом $x_1 \in E_1$ и отображение $x_1 \mapsto f(x_1, x_2)$ возрастающее на E_1 при любом $x_2 \in E_2$. Показать, что f имеет в $\overline{\mathbf{R}}$ предел по произведению фильтров сечений в E_1 и E_2, равный ее верхней грани.

2) а) Пусть f — числовая функция, определенная на множестве E, A — его непустое подмножество и φ — возрастающая числовая функция, определенная на $\overline{f(A)}$. Если φ непрерывна в точке $a = \sup\limits_{x \in A} f(x)$, то $\sup\limits_{x \in A} \varphi(f(x)) = \varphi(\sup\limits_{x \in A} f(x))$.

б) Пусть f — числовая функция, определенная на множестве E, фильтрующемся по фильтру $\mathfrak{F}$, и φ — числовая функция, определенная на открытой окрестности V множества всех предельных точек функции f по $\mathfrak{F}$. Показать, что если φ возрастает и непрерывна на V, то

$$\limsup_{\mathfrak{F}} (\varphi \circ f) = \varphi (\limsup_{\mathfrak{F}} f).$$

3) Пусть f — числовая функция, определенная на бесконечном множестве E, и $\mathfrak{G}$ — фильтр дополнений конечных подмножеств из E. Показать, что $\limsup_{\mathfrak{G}} f$ есть верхняя грань множества тех вещественных чисел x, для которых множество $\overset{-1}{f}([x, +\infty])$ бесконечно.

4) Пусть f и g — числовые функции, определенные на множестве E, фильтрующемся по фильтру $\mathfrak{F}$. Показать, что

$$\limsup_{\mathfrak{F}} (\sup (f, g)) = \sup (\limsup_{\mathfrak{F}} f, \limsup_{\mathfrak{F}} g).$$

Дать пример множества E, фильтрующегося по фильтру $\mathfrak{F}$, и бесконечного семейства (f_ι) числовых функций, определенных на E, для которых

$$\sup_\iota (\limsup_{\mathfrak{F}} f_\iota) < \limsup_{\mathfrak{F}} (\sup_\iota f_\iota).$$

5) Пусть f и g — числовые функции, определенные на фильтрующемся множестве. Показать, что если $\lim g$ существует и $\geqslant 0$, то

$$\limsup fg = (\limsup f) (\lim g)$$

в предположении, что обе части равенства определены.

6) Пусть E_1 (соотв. E_2) — множество, фильтрующееся по фильтру $\mathfrak{F}_1$ (соотв. $\mathfrak{F}_2$), и f — числовая функция, определенная на произведении $E_1 \times E_2$. Показать на примере, что числа $\limsup_{\mathfrak{F}_1 \times \mathfrak{F}_2} f(x_1, x_2)$, $\limsup_{\mathfrak{F}_1} (\limsup_{\mathfrak{F}_2} f(x_1, x_2))$, $\limsup_{\mathfrak{F}_2} (\limsup_{\mathfrak{F}_1} f(x_1, x_2))$, вообще говоря, различны.

*7) Пусть f — числовая функция, определенная на замкнутом множестве $A \subset \overline{\mathbf{R}}$. Обозначим через $\limsup\limits_{x \to a,\, x \geqslant a} f(x)$ (соотв. $\limsup\limits_{x \to a,\, x \leqslant a} f(x)$) верхний предел функции $f(x)$, когда x стремится к точке $a \in A$, оставаясь в $A \cap [a, +\infty]$ (соотв. в $A \cap [-\infty, a]$). Показать, что множество тех точек $a \in A$, для которых $\limsup\limits_{x \to a,\, x \geqslant a} f(x) \neq \limsup\limits_{x \to a,\, x \leqslant a} f(x)$, не более чем счетно. [Используя упражнение 1 § 2, показать, что для любой пары рациональных чисел p, q, где $p < q$, множество $G_{p, q}$ точек $a \in A$ таких, что

$$\limsup_{x \to a,\, x \geqslant a} f(x) \leqslant p < q \leqslant \limsup_{x \to a,\, x \leqslant a} f(x),$$

не более чем счетно.]

8) Вывести из упражнения 7, что числовая функция f, определенная на замкнутом множестве $A \subset \overline{\mathbf{R}}$ и *монотонная* на нем, непрерывна во всех его точках, кроме не более чем счетного их множества.

*9) Пусть E — топологическое пространство со счетным базисом и f — числовая функция определенная на E. Показать, что множество тех точек $a \in E$, для которых $\lim\limits_{x\to a,\, x\neq a} f(x)$ существует и отличен от $f(a)$, не более чем счетно. [Тот же метод, что и в упражнении 7.]

*10) Пусть E — топологическое пространство, обладающее счетным базисом (U_n), и f — числовая функция, определенная на E; говорят, что f имеет в точке $a \in E$ *строгий относительный максимум*, если существует такая окрестность V этой точки, что $f(x) < f(a)$ для любого $x \in V \cap A$, отличного от a. Показать, что множество M точек из E, в которых f имеет строгий относительный максимум, не более чем счетно. [Рассмотреть множество таких U_n, что f имеет в некоторой точке из U_n строгий относительный максимум, равный ее верхней грани в U_n; показать, что существует отображение этого множества *на* M.]

11) Пусть (u_n) — такая последовательность вещественных чисел >0, что $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$. Показать, что существует бесконечное множество таких индексов n, что $u_n \geqslant u_m$ для всех $m \geqslant n$.

12) Пусть (u_n) — такая последовательность вещественных чисел >0, что $\liminf\limits_{n\to\infty} u_n = 0$. Показать, что существует бесконечное множество таких индексов n, что $u_n \leqslant u_m$ для всех $m \leqslant n$.

13) Пусть (u_n) — последовательность конечных вещественных чисел и (ε_n) — такая последовательность чисел $\geqslant 0$, что $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$ и $u_{n+1} \geqslant u_n - \varepsilon_n$ для любого целого $n \geqslant 0$. Положим $a = \liminf\limits_{n\to\infty} u_n$, $b = \limsup\limits_{n\to\infty} u_n$; показать, что множество предельных точек последовательности (u_n) есть интервал $[a, b]$.

14) Пусть (r_n) — возрастающая последовательность конечных чисел >0 такая, что $\lim r_n = +\infty$; для каждого конечного вещественного числа $r > 0$ обозначим через $N(r)$ наибольший индекс n такой, что $r_n \leqslant r$. Показать, что

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{N(r)}{r} = \limsup_{n\to\infty} \frac{n}{r_n}, \qquad \liminf_{r\to\infty} \frac{N(r)}{r} = \liminf_{n\to\infty} \frac{n}{r_n}.$$

*15) Пусть (x_n) — последовательность конечных вещественных чисел и (p_n) — такая последовательность конечных чисел $\geqslant 0$, что $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sum\limits_{i=0}^{n} p_i\right) = +\infty$. Положим $y_n = \left(\sum\limits_{i=0}^{n} p_i x_i\right) \Big/ \left(\sum\limits_{i=0}^{n} p_i\right)$ для всех таких n, что $\sum\limits_{i=0}^{n} p_i \neq 0$. Показать, что

$$\liminf_{n\to\infty} x_n \leqslant \liminf_{n\to\infty} y_n \leqslant \limsup_{n\to\infty} y_n \leqslant \limsup_{n\to\infty} x_n.$$

Пусть H — произвольное непустое подмножество множества предельных точек последовательности (x_n) в $\overline{\mathbf{R}}$; показать, что можно определить последовательность (p_n) чисел $\geqslant 0$, для которой $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{i=0}^{n} p_i\right) = +\infty$, так, чтобы множество предельных точек соответствующей последовательности (y_n) содержало H. [Свести к случаю, когда H не более чем счетно, и затем определить последовательность (p_n) по индукции, беря ее члены равными 0 или 1.]

Вывести отсюда, что для того, чтобы последовательность (x_n) сходилась в $\overline{\mathbf{R}}$, необходимо и достаточно, чтобы последовательность y_n сходилась в $\overline{\mathbf{R}}$ для *каждой* последовательности (p_n) чисел $\geqslant 0$ такой, что $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{i=0}^{n} p_i\right) = +\infty$.

16) Пусть x_0, y_0 — вещественные числа такие, что $0 < y_0 \leqslant x_0$; определим для $n > 0$ индукцией последовательности (x_n) и (y_n), связанные соотношениями $x_{n+1} = (x_n + y_n)/2$, $y_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}$. Показать, что они стремятся к одному и тому же пределу α («среднему арифметико-геометрическому» чисел x_0 и y_0); кроме того, существуют такие числа $a > 0$ и $\gamma \in]0, 1[$, что $x_n - y_n \leqslant a\gamma^{2^n}$ для всех n. [Учесть, что $x_{n+1} - y_{n+1} = \dfrac{(x_n - y_n)^2}{4(x_{n+1} + y_{n+1})}$.]

17) Пусть g — такое отображение $]0, 1]$ в $[-1, 1]$, что $\lim\limits_{x\to 0,\ x>0} g(x) = 0$. Показать, что существуют возрастающее непрерывное отображение g_2 и убывающее непрерывное отображение g_1 интервала $[0, 1]$ в $[-1, 1]$ такие, что $g_1(0) = g_2(0) = 0$ и $g_1(x) \leqslant g(x) \leqslant g_2(x)$, когда $0 < x \leqslant 1$. [Для каждого целого $n > 0$ рассмотреть нижнюю грань x_n тех x, для которых $g(x) \geqslant \dfrac{1}{n}$.]

18) Распространить определения и результаты n°n° 1—6 на функции, принимающие значения в совершенно упорядоченном множестве E, компактном в топологии $\mathscr{T}_0(E)$. [См. § 2, упражнение 6.]

§ 6. Непрерывные и полунепрерывные числовые функции

1. *Непрерывные числовые функции*

Помимо общих свойств непрерывных функций со значениями в произвольном топологическом пространстве (гл. I, § 2), непрерывные числовые функции обладают следующими двумя фундаментальными свойствами:

Теорема 1 (Вейерштрасс). *Пусть f — числовая функция, определенная и непрерывная на непустом квазикомпактном пространстве E. Существует по крайней мере одна точка $a \in E$ такая, что $f(a) = \sup_{x \in E} f(x)$, и по крайней мере одна точка $b \in E$ такая, что $f(b) = \inf_{x \in E} f(x)$.*

В самом деле, $f(E)$ компактно (гл. I, § 9, теорема 2) и потому замкнуто в $\overline{\mathbf{R}}$; следовательно, $f(E)$ содержит обе свои грани.

Эту теорему часто выражают, говоря, что *непрерывная числовая функция на непустом квазикомпактном пространстве достигает своих граней.*

Следствие. *Если числовая функция f, определенная на непустом квазикомпактном пространстве E, конечна и непрерывна на E, то она ограниченна на E.*

Теорема 2 (Больцано). *Пусть числовая функция f определена и непрерывна на связном пространстве E. Если a и b — любые две точки из E, а α — вещественное число, принадлежащее замкнутому интервалу с концами $f(a)$ и $f(b)$, то существует по крайней мере одна точка $x \in E$ такая, что $f(x) = \alpha$.*

В самом деле, $f(E)$, будучи связным (гл. I, § 11, предложение 4), является интервалом в $\overline{\mathbf{R}}$ (§ 4, предложение 5) и потому содержит замкнутый интервал с концами $f(a)$ и $f(b)$.

Это свойство часто выражают так: *непрерывная числовая функция на связном пространстве не может переходить от одного значения к другому, не проходя через все промежуточные значения.*

Однако это свойство ни в коей мере не характеристично для непрерывных функций; можно указать примеры функций, которые определены на связном пространстве и обладают указанным свойством, но *разрывны в каждой точке* (упражнение 2).

2. *Полунепрерывные функции*

Пусть f — числовая функция, определенная на топологическом пространстве E; для того чтобы f была непрерывной в точке $a \in E$, необходимо и достаточно, чтобы: 1° для любого вещественного числа $h < f(a)$ существовала окрестность V точки a такая,

что $h < f(x)$, каково бы ни было $x \in V$; 2° для любого вещественного числа $k > f(a)$ существовала окрестность W точки a такая, что $k > f(x)$, каково бы ни было $x \in W$.

В анализе важную роль играют функции, для которых выполнено *только одно* из указанных двух условий. Введем следующее определение:

Определение 1. *Числовая функция f, определенная на топологическом пространстве E, называется полунепрерывной снизу* (соотв. *сверху*) *в точке $a \in E$, если для любого $h < f(a)$* (соотв. $k > f(a)$) *существует окрестность V точки a такая, что $h < f(x)$* (соотв. $k > f(x)$), *каково бы ни было $x \in V$.*

Числовая функция называется полунепрерывной снизу (соотв. *сверху*) *на E, если она полунепрерывна снизу* (соотв. *сверху*) *в каждой точке из E.*

Для того чтобы числовая функция была *непрерывна* в точке a, необходимо и достаточно, чтобы она была в этой точке *одновременно полунепрерывна снизу и сверху.*

Если f полунепрерывна снизу в некоторой точке, то $-f$ полунепрерывна сверху в этой точке, и обратно; поэтому в дальнейшем мы ограничимся рассмотрением свойств функций, полунепрерывных *снизу.*

Ясно, что если функция полунепрерывна снизу на пространстве, то она полунепрерывна снизу на всяком *подпространстве.*

Примеры. 1) Если функция f имеет в точке a *относительный минимум*, т. е. существует окрестность V точки a такая, что $f(a) \leqslant f(x)$ для каждого $x \in V$, то f полунепрерывна снизу в точке a. В частности, если $f(a) = -\infty$, то f полунепрерывна снизу в точке a.

2) Определим числовую функцию f на $\mathbf{R}$, положив $f(x) = 0$, если x иррационально, и $f(x) = \frac{1}{q}$, если x рационально и равно несократимой дроби $\frac{p}{q}$ $(q > 0)$. Для любого целого $n > 0$ множество тех рациональных чисел $\frac{p}{q}$, для которых $q < n$, замкнуто и все его точки — изолированные; таким образом, любое иррациональное x обладает окрестностью V такой, что $f(y) \leqslant \frac{1}{n}$ для всех $y \in V$, а это показывает, что f в точке x непрерывна; с другой стороны, так как f в каждой рациональной точке имеет *относительный максимум*, то f полунепрерывна сверху на $\mathbf{R}$.

Условие полунепрерывности снизу функции f в точке a можно еще выразить, сказав, что для любого $h < f(a)$ множество $\overset{-1}{f}(]h, +\infty])$ есть *окрестность* точки a.

Впрочем, достаточно предполагать это условие выполненным только для *возрастающей последовательности* (h_n) вещественных чисел $< f(a)$, стремящейся к $f(a)$.

Наделим $\overline{\mathbf{R}}$ топологией, открытыми множествами которой служат $\varnothing$ и все *неограниченные справа открытые интервалы из* $\overline{\mathbf{R}}$ (т. е. интервалы $]a, +\infty]$ с конечными a и интервал $[-\infty, +\infty]$). Для того чтобы числовая функция f была полунепрерывна снизу в точке a, необходимо и достаточно, чтобы она была *непрерывна* в этой точке, если рассматривать ее как отображение в множество $\overline{\mathbf{R}}$, наделенное указанной топологией.

Предложение 1. *Для того чтобы числовая функция f на топологическом пространстве E была полунепрерывна снизу, необходимо и достаточно, чтобы для любого конечного числа k множество* $\overset{-1}{f}(]k, +\infty])$ (тех $x \in E$, для которых $f(x) > k$) *было открыто в E* (или, что то же, *чтобы* $\overset{-1}{f}([-\infty, k])$ *было замкнутым множеством в E*).

В самом деле, это условие выражает, что $\overset{-1}{f}(]k, +\infty])$ есть окрестность каждой своей точки.

Для того чтобы f была полунепрерывной снизу на E, достаточно, чтобы $\overset{-1}{f}(]k, +\infty])$ было открытым множеством в E для всех вещественных чисел k, принадлежащих *всюду плотному* множеству в $\mathbf{R}$.

Следствие. *Для того чтобы подмножество A топологического пространства E было открытым* (соотв. *замкнутым*) *в E, необходимо и достаточно, чтобы его характеристическая функция* *) φ_A *была полунепрерывна снизу* (соотв. *сверху*) *на E.*

В самом деле, $\overset{-1}{\varphi_A}(]k, +\infty])$ равно $\varnothing$ при $k \geqslant 1$, равно A, когда $0 \leqslant k < 1$, и равно E при $k < 0$.

Теорема 3. *Пусть f — полунепрерывная снизу функция на непустом квазикомпактном пространстве E. Существует по*

*) Напомним (Теор. мн., гл. III, § 5, n° 5), что *характеристическая функция* φ_A подмножества A множества E — это определенная на E функция такая, что $\varphi_A(x) = 1$, если $x \in A$, и $\varphi_A(x) = 0$, если $x \in \complement A$.

крайней мере одна точка $a \in E$ такая, что $f(a) = \inf\limits_{x \in E} f(x)$ (иначе говоря, *f достигает своей нижней грани на E*).

В самом деле, рассмотрим для каждого $k \in f(E)$ множество $A_k = \overset{-1}{f}([-\infty, k])$; эти множества не пусты и образуют *базис фильтра* в E; согласно предложению 1 они *замкнуты* и потому имеют по крайней мере одну общую точку a (аксиома (C″) квазикомпактных пространств). Тем самым $f(a) \leqslant f(x)$ для всех $x \in E$, что и доказывает теорему.

Следствие. *Пусть f — полунепрерывная снизу функция на непустом квазикомпактном пространстве E; если $f(x) > -\infty$ для всех $x \in E$, то f ограниченна снизу на E.*

Отметим, что эта теорема и соответствующая теорема для полунепрерывных сверху функций вновь дают как частный случай теорему Вейерштрасса (теорема 1).

Предложение 2. *Пусть f и g — числовые функции, полунепрерывные снизу в точке $a \in E$. Функции $\inf(f, g)$ и $\sup(f, g)$ полунепрерывны снизу в точке a. То же верно и для $f + g$, если эта функция определена, а также для fg, если f и $g \geqslant 0$ и их произведение fg определено.*

Проведем, например, доказательство для $f + g$; для других случаев рассуждения аналогичны. Предложение очевидно, если $f(a)$ или $g(a)$ равно $-\infty$; в противном случае будем иметь $f(a) + g(a) > -\infty$. Всякое конечное число $h < f(a) + g(a)$ может быть записано в виде $h = r + s$, где $r < f(a)$ и $s < g(a)$ конечны (достаточно взять s так, чтобы $h - f(a) < s < g(a)$); по предположению существуют окрестность V точки a такая, что $r < f(x)$ для всех $x \in V$, и окрестность W такая, что $s < g(x)$ для всех $x \in W$; но тогда $h = r + s < f(x) + g(x)$ для всех точек x окрестности $V \cap W$.

Нетрудно видеть также, что если f полунепрерывна снизу в точке a и $f \geqslant 0$, то $\frac{1}{f}$ полунепрерывна сверху в точке a.

Теорема 4. *Верхняя огибающая семейства (f_ι) функций, полунепрерывных снизу в точке $a \in E$, полунепрерывна снизу в этой точке.*

В самом деле, пусть g — эта верхняя огибающая; каково бы ни было $h < g(a)$, существует индекс ι такой, что $h < f_\iota(a) \leqslant g(a)$, и, далее, окрестность V точки a такая, что $h < f_\iota(x)$ для всех $x \in V$; тогда тем более $h < g(x)$ для всех $x \in V$.

По предложению 2 *нижняя* огибающая *конечного* числа полунепрерывных снизу функций тоже полунепрерывна снизу; но последнее, вообще говоря, уже не имеет места для нижней огибающей *бесконечного* семейства полунепрерывных снизу функций. Пусть, например, f_r для любого рационального числа r — функция, равная нулю в точке r и единице для любого вещественного $x \neq r$; нижняя огибающая g функций f_r будет равна 0 для каждого рационального значения аргумента и 1 для каждого иррационального («функция Дирихле»); она не будет, таким образом, полунепрерывной снизу в иррациональных точках.

Следствие. *Верхняя огибающая семейства непрерывных числовых функций на пространстве E полунепрерывна снизу на E.*

В главе IX, § 1, предложение 5, мы покажем, что *обращение* этого предложения справедливо, если E *равномеризуемо* (и только в этом случае): всякая функция, полунепрерывная снизу на равномеризуемом пространстве, является верхней огибающей семейства непрерывных функций.

Предложение 3. *Для того чтобы числовая функция f, определенная на топологическом пространстве E, была полунепрерывна снизу в точке $a \in E$, необходимо и достаточно, чтобы* $\liminf\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ (или, что сводится к тому же, чтобы $\liminf\limits_{x \to a} f(x) \geqslant f(a)$).

Условие *необходимо*. В самом деле, каково бы ни было $h < f(a)$, существует окрестность V точки a такая, что $h < f(x)$ для всех $x \in V$, так что $h \leqslant \inf\limits_{x \in V} f(x) \leqslant \liminf\limits_{x \to a} f(x)$ (§ 5, формулы (12)) и, следовательно, $f(a) \leqslant \liminf\limits_{x \to a} f(x)$.

Условие *достаточно*. В самом деле, если оно выполнено, то для любого $h < f(a)$ существует окрестность V точки a такая, что $h \leqslant \inf\limits_{x \in V} f(x)$, и тем самым f полунепрерывна снизу в точке a.

Предложение 4. *Пусть f — произвольная числовая функция, определенная на всюду плотном подмножестве A топологического пространства E; если для каждого $x \in E$ положить $g(x) = \liminf\limits_{y \to x,\ y \in A} f(y)$, то g будет полунепрерывна снизу на E.*

В самом деле, каково бы ни было $h < g(x)$, существует *открытая* окрестность V точки x такая, что $h < f(z)$ для всех $z \in V \cap A$; но V есть окрестность каждой своей точки y; поэтому $\lim\limits_{z \to y} \inf\limits_{z \in A} f(z) = g(y) \geqslant h$ для любого $y \in V$, чем предложение и доказано.

g называется *полунепрерывной снизу регуляризацией* функции f. Аналогично определяется и *полунепрерывная сверху регуляризация* функции f.

Функцию g можно еще определить как *наибольшую* из функций φ, полунепрерывных снизу на E и таких, что $\varphi(x) \leqslant f(x)$ для всех $x \in A$. Если f *полунепрерывна снизу* на A, то в силу предложения 3 g служит *продолжением* f на E.

Упражнения

1) Пусть f — непрерывное отображение открытого интервала $I \subset \mathbf{R}$ в $\mathbf{R}$; показать, что если $f(I)$ открыто и множество $\overset{-1}{f}(y)$ для любого $y \in \mathbf{R}$ имеет не более двух различных точек, то f монотонно.

*2) Пусть B — базис в $\mathbf{R}$, рассматриваемом как векторное пространство над полем $\mathbf{Q}$ («базис Хамеля»); B несчетно (§ 2, упражнение 2). Пусть φ — биекция подмножества $C \neq B$ множества B на B. Определим отображение f пространства $\mathbf{R}$ в себя, положив $f(x) = \sum\limits_{\xi \in C} \lambda(\xi)\varphi(\xi)$ для каждого $x = \sum\limits_{\xi \in B} \lambda(\xi)\xi$ (где $\lambda(\xi) \in \mathbf{Q}$ и $\lambda(\xi) = 0$ для всех, кроме конечного числа, элементов $\xi \in B$). Показать, что $f(x + y) = f(x) + f(y)$, но $\overset{-1}{f}(z)$ всюду плотно в $\mathbf{R}$ для каждого $z \in \mathbf{R}$, откуда следует, что f не ограниченна ни сверху, ни снизу ни в каком интервале из $\mathbf{R}$.

*3) а) Для каждого интервала $I \subset \mathbf{R}$ обозначим через $G(I)$ группу гомеоморфизмов I на себя. Показать, что $G(I)$ и $G(J)$ изоморфны для любых неодноточечных интервалов I и J из $\mathbf{R}$. В $G(I)$ множество $F(I)$ всех возрастающих гомеоморфизмов есть нормальный делитель с индексом 2.

б) Пусть $G = G(\mathbf{R})$ и $F = F(\mathbf{R})$. Для каждого $f \in G$ и каждого $x \in \mathbf{R}$ положим $\sigma(x; f) = \operatorname{sgn}(f(x) - x)$. Пусть T^+ (соотв. T^-) — множество тех $f \in F$, для которых $\sigma(x; f)$ постоянно и равно 1 (соотв. -1). Показать, что всякий элемент из T^+ (соотв. T^-) сопряжен в F с переносом $x \mapsto x + 1$ (соотв. $x \mapsto x - 1$). [Рассмотреть для $f \in T^+$ последовательность $f^n(0)$ $(n \in \mathbf{Z})$.]

в) Пусть $T = T^+ \cup T^-$. Показать, что всякий элемент $f \in F$, не принадлежащий T, есть произведение в F двух элементов из T. [$f = f_1 f_2$ в F, где $f_1(x) = \sup(x, f(x))$ и $f_2(x) = \inf(x, f(x))$; если g есть перенос $x \mapsto x + 1$, то $f_1 g$ и $g^{-1} f_2$ принадлежат T.]

г) Для того чтобы элементы f и g были сопряженными в F, необходимо и достаточно, чтобы существовало $s \in F$ такое, что $\sigma(x; f) = \sigma(s(x); g)$ для всех $x \in \mathbf{R}$. [Рассмотреть связные компоненты I_n открытого множества тех x, для которых $\sigma(x; f) \neq 0$; заметить, что в силу а) $F(I_n)$ и F изоморфны, и использовать б).] В частности, если $[a, b]$ — такой интервал в $\mathbf{R}$, что $\sigma(a; f) = \sigma(b; f) = 0$ для некоторого $f \in F$, то элемент $f' \in F$, равный f для $x \leqslant a$ или $x \geqslant b$ и такой, что $f'(x) = x + \varepsilon(f(x) - x)$, когда $a < x < b$, где $0 < \varepsilon < 1$, сопряжен с f в F.

д) Пусть $f \in F$, a, b, c, d — такие вещественные числа, что $a < c < b < d$, $f(x) - x = 0$ при $x = a$, $x = b$, $x = c$, $x = d$ и $\sigma(x; f) = 1$, когда $a < x < c$ и когда $b < x < d$; положим $J = [a, b]$ и $J' = [a', b']$, где $a \leqslant a' < c$, $b < b' \leqslant d$, и обозначим через f_1 сужение f на J, являющееся элементом из $F(J)$. Показать, что существует возрастающий гомеоморфизм s интервала J на J' такой, что элемент $f_2 = sf_1s^{-1}$ из $F(J')$ обладает тем свойством, что $f_2(x) > f^{-1}(x)$, когда $a' < x < b'$. [Использовать г).]

е) Пусть $f \in F$, $[a, b]$ — интервал в $\mathbf{R}$ такой, что $f(x) - x = 0$ при $x = a$ и $x = b$, $\sigma(x; f) = -1$ для $x < a$ и $\sigma(x; f) = +1$ для $x > b$. Показать, что существует элемент $g \in F$, сопряженный с f в F и такой, что $g(x) > f(x)$ для всех $x \in \mathbf{R}$. [Тот же метод.]

ж) Обозначим через H^+ (соотв. H^-) нормальный делитель группы F, состоящий из тех $f \in F$, для которых $f(x) = x$ в какой-либо окрестности точки $+\infty$ (соотв. $-\infty$). Показать, что H^+, H^- и $H = H^+ \cap H^-$ — единственные нормальные делители группы F, отличные от F и $\{e\}$. [Показать, что если N — нормальный делитель группы F, отличный от F, и $f \in N$ не принадлежит H^+, то в N существует такой элемент g, что множество тех $x \in \mathbf{R}$, для которых $\sigma(x; g) = +1$, есть интервал $]a, +\infty]$ и $g(x) = x$ для $x \leqslant a$. Использовать для этого построения из д) и е), а также б) и в). Чтобы доказать, что H не содержит ни одного нормального делителя группы F, отличного от H и $\{e\}$, рассмотреть элемент $f \in H$, отличный от e; пусть a и b — (конечные по предположению) верхняя и нижняя грани множества тех $x \in \mathbf{R}$, для которых $\sigma(x; f) \neq 0$. Заметить тогда, что $F([a, b])$ изоморфно F, и воспользоваться предыдущим результатом.]

з) Показать, что группа H простая. [Тот же метод, что и при доказательстве того, что H не содержит нетривиальных нормальных делителей группы F.]

4) Пусть f — полунепрерывная снизу функция на топологическом пространстве E и φ — возрастающая полунепрерывная снизу функция на $f(E) \subset \overline{\mathbf{R}}$; показать, что $\varphi \circ f$ полунепрерывна снизу на E.

5) Пусть f — полунепрерывная снизу функция на топологическом пространстве E. Показать, что $\sup f(\overline{A}) = \sup f(A)$ для каждого непустого множества $A \subset E$.

*6) Пусть f — числовая функция, определенная на топологическом пространстве E. *Колебанием* f в точке $a \in E$ называется конечное или бесконечное число

$$\omega(a;\ f) = \limsup_{x \to a} f(x) - \liminf_{x \to a} f(x),$$

когда правая часть имеет смысл.

а) Показать, что $x \longmapsto \omega(x;\ f)$ полунепрерывно сверху на подпространстве $A \subset E$, состоящем из тех точек, где это отображение определено.

б) Если f *конечна* на E, то $A = E$ и для любой точки $a \in E$

$$\omega(a;\ f) = \limsup_{(x,\ y) \to (a,\ a)} (f(x) - f(y)).$$

в) Пусть f — полунепрерывная снизу конечная числовая функция на E. Показать, что если $\omega(a;\ f)$ имеет *конечное* значение в точке $a \in E$, то $\liminf_{x \to a} \omega(x;\ f) = 0$. [Рассуждая от противного, показать, что иначе существовали бы точки x, как угодно близкие к a, в которых $f(x)$ было бы сколь угодно велико.]

г) Для каждого рационального числа r, записанного в виде несократимой дроби $r = \frac{p}{q}$, где $q > 0$, положим $f(r) = q$; показать, что f полунепрерывна снизу на $\mathbf{Q}$, но $\omega(r;\ f) = +\infty$ в каждой точке $r \in \mathbf{Q}$.

*7) Пусть f — полунепрерывная снизу функция на локально компактном пространстве E.

а) Показать, что если $\limsup_{x \to a} f(x) = +\infty$ для всех $a \in E$, то множество $\overset{-1}{f}(+\infty)$ всюду плотно в E. [Для каждой точки $a \in E$ и каждой ее окрестности V построить последовательность (U_n) относительно компактных открытых множеств таких, что $\overline{U}_{n+1} \subset U_n$ и $f(x) > n$ для всех $x \in U_n$.]

°б) Пусть $n \longmapsto r_n$ есть биекция $\mathbf{N}$ на множество всех рациональных чисел из $[0, 1]$ и $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{|x|}}$ (с $\varphi(0) = +\infty$). Функция $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \varphi(x - r_n)$ полунепрерывна снизу на $[0, 1]$, множество $\overset{-1}{f}(+\infty)$ плотно на этом интервале вместе со своим дополнением. [Чтобы доказать последнее, заметить, что ряд с общим членом $2^{-n} \int_0^1 \varphi(x - r_n)\, dx$ сходится (Интегрир., гл. IV, § 3, теорема 5).]°

в) Показать, что если функция f конечна, то множество тех точек x, в которых $\omega(x;\ f)$ конечно, всюду плотно. [Использовать а).]

г) Показать, что множество точек непрерывности функции f (конечной или нет) всюду плотно. [Свести к случаю, когда f ограниченна, заменяя f на $\frac{f}{1+|f|}$ (упражнение 4); заметить, что функция $\frac{1}{\omega(x;\ f)}$ полунепрерывна снизу, использовать а) и упражнение 6в.]

8) Пусть E — топологическое пространство и A — замкнутое множество в $E\times\overline{\mathbf{R}}$. Показать, что отображение $x \longmapsto \inf(A(x))$ проекции $\mathrm{pr}_1 A$ в $\overline{\mathbf{R}}$ полунепрерывно снизу. Обратно, если f: $E\to\overline{\mathbf{R}}$ есть полунепрерывная снизу функция, то множество $B\subset E\times\overline{\mathbf{R}}$, состоящее из тех пар (x, y), в которых $y\geqslant f(x)$, замкнуто в $E\times\overline{\mathbf{R}}$.

*9) а) Пусть E и F — отделимые пространства, π — совершенное (гл. I, § 10, n° 1) непрерывное отображение E в F, g — полунепрерывная снизу числовая функция на E и $f(y)$ для каждого $y\in F$ — нижняя грань функции g на множестве $\overset{-1}{\pi}(y)$ (равная $+\infty$, если $\overset{-1}{\pi}(y)=\varnothing$). Показать, что f полунепрерывна снизу на F. [Использовать тот факт, что $\pi(E)$ замкнуто, а множество $\overset{-1}{\pi}(y)$ для каждого $y\in\pi(E)$ компактно, причем всякая его окрестность содержит окрестность, насыщенную по отношению эквивалентности $\pi(x)=\pi(x')$.]

б) Пусть g — непрерывная функция $|x_1x_2-1|$, определенная на $\mathbf{R}\times\,]0, +\infty[$, и $f(x_1)=\inf\limits_{x_2>0} g(x_1, x_2)$ для каждого $x_1\in\mathbf{R}$; показать, что f не полунепрерывна снизу.

10) Распространить определение 1, предложение 1 и теорему 3 на функции, определенные на топологическом пространстве E и принимающие значения в произвольном *совершенно упорядоченном* множестве F. Если f и g — два отображения E в F, полунепрерывные снизу в точке a, то $\inf(f, g)$ и $\sup(f, g)$ также полунепрерывны снизу в точке a. То же справедливо и для $f+g$, если F — совершенно упорядоченная коммутативная группа.

В случае, когда F, наделенное топологией $\mathcal{T}_0(F)$, *компактно* [§ 2, упражнение 6], распространить на функции со значениями в F теорему 4 и предложения 3 и 4.

*11) Наделим $\overline{\mathbf{R}}$ *правой* топологией (гл. I, § 1, упражнение 2); для того чтобы отображение f топологического пространства E в $\overline{\mathbf{R}}$ было непрерывным в смысле этой топологии, необходимо и достаточно, чтобы f имело относительный минимум в *каждой* точке из E. Показать, что если $E=\mathbf{R}$ (с обычной топологией), то множество $f(E)$ тогда *не более чем счетно*. [Рассуждая от противного, предположим, что интервал $[\alpha, \beta]\cap f(E)$ несчетен; для каждого $y\in[\alpha, \beta]$ рассмотрим *открытое* в $\mathbf{R}$ множество $U(y)=\overset{-1}{f}([y, +\infty])$. Пусть (I_n) — конечная или бесконечная последовательность связных компонент множества $U(\beta)$ и $x_n\in I_n$ для каждого n; обозначим через $g_n(y)$

(соотв. $h_n(y)$) при любом $y \in [\alpha, \beta]$ начало (соотв. конец) связной компоненты множества $U(y)$, содержащей x_n; показать, что хотя бы для одного n одна из функций g_n, h_n должна принимать несчетное множество различных значений в $[\alpha, \beta]$, и в заключение воспользоваться упражнением 8 § 5.]

12) Пусть f — непостоянная непрерывная конечная числовая функция на компактном интервале $[a, b] \subset \mathbf{R}$ такая, что $f(a) = f(b) = 0$, и Z — замкнутое множество в $[a, b]$, состоящее из тех x, для которых $f(x) = 0$; обозначим через c наибольшую из длин смежных с Z интервалов в $[a, b]$. Показать, что для каждого $t \in]0, c[$ существует такая точка $x \in [a, b]$, что $x + t \in [a, b]$ и $f(x+t) = f(x)$.

13) Пусть f — не строго монотонная непрерывная конечная числовая функция на компактном интервале $[a, b] \subset \mathbf{R}$. Показать, что существует точка $x_0 \in]a, b[$ такая, что для любого $\varepsilon > 0$ в $[a, b]$ существуют точки y и z, удовлетворяющие условиям $x_0 - \varepsilon < y < x_0 < z < x_0 + \varepsilon$ и $f(y) = f(z)$.

14) Пусть f — непрерывное отображение $\mathbf{R}$ в себя.

а) Показать, что если f равномерно непрерывно на $\mathbf{R}$, то существуют вещественные числа $\alpha \geqslant 0$ и $\beta \geqslant 0$ такие, что $|f(x)| \leqslant \alpha |x| + \beta$ для всех $x \in \mathbf{R}$.

б) Показать, что если f монотонно и ограниченно на $\mathbf{R}$, то f равномерно непрерывно на $\mathbf{R}$.

*15) Пусть E — полупрямая Александрова (§ 2, упражнение 12б) и E' — ее компактификация посредством присоединения бесконечно удаленной точки Ω. Показать, что для любого непрерывного отображения f пространства E в себя либо $\lim\limits_{x \to \Omega,\, x \in E} f(x) = \Omega$, либо существует такое $z \in E$, что f *постоянно* на интервале $[z, \rightarrow[$. [Показать, что если f при стремлении x к Ω обладает предельной точкой $c \in E$, то необходимо $\lim\limits_{x \to \Omega,\, x \in E} f(x) = c$; для доказательства того, что f не может иметь другой предельной точки в E', воспользоваться тем фактом, что всякая возрастающая последовательность в E сходится. Использовать, наконец, упражнение 12б § 2 и то, что в E' пересечение всякого счетного семейства окрестностей точки Ω снова есть окрестность этой точки.]

§ 7. Бесконечные суммы и произведения вещественных чисел

Так как всякая точка в $\mathbf{R}$ обладает *счетной* фундаментальной системой окрестностей (§ 1, следствие предложения 3), то семейство (x_ι) *конечных* вещественных чисел может быть суммируемо в $\mathbf{R}$ только если множество индексов ι, для которых $x_\iota \neq 0$, не более чем *счетно* (гл. III, § 5, следствие предложения 1). Таким

образом, изучение суммируемых семейств в $\mathbf{R}$, по существу, сводится к изучению суммируемых *последовательностей*. Однако иногда приходится рассматривать несчетное семейство (x_ι) конечных вещественных чисел, члены которого являются функциями некоторого параметра t; может случиться, что такое семейство суммируемо при любом t, но (не более чем счетное) множество индексов ι, для которых $x_\iota \neq 0$, зависит от t. Поэтому мы не будем в дальнейшем делать какие-либо предположения относительно мощности множества индексов.

1. *Суммируемые семейства положительных конечных чисел в* $\mathbf{R}$

Теорема 1. *Для того чтобы семейство (x_ι) конечных вещественных чисел $\geqslant 0$ было суммируемым в $\mathbf{R}$, необходимо и достаточно, чтобы множество конечных частичных сумм этого семейства было ограниченно сверху в $\mathbf{R}$. Верхняя грань этого множества является тогда суммой семейства (x_ι).*

В самом деле, пусть $s_H = \sum\limits_{\iota \in H} x_\iota$, где H — любое конечное подмножество множества индексов I; поскольку все $x_\iota \geqslant 0$, $H \subset H'$ влечет $s_H \leqslant s_{H'}$. Другими словами, отображение $H \mapsto s_H$ *возрастающее* на фильтрующемся множестве $\mathfrak{F}(I)$ всех конечных подмножеств множества I; следовательно (§ 5, следствие теоремы 2), для того чтобы оно имело конечный предел, необходимо и достаточно, чтобы оно было *ограниченно сверху*.

Замечание. Пусть (H_λ) — семейство конечных подмножеств множества I, обладающее тем свойством, что для любого конечного подмножества H множества I существует индекс λ такой, что $H \subset H_\lambda$; очевидно, для того чтобы (x_ι) было суммируемо, необходимо и достаточно, чтобы семейство частичных сумм s_{H_λ} было *ограниченно сверху* в $\mathbf{R}$. В частности, пусть (x_n) — последовательность конечных чисел $\geqslant 0$ и $s_n = \sum\limits_{p=0}^{n} x_p$ для любого целого $n \geqslant 0$; для того чтобы последовательность (x_n) была суммируемой в $\mathbf{R}$, необходимо и достаточно, чтобы для *какой-либо* строго возрастающей *последовательности* номеров (n_k) последовательность частичных сумм (s_{n_k}) была *ограниченна сверху* в $\mathbf{R}$.

Примеры. 1) Для каждого числа $q \in [0, 1[$ последовательность (q^n) («геометрическая прогрессия со знаменателем q») суммируема в $\mathbf{R}$, ибо $s_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \leqslant \frac{1}{1-q}$; суммой этой последовательности служит $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{1-q}$.

2) Если $a, b \in [0, 1[$, то семейство $(a^m b^n)_{(m, n)\in \mathbf{N}\times\mathbf{N}}$ суммируемо в $\mathbf{R}$. В самом деле, всякое конечное подмножество множества $\mathbf{N}\times\mathbf{N}$ содержится в некотором множестве вида $[0, p]\times[0, p]$, а

$$\sum_{m=0}^{p}\sum_{n=0}^{p} a^m b^n = \left(\sum_{m=0}^{p} a^m\right)\left(\sum_{n=0}^{p} b^n\right) =$$
$$= \frac{1-a^{p+1}}{1-a}\cdot\frac{1-b^{p+1}}{1-b} \leqslant \frac{1}{(1-a)(1-b)}.$$

3) Для всякого целого $p > 1$ последовательность (n^{-p}) $(n > 0)$ суммируема, ибо

$$s_{2^{n+1}} - s_{2^n} = \sum_{k=1}^{2^n} (2^n + k)^{-p} < 2^n \cdot (2^n)^{-p},$$

откуда почленным сложением этих неравенств получаем

$$s_{2^n} < \frac{1}{1-2^{1-p}}.$$

4) Последовательность $\left(\frac{1}{n}\right)$ $(n > 0)$ не суммируема в $\mathbf{R}$, ибо

$$s_{2^{n+1}} - s_{2^n} = \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{2^n + k} > \frac{2^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2},$$

откуда почленным сложением получаем $s_{2^n} > \frac{n}{2}$, так что критерий теоремы 1 не выполнен.

5) Пусть (I_n) — последовательность попарно непересекающихся непустых открытых интервалов, содержащихся в некотором интервале конечной длины l; так как сумма длин конечного числа интервалов этого семейства $\leqslant l$ (§ 1, n° 5), то семейство длин интервалов I_n суммируемо в $\mathbf{R}$ и его сумма $\leqslant l$.

Теорема 2 (принцип сравнения). *Пусть $(x_\iota)_{\iota\in I}$ и $(y_\iota)_{\iota\in I}$ — два семейства конечных чисел $\geqslant 0$ такие, что $x_\iota \leqslant y_\iota$ при любом ι. Если (y_ι) суммируемо в $\mathbf{R}$, то то же верно и для (x_ι), причем*

$\sum\limits_{\iota} x_\iota \leqslant \sum\limits_{\iota} y_\iota$; *если при этом существует индекс* $\varkappa$ *такой, что* $x_\varkappa < y_\varkappa$, *то* $\sum\limits_{\iota} x_\iota < \sum\limits_{\iota} y_\iota$.

Из предположения вытекает, что для любого конечного подмножества H множества I имеет место неравенство $\sum\limits_{\iota \in H} x_\iota \leqslant \sum\limits_{\iota \in H} y_\iota$, откуда по теореме 1 следует первая часть теоремы; неравенство для сумм вытекает из принципа продолжения неравенств (§ 5, теорема 1). Если $x_\varkappa < y_\varkappa$, то

$$\sum_{\iota} x_\iota = x_\varkappa + \sum_{\iota \neq \varkappa} x_\iota < y_\varkappa + \sum_{\iota \neq \varkappa} y_\iota = \sum_{\iota} y_\iota.$$

Эта теорема доставляет наиболее употребительный критерий для решения вопроса о том, суммируема ли в $\mathbf{R}$ последовательность положительных чисел (x_n) или нет; ее стараются *сравнить* с более простой последовательностью (y_n), относительно которой уже известно, суммируема она или нет; если существует конечное число $a > 0$ такое, что $x_n \leqslant a y_n$ для каждого n, начиная с некоторого, и если (y_n) суммируема, то (x_n) тоже суммируема; напротив, если существует конечное число $b > 0$ такое, что $x_n \geqslant b y_n$ для каждого n, начиная с некоторого, и если (y_n) не суммируема в $\mathbf{R}$, то и (x_n) не суммируема в $\mathbf{R}$. Мы увидим впоследствии (Книга IV, гл. V, § 4), каким образом разыскиваются последовательности сравнения в наиболее часто встречающихся случаях.

Примеры. 1) Рассмотрим последовательность $\left(\frac{a^n}{n!}\right)$, где a — конечное вещественное число > 0; пусть n_0 — наименьшее целое такое, что $a < n_0$. Для всякого $n \geqslant n_0$ имеем

$$\frac{a^n}{n!} \leqslant \frac{a^{n_0}}{n_0!} \left(\frac{a}{n_0}\right)^{n-n_0};$$

но так как $q = \frac{a}{n_0} < 1$, то последовательность (q^{n-n_0}) суммируема; следовательно, суммируема и последовательность $\left(\frac{a^n}{n!}\right)$.

2) Пусть (a_n) — суммируемая последовательность положительных чисел; так как $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$, то существует целое n_0 такое, что $a_n \leqslant 1$ для всех $n \geqslant n_0$; следовательно, $a_n^2 \leqslant a_n$ для всех $n \geqslant n_0$, откуда явствует, что последовательность (a_n^2) суммируема в $\mathbf{R}$; то же верно для (a_n^p) при любом целом $p > 1$.

3) Пусть a и b — вещественные числа >1; тогда

$$\frac{1}{a^m+b^n} \leqslant \frac{1}{2(\sqrt{a})^m(\sqrt{b})^n},$$

и, следовательно, семейство $\left(\frac{1}{a^m+b^n}\right)$ суммируемо в $\mathbf{R}$.

Следствие. *Пусть $(x_\iota)_{\iota\in I}$ — суммируемое в $\mathbf{R}$ семейство конечных чисел $\geqslant 0$; для любого подмножества H множества I имеем*

$$\sum_{\iota\in H} x_\iota \leqslant \sum_{\iota\in I} x_\iota,$$

причем левая и правая части равны между собой только в случае, когда $x_\iota = 0$ для каждого $\iota \in \complement H$.

2. Суммируемые семейства конечных чисел произвольного знака в R

Теорема 3. *Пусть $(x_\iota)_{\iota\in I}$ — семейство конечных вещественных чисел. Следующие свойства равносильны:*

а) *семейство (x_ι) суммируемо в $\mathbf{R}$;*

б) *семейство $(|x_\iota|)$ суммируемо в $\mathbf{R}$;*

в) *множество всех конечных частичных сумм семейства (x_ι) ограниченно в $\mathbf{R}$.*

Пусть I_1 — множество тех $\iota \in I$, для которых $x_\iota \geqslant 0$, и I_2 — множество тех $\iota \in I$, для которых $x_\iota < 0$. Для того чтобы семейство $(x_\iota)_{\iota\in I}$ (соотв. $(|x_\iota|)_{\iota\in I}$) было суммируемым, необходимо и достаточно, чтобы было суммируемым каждое из семейств $(x_\iota)_{\iota\in I_1}$ и $(x_\iota)_{\iota\in I_2}$ (соотв. $(|x_\iota|)_{\iota\in I_1}$ и $(|x_\iota|)_{\iota\in I_2}$) (гл. III, § 5, предложения 2 и 3). Но все равно, сказать ли, что $(x_\iota)_{\iota\in I_1}$ суммируемо, что $(|x_\iota|)_{\iota\in I_1}$ суммируемо или что множество всех конечных частичных сумм семейства $(x_\iota)_{\iota\in I_1}$ ограниченно (теорема 1); и то же верно при замене I_1 на I_2. А отсюда сразу следует справедливость теоремы.

Теорема 3 показывает, что исследование суммируемости в $\mathbf{R}$ семейства конечных вещественных чисел целиком сводится к исследованию суммируемости семейства их абсолютных значений.

Напомним (гл. III, § 5, предложение 6), что если (x_ι) и (y_ι) — суммируемые семейства конечных вещественных чисел, то семей-

ство $(x_\iota + y_\iota)$ суммируемо и $\sum_\iota (x_\iota + y_\iota) = \sum_\iota x_\iota + \sum_\iota y_\iota$. Кроме того, если (x_ι) — суммируемое семейство конечных вещественных чисел и a — произвольное конечное число, то семейство (ax_ι) суммируемо в $\mathbf{R}$, причем $\sum_\iota ax_\iota = a \sum_\iota x_\iota$.

3. Произведение двух бесконечных сумм

Предложение 1. *Если семейства* $(x_\lambda)_{\lambda \in L}$ *и* $(y_\mu)_{\mu \in M}$ *конечных вещественных чисел суммируемы в* $\mathbf{R}$, *то суммируемо и семейство* $(x_\lambda y_\mu)_{(\lambda, \mu) \in L \times M}$, *причем*

$$\sum_{(\lambda, \mu) \in L \times M} x_\lambda y_\mu = \Big(\sum_{\lambda \in L} x_\lambda\Big)\Big(\sum_{\mu \in M} y_\mu\Big). \tag{1}$$

Всякое конечное подмножество множества $L \times M$ содержится в конечном множестве вида $H \times K$, где H и K — конечные подмножества соответственно множеств L и M. Но по предположению существует число $a > 0$ такое, что $\sum_{\lambda \in H} |x_\lambda| \leqslant a$ и $\sum_{\mu \in K} |y_\mu| \leqslant a$, каковы бы ни были эти H и K; следовательно,

$$\sum_{(\lambda, \mu) \in H \times K} |x_\lambda y_\mu| = \Big(\sum_{\lambda \in H} |x_\lambda|\Big)\Big(\sum_{\mu \in K} |y_\mu|\Big) \leqslant a^2,$$

откуда согласно теоремам 1 и 3 вытекает, что семейство $(x_\lambda y_\mu)$ суммируемо в $\mathbf{R}$. В силу ассоциативности суммы можно написать (гл. III, § 5, формула (2))

$$\sum_{(\lambda, \mu) \in L \times M} x_\lambda y_\mu = \sum_{\lambda \in L} \Big(\sum_{\mu \in M} x_\lambda y_\mu\Big) = \sum_{\lambda \in L} x_\lambda \Big(\sum_{\mu \in M} y_\mu\Big) = \Big(\sum_{\lambda \in L} x_\lambda\Big)\Big(\sum_{\mu \in M} y_\mu\Big),$$

и предложение доказано.

4. Перемножаемые семейства в $\mathbf{R}^*$

В мультипликативной группе $\mathbf{R}^*$ всех конечных вещественных чисел, отличных от 0, семейство $(x_\iota)_{\iota \in I}$ может быть перемножаемым только в случае, когда $\lim x_\iota = 1$ по фильтру дополнений всех конечных подмножеств множества I (гл. III, § 5, предложение 1). В частности, может быть только *конечное* число индексов ι таких, что $x_\iota < 0$. Поэтому мы можем ограничиться рассмотрением семейств (x_ι), все члены которых *строго положительны*; тогда удобно положить $x_\iota = 1 + u_\iota$, где все u_ι подчинены условию $-1 < u_\iota < +\infty$. Так как всякая точка в $\mathbf{R}^*$

имеет счетную фундаментальную систему окрестностей, то множество индексов ι, для которых $u_\iota \neq 0$, *не более чем счетно*, если семейство $(1+u_\iota)$ перемножаемо в $\mathbf{R}^*$.

Теорема 4. *Для того чтобы семейство* $(1+u_\iota)$ *было перемножаемым в* $\mathbf{R}^*$, *необходимо и достаточно, чтобы семейство* (u_ι) *было суммируемо в* $\mathbf{R}$.

Лемма. 1° *Если* $(a_i)_{1\leq i\leq p}$ — *конечная последовательность чисел* >0, *то*

$$\prod_{i=1}^{p}(1+a_i)\geqslant 1+\sum_{i=1}^{p}a_i. \tag{2}$$

2° *Если, кроме того,* $a_i<1$ *при любом* i, *то*

$$\prod_{i=1}^{p}(1-a_i)\geqslant 1-\sum_{i=1}^{p}a_i. \tag{3}$$

Эти неравенства, очевидные при $p=1$, доказываются индукцией по p. Если

$$\prod_{i=1}^{p-1}(1+a_i)\geqslant 1+\sum_{i=1}^{p-1}a_i,$$

то

$$\prod_{i=1}^{p}(1+a_i)\geqslant(1+a_p)\left(1+\sum_{i=1}^{p-1}a_i\right)=1+\sum_{i=1}^{p}a_i+a_p\sum_{i=1}^{p-1}a_i\geqslant 1+\sum_{i=1}^{p}a_i.$$

Точно так же, если

$$\prod_{i=1}^{p-1}(1-a_i)\geqslant 1-\sum_{i=1}^{p-1}a_i,$$

то

$$\prod_{i=1}^{p}(1-a_i)\geqslant(1-a_p)\left(1-\sum_{i=1}^{p-1}a_i\right)=1-\sum_{i=1}^{p}a_i+a_p\sum_{i=1}^{p-1}a_i\geqslant 1-\sum_{i=1}^{p}a_i.$$

Тем самым лемма доказана.

Заметим теперь, что если семейство $(1+u_\iota)$ перемножаемо, то перемножаемы также семейства $(1+u_\iota^+)$ и $(1-u_\iota^-)$, поскольку $\mathbf{R}^*$ есть полная группа (гл. III, § 5, предложение 2); и обратно, если семейства $(1+u_\iota^+)$ и $(1-u_\iota^-)$ перемножаемы, то перемножаемо и семейство $(1+u_\iota)$ (гл. III, § 5, предложение 3). Поэтому можно ограничиться отдельным рассмотрением случая, когда все $u_\iota\geqslant 0$, и случая, когда все $u_\iota\leqslant 0$.

Предположим сначала, что все $u_\iota\geqslant 0$. Если семейство $(1+u_\iota)$ перемножаемо, то для любого $\varepsilon>0$ существует конечное под-

множество J множества индексов I такое, что $1 \leqslant \prod_{\iota \in H}(1+u_\iota) \leqslant 1+\varepsilon$, каково бы ни было конечное подмножество H множества I, не пересекающееся с J; согласно (2) отсюда следует, что $\sum_{\iota \in H} u_\iota \leqslant \varepsilon$, а это в силу критерия Коши (гл. III, § 5, теорема 1) показывает, что (u_ι) суммируемо в $\mathbf{R}$.

Обратно, предположим, что (u_ι) суммируемо в $\mathbf{R}$. Для любого ε, заключенного между 0 и 1, существует конечное подмножество J множества I такое, что $0 \leqslant \sum_{\iota \in H} u_\iota \leqslant \varepsilon$, каково бы ни было не пересекающееся с J конечное подмножество H множества I. Согласно (3) имеем поэтому $\prod_{\iota \in H}(1-u_\iota) \geqslant 1-\varepsilon$. Но так как $1+u \leqslant \frac{1}{1-u}$, если $0 \leqslant u < 1$, то, следовательно,

$$1 \leqslant \prod_{\iota \in H}(1+u_\iota) \leqslant \frac{1}{1-\varepsilon},$$

а это показывает, что $(1+u_\iota)$ перемножаемо (критерий Коши).

Для случая, когда все $u_\iota \leqslant 0$, доказательство аналогично. Чтобы вывести суммируемость (u_ι) из перемножаемости $(1+u_\iota)$, здесь используются формула (2) и неравенство $1-u \leqslant \frac{1}{1+u}$ $(0 \leqslant u < 1)$, а для вывода перемножаемости $(1+u_\iota)$ из суммируемости (u_ι) используется формула (3).

В главе V (§ 4) топологическое исследование группы $\mathbf{R}^*$ позволит получить другой критерий перемножаемости семейства в $\mathbf{R}^*$, использующий логарифмическую функцию; а впоследствии мы установим эквивалентность обоих критериев, основываясь на дифференциальных свойствах логарифма (Книга IV, гл. V, § 4, n° 3).

5. *Суммируемые семейства и перемножаемые семейства в* $\overline{\mathbf{R}}$

В интервале $[0, +\infty] \subset \overline{\mathbf{R}}$ сложение есть ассоциативный и коммутативный закон композиции (§ 4, n° 3); поэтому понятие *суммируемого* семейства чисел этого интервала сохраняет смысл (гл. III, § 5, замечание 3).

Предложение 2. *Всякое семейство* (x_ι) *положительных вещественных чисел суммируемо в* $\overline{\mathbf{R}}$.

В самом деле, отображение $H \mapsto s_H$ фильтрующегося упорядоченного множества $\mathfrak{F}(I)$ в $\overline{\mathbf{R}}$ — *возрастающее* и потому (§ 5, теорема 2) имеет предел.

Такое же рассуждение показывает, что всякое семейство *отрицательных* вещественных чисел суммируемо в $\overline{\mathbf{R}}$.

Точно так же умножение есть ассоциативный и коммутативный закон композиции в каждом из интервалов $[0, 1]$ и $[1, +\infty]$ расширенной прямой $\overline{\mathbf{R}}$; поэтому понятие перемножаемого семейства сохраняет смысл в каждом из этих интервалов.

Предложение 3. *Всякое семейство* $(1 + u_\iota)$ (соотв. $(1 - u_\iota)$) *чисел* $\geqslant 1$ (соотв. $\geqslant 0$ и $\leqslant 1$) *перемножаемо в* $\overline{\mathbf{R}}$.

Доказательство то же, что и для предложения 2.

Следствие. *Для того чтобы произведение* $\prod_\iota (1 + u_\iota)$ (соотв. $\prod_\iota (1 - u_\iota)$) *чисел* $\geqslant 1$ (соотв. *строго положительных и* $\leqslant 1$) *было равно* $+\infty$ (соотв. 0), *необходимо и достаточно, чтобы* $\sum_\iota u_\iota = +\infty$.

В самом деле, на основании теоремы 4 из конечности $\sum_\iota u_\iota$ следует, что $\prod_\iota (1 + u_\iota)$ и $\prod_\iota (1 - u_\iota)$ принадлежат $\mathbf{R}^*$, и обратно.

Замечание. Теорема ассоциативности (гл. III, § 5, теорема 2) остается еще в силе при замене G на $\overline{\mathbf{R}}$ в предположении, что все $x_\iota \geqslant 0$. В самом деле, это очевидно, если $\sum_{\iota \in I} x_\iota$ конечна. Предположим, что $\sum_{\iota \in I} x_\iota = +\infty$. Тогда для любого конечного $a > 0$ существует конечное подмножество H множества I такое, что $\sum_{\iota \in H} x_\iota \geqslant a$; пусть K — конечное подмножество множества L такое, что $H \subset \bigcup_{\lambda \in K} I_\lambda$; так как $s_\lambda \geqslant \sum_{\iota \in I_\lambda \cap H} x_\iota$ для всех $\lambda \in K$, то $\sum_{\lambda \in K} s_\lambda \geqslant \sum_{\iota \in H} x_\iota \geqslant a$, чем доказано, что $\sum_{\lambda \in L} s_\lambda = +\infty$. Предоставляем читателю сформулировать аналогичное предложение для перемножаемых семейств чисел из $[0, 1]$ или $[1, +\infty]$.

6. *Ряды и бесконечные произведения вещественных чисел*

Ряд конечных вещественных чисел, *сходящийся в* $\mathbf{R}$, называют просто *сходящимся* рядом.

Определение 1. *Ряд конечных вещественных чисел называют абсолютно сходящимся, если ряд абсолютных значений его членов сходящийся.*

Предложение 4. *Для того чтобы ряд конечных вещественных чисел был коммутативно сходящимся, необходимо и достаточно, чтобы он был абсолютно сходящимся.*

Действительно, это вытекает из предложения 9 § 5 главы III и доказанной выше теоремы 3.

Другими словами, если (u_n) — последовательность конечных вещественных чисел, то все равно, говорить ли, что *ряд* с общим членом u_n *коммутативно сходится*, или что он *абсолютно сходится*, или что *последовательность* (u_n) *суммируема в* $\mathbf{R}$. Все свойства суммируемых семейств, доказанные в § 5 главы III, применимы, таким образом, к абсолютно сходящимся рядам. В частности, если ряд с общим членом u_n абсолютно сходится, то сумма $\sum\limits_{n\in H} u_n$ существует, каково бы ни было подмножество H множества $\mathbf{N}$; и если (H_p) — разбиение множества $\mathbf{N}$, то $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n = \sum\limits_{p} \Big(\sum\limits_{n\in H_p} u_n\Big)$ (*ассоциативность* абсолютно сходящихся рядов).

Как уже было отмечено (гл. III, § 5), ряд вещественных чисел может быть сходящимся, не будучи коммутативно сходящимся, или, что то же, не будучи абсолютно сходящимся.

Пример. *Знакочередующиеся ряды*. Ряд, определенный последовательностью (u_n) конечных вещественных чисел, называется *знакочередующимся*, если $u_n = (-1)^n v_n$, где $v_n \geqslant 0$ для всех n. Покажем, что для сходимости такого ряда *достаточно*, чтобы *последовательность* (v_n) *была убывающей и имела пределом* 0. В самом деле, пусть $s_n = \sum\limits_{p=0}^{n} u_p$; тогда из предположенного убывания последовательно-

сти (v_n) следует, что для всех $n \geqslant 0$ справедливы неравенства

$$s_{2n+1} \leqslant s_{2n+3} \leqslant s_{2n+2} \leqslant s_{2n}.$$

Последовательность (s_{2n}) (соотв. (s_{2n+1})) убывает и ограниченна снизу (соотв. возрастает и ограниченна сверху); следовательно, она имеет конечный предел a (соотв. b), причем $b \leqslant a$; так как $a-b = \lim\limits_{n\to\infty} (s_{2n}-s_{2n+1}) = \lim\limits_{n\to\infty} v_n = 0$, то предложение доказано.

Если взять, например, $v_n = \frac{1}{n}$, то предыдущие предположения будут выполнены, и, таким образом, ряд с общим членом $\frac{(-1)^n}{n}$ («знакочередующийся гармонический ряд») сходится; но в n° 1 мы видели, что ряд с общим членом $\frac{1}{n}$ («гармонический ряд») — не сходящийся; следовательно, знакочередующийся гармонический ряд — не абсолютно сходящийся.

Напомним (гл. III, § 5, предложение 7), что если (u_n) и (v_n) — сходящиеся ряды конечных вещественных чисел, то ряд $(u_n + v_n)$ сходящийся и

$$\mathop{\mathsf{S}}_{n=0}^{\infty} (u_n + v_n) = \mathop{\mathsf{S}}_{n=0}^{\infty} u_n + \mathop{\mathsf{S}}_{n=0}^{\infty} v_n;$$

точно так же, если ряд (u_n) сходящийся, то, каково бы ни было конечное число a, ряд (au_n) будет сходящимся и $\mathop{\mathsf{S}}\limits_{n=0}^{\infty} au_n = a \mathop{\mathsf{S}}\limits_{n=0}^{\infty} u_n$.

Наконец, если ряды (u_n) и (v_n) сходящиеся и $u_n \leqslant v_n$ при любом n, то $\mathop{\mathsf{S}}\limits_{n=0}^{\infty} u_n \leqslant \mathop{\mathsf{S}}\limits_{n=0}^{\infty} v_n$ в силу принципа продолжения неравенств (§ 5, теорема 1).

Следует заметить, что если ряд (v_n) сходящийся, но не абсолютно сходящийся и $|u_n| \leqslant |v_n|$ при любом n, то отсюда ни в коей мере нельзя заключить, что и ряд (u_n) сходится, в чем убеждаемся, взяв $u_n = |v_n|$.

Бесконечное произведение отличных от 0 конечных вещественных чисел, *сходящееся в* $\mathbf{R}^*$, называют просто *сходящимся*; его значением является, таким образом, *отличное от нуля конечное* число.

Определение 2. *Бесконечное произведение с общим членом* $1 + u_n$ *называется абсолютно сходящимся, если сходится произведение с общим членом* $1 + |u_n|$.

Предложение 5. *Для того чтобы бесконечное произведение конечных вещественных чисел было коммутативно сходящимся, необходимо и достаточно, чтобы оно было абсолютно сходящимся.*

Это вытекает из предложения 9 § 5 главы III и доказанной выше теоремы 4.

Кроме того, для того чтобы произведение с общим членом $1 + u_n$ было *абсолютно сходящимся*, необходимо и достаточно, чтобы ряд с общим членом u_n был *абсолютно сходящимся*.

Произведение отличных от 0 вещественных чисел может быть сходящимся, не будучи коммутативно сходящимся, или, что то же, не будучи абсолютно сходящимся.

Пример. Положим при $n \geqslant 2$ $u_{2n-1} = -\frac{1}{n}$, $u_{2n} = \frac{1}{n}$; тогда произведение $(1+u_n)$ не будет абсолютно сходящимся, ибо ряд (u_n) не абсолютно сходящийся; но так как

$$\prod_{p=3}^{2n}(1+u_p) = \prod_{p=2}^{n}\left(1-\frac{1}{p^2}\right),$$

$$\prod_{p=3}^{2n+1}(1+u_p) = \left(1-\frac{1}{n+1}\right)\prod_{p=2}^{n}\left(1-\frac{1}{p^2}\right),$$

то из теоремы 4 вытекает, что рассматриваемое произведение сходится к значению

$$\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right).$$

Кроме того, следует заметить, что *сходимость* ряда с общим членом u_n *не является ни необходимым, ни достаточным* условием для того, чтобы произведение с общим членом $1 + u_n$ было *сходящимся* (см. упражнения 21 и 22).

Упражнения

1) Пусть (x_ι) — семейство вещественных чисел, принадлежащих интервалу $A' =]-\infty, +\infty]$ (соотв. интервалу $A'' = [-\infty, +\infty[$). Для того чтобы семейство (x_ι) было суммируемым в $\overline{\mathbf{R}}$,

необходимо и достаточно, чтобы было выполнено *одно* из следующих условий:

а) хотя бы одно из чисел x_ι равно $+\infty$ (соотв. $-\infty$);

б) хотя бы одна из сумм $\sum\limits_\iota x_\iota^+$ или $\sum\limits_\iota x_\iota^-$ конечна.

В первом случае имеем $\sum\limits_\iota x_\iota = +\infty$ (соотв. $-\infty$); во втором $\sum\limits_\iota x_\iota = \sum\limits_\iota x_\iota^+ - \sum\limits_\iota x_\iota^-$.

2) Пусть (x_ι) — семейство вещественных чисел, принадлежащих интервалу A' (соотв. A'') и удовлетворяющих условию б) упражнения 1. Показать, что всякое подсемейство семейства (x_ι) суммируемо в $\overline{\mathbf{R}}$ и что сумма чисел x_ι ассоциативна. [См. теорему 2 § 5 главы III.]

3) Пусть $(x_n)_{n \geqslant 0}$ — *убывающая* последовательность конечных чисел $\geqslant 0$. Для того чтобы эта последовательность была суммируемой в $\mathbf{R}$, необходимо и достаточно, чтобы последовательность $(2^n x_{2^n})_{n \geqslant 0}$ была суммируемой в $\mathbf{R}$ («признак сгущения Коши»). °Вывести отсюда, что ряд с общим членом $\dfrac{1}{n^\alpha}$ сходится при $\alpha > 1$ и не сходится, если $0 < \alpha \leqslant 1$.$_\circ$

4) Пусть (a_n) — произвольная последовательность конечных чисел $\geqslant 0$. Показать, что последовательность $\left(\dfrac{a_n}{(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n)}\right)$ суммируема в $\mathbf{R}$. [Представить каждый член этой последовательности в виде разности.]

5) Пусть (d_n) — последовательность конечных чисел $\geqslant 0$ таких, что $\sum\limits_{n=0}^{\infty} d_n = +\infty$. Что можно сказать относительно сходимости рядов с общим членом

$$\frac{d_n}{1+d_n}; \quad \frac{d_n}{1+nd_n}; \quad \frac{d_n}{1+n^2 d_n}; \quad \frac{d_n}{1+d_n^2}?$$

6) Установить, что сумма $s = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ равна $+\infty$, показав, что $s \geqslant s + \dfrac{1}{2}$. [Оценить снизу, в функции от s, отдельно сумму членов с четными индексами и сумму членов с нечетными индексами.]

7) Показать, что если p — целое > 1, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p} = (1-2^{1-p}) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}.$$

8) Показать, что для m целого >0

$$\sum_{n\geqslant 1,\, n\neq m} \frac{1}{m^2-n^2} = -\frac{3}{4m^2}.$$

[Разложить $\frac{1}{m^2-x^2}$ на простейшие дроби.]

9) Показать, что если ряд с общим членом x_n сходится в $\mathbf{R}$, то $\liminf\limits_{n\to\infty} nx_n \leqslant 0 \leqslant \limsup\limits_{n\to\infty} nx_n$.

*10) Для сходимости в $\mathbf{R}$ ряда с общим членом u_n необходимо и достаточно, чтобы для *всякой* возрастающей последовательности (p_n) чисел >0 такой, что $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = +\infty$, выполнялось условие $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{p_k u_k}{p_n} = 0$. [Использовать упражнение 15 § 5.]

11) Рассмотрим последовательность (a_n), каждый член которой является суммой конечной последовательности конечных вещественных чисел: $a_n = b_{n,1} + b_{n,2} + \ldots + b_{n,k_n}$. Для всякой пары (n, p) целых положительных чисел, в которой $p \leqslant k_n$, положим $c_m = b_{n,p}$ при $m = \sum\limits_{i=0}^{n-1} k_i + p$. Показать, что если ряд с общим членом a_n сходится в $\mathbf{R}$, а

$$d_n = |b_{n,1}| + |b_{n,2}| + \ldots + |b_{n,k_n}|$$

стремится к 0 при неограниченном возрастании n, то ряд с общим членом c_m сходится и имеет ту же сумму, что и ряд с общим членом a_n.

*12) Пусть (u_n) — последовательность конечных вещественных чисел. Для каждой перестановки σ множества $\mathbf{N}$ положим

$$r(n) = |\sigma(n) - n| \cdot \sup_{m\geqslant n} |u_m|.$$

а) Если ряд с общим членом u_n сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} r(n) = 0$, то ряд с общим членом $v_n = u_{\sigma(n)}$ сходится и имеет ту же сумму. [Рассмотреть для больших значений n разность $\sum\limits_{k=0}^{n} v_k - \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$ и заметить, что если h есть наименьшее целое $\leqslant n$ такое, что $\sigma(h) > n$, то в каждой из двух сумм этой разности имеется самое большее $\sigma(h) - h$ членов, не обращающихся в нуль.]

б) Предположим, что ряд с общим членом u_n сходится. Дать пример перестановки σ, для которой $\lim\limits_{n\to\infty} r(n) = 0$, но критерий упражнения 6а § 5 главы III не выполнен. [Определить надлежащим образом семейство попарно непересекающихся интервалов

$I_k=[n_k-2k,\ n_k+2k]$ из $\mathbf{N}$ и взять σ так, чтобы $\sigma(n)=n$, когда n не принадлежит ни одному из I_k, и $\sigma(n_k-2j)=n_k+2j$, $\sigma(n_k+2j)=n_k-2j$ для любого k и $j\in[0,\ k]$.]

13) Пусть (u_n) — последовательность вещественных чисел $\geqslant 0$ такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=0$ и $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n=+\infty$. Пусть, далее, (p_n) — строго возрастающая последовательность чисел >0 такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} p_n=+\infty$. Показать, что существует перестановка σ множества $\mathbf{N}$ такая, что $\sum\limits_{k=0}^{n} u_{\sigma(k)}\leqslant p_n$ для каждого $n\in\mathbf{N}$.

*14) Пусть (u_n) — последовательность конечных вещественных чисел такая, что ряд с общим членом u_n сходится, но не абсолютно, и пусть $s=\mathop{\mathsf{S}}\limits_{n=0}^{\infty} u_n$. Показать, что для каждого числа $s'\geqslant s$ существует перестановка σ множества $\mathbf{N}$ такая, что $\sigma(n)=n$ для всех номеров n, при которых $u_n\geqslant 0$, а $\mathop{\mathsf{S}}\limits_{n=0}^{\infty} u_{\sigma(n)}=s'$. [Показать индукцией по m существование перестановки σ_m множества $\mathbf{N}$, удовлетворяющей следующим условиям: $\sigma_m(k)=k$ при любом k, для которого $u_k\geqslant 0$, и, если положить $u_k^{(m)}=u_{\sigma_m(k)}$, имеется целое p_m такое, что $\left|s'-\sum\limits_{i=0}^{k} u_i^{(m)}\right|\leqslant\dfrac{1}{m}$ для всех $k\geqslant p_m$. При этом σ_{m+1} таково, что $\sigma_{m+1}(k)=\sigma_m(k)$ для каждого k такого, что $\sigma_m(k)<p_m$, и каждого k такого, что $u_k\leqslant-\dfrac{1}{m}$.]

15) Пусть (u_n) — последовательность конечных вещественных чисел такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=0$ и $\sum\limits_n u_n^+=\sum\limits_n u_n^-=+\infty$; пусть, далее, a и b — произвольные вещественные числа (не обязательно конечные), причем $a\leqslant b$. Показать, что существует перестановка σ множества $\mathbf{N}$ такая, что, положив $s_n=\sum\limits_{k=0}^{n} u_{\sigma(k)}$, будем иметь $\liminf\limits_{n\to\infty} s_n=a$, $\limsup\limits_{n\to\infty} s_n=b$. Показать, что множеством предельных точек последовательности (s_n) служит весь интервал $[a,\ b]$.

*16) Пусть (u_n) — последовательность конечных вещественных чисел такая, что ряд с общим членом u_n сходится, но не абсолютно. Показать, что существует перестановка σ множества $\mathbf{N}$, удовлетворяющая условию упражнения 6а § 5 главы III, но такая, что ряд с общим членом $u_{\sigma^{-1}(n)}$ не сходится. [Пусть h, k, m — целые числа,

обладающие следующими свойствами: если $p_1, \ldots, p_r$ суть целые n такие, что $h \leqslant n < h+m$ и $u_n \geqslant 0$, то $u_{p_1} + \ldots + u_{p_r} > 2$ и $h+m < k-r$; кроме того, $\left|\sum_{n=\mu}^{\nu} u_n\right| \leqslant 1$, каковы бы ни были целые μ, ν такие, что $h+m \leqslant \mu \leqslant \nu$. Положим $s = m-r$ и обозначим $q_1, \ldots, q_s$ целые n такие, что $h \leqslant n < h+m$ и $u_n < 0$. Рассмотрим перестановку π интервала $[h, k+s]$ из $\mathbf{N}$, для которой $\pi(p_i) = k-i+1$, если $1 \leqslant i \leqslant r$, $\pi(q_j) = k+j$, если $1 \leqslant j \leqslant s$, $\pi(k+j) = h+s-j$, если $1 \leqslant j \leqslant s$, $\pi(k-i+1) = h+s+i-1$, если $1 \leqslant i \leqslant r$, и, наконец, $\pi(n) = n$, если $h+m \leqslant n \leqslant k-r$; показать, что $\left|\sum_{i=h}^{k} u_i - \sum_{i=h}^{k} u_{\pi^{-1}(i)}\right| \geqslant 1$.]

17) Пусть $u_{mn} = \frac{1}{m^2-n^2}$, если $m \neq n$, и $u_{mm} = 0$; показать, что

$$\sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_{mn}\right) = -\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty} u_{mn}\right) \neq 0.$$

[Использовать упражнение 8.]

18) Пусть $(1+u_\iota)$ — семейство вещественных чисел, принадлежащих интервалу $[0, +\infty[$ (соотв. $]0, +\infty]$). Для того чтобы семейство $(1+u_\iota)$ было перемножаемым в $\overline{\mathbf{R}}$, необходимо и достаточно, чтобы было выполнено *одно* из следующих условий:

а) хотя бы одно из чисел $1+u_\iota$ равно 0 (соотв. $+\infty$);

б) семейство (u_ι) суммируемо в $\overline{\mathbf{R}}$.

19) Пусть $(1+u_\iota)_{\iota \in I}$ — перемножаемое семейство в $\mathbf{R}$. Для любого непустого конечного множества $H \subset I$ положим $v_H = \prod_{\iota \in H} u_\iota$. Показать, что семейство $(v_H)_{H \in \mathfrak{F}(I)}$ суммируемо в $\mathbf{R}$ и $1 + \sum_H v_H = \prod_{\iota \in I}(1+u_\iota)$; и обратно. Вывести отсюда, что если $-1 < x < 1$, то

$$\prod_{n=0}^{\infty}\left(1+x^{2^n}\right) = \frac{1}{1-x}.$$

20) Пусть (u_n) — последовательность конечных вещественных чисел $\geqslant 0$, причем $u_0 > 0$, и $s_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ для любого $n \geqslant 0$. Для того чтобы последовательность (u_n) была суммируемой в $\mathbf{R}$, необходимо и достаточно, чтобы последовательность $\left(\frac{u_n}{s_n}\right)$ была суммируема в $\mathbf{R}$. [Применить теорему 4 к последовательности $\left(1-\frac{u_n}{s_n}\right)$.] То же свойство с заменой последовательности $\left(\frac{u_n}{s_n}\right)$ на $\left(\frac{u_n}{s_{n-1}}\right)$.

21) Пусть $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ для всех $n \geqslant 2$; произведение с общим членом $(1+u_n)$ не сходится, но ряд с общим членом u_n сходится.

22) Пусть $u_{2n-1} = -\frac{1}{\sqrt{n}}$ и $u_{2n} = \frac{1+\sqrt{n}}{n}$ для всех $n \geqslant 2$. Произведение с общим членом $(1+u_n)$ сходится, но ряд с общим членом u_n не сходится.

§ 8. Употребительные разложения вещественных чисел

1. Приближенные значения вещественного числа

Определение 1. *Пусть дано число* $\varepsilon > 0$; *говорят, что вещественное число* r *есть приближенное с точностью до* ε *значение вещественного числа* x, *если* $|x - r| \leqslant \varepsilon$; *при этом* r *называется приближенным значением по недостатку, если* $r \leqslant x$, *и по избытку, если* $r \geqslant x$.

Пусть A — *всюду плотное* подмножество множества $\mathbf{R}$; для каждого $x \in \mathbf{R}$ и каждого $\varepsilon > 0$ существует приближенное с точностью до ε значение числа x по недостатку (соотв. по избытку), принадлежащее A, ибо интервал $]x - \varepsilon, x[$ (соотв. $]x, x + \varepsilon[$) содержит по крайней мере одну точку из A. Пусть теперь (ε_n) — *заданная строго убывающая* последовательность чисел > 0, *стремящаяся к* 0, и пусть $r_n \in A$ есть приближенное с точностью до ε_n значение числа x; тогда последовательность (r_n) при неограниченном увеличении n имеет своим *пределом* x.

В случае, когда A — *подгруппа* аддитивной группы $\mathbf{R}$ и все ε_n *принадлежат* A, можно канонически определить для каждого $x \in \mathbf{R}$ последовательность (r_n) приближенных значений x по недостатку, принадлежащих A.

В самом деле, в силу аксиомы Архимеда (§ 2, теорема 1) множество целых p таких, что $p\varepsilon_n \leqslant x$, имеет *наибольший элемент* p_n; другими словами, существует однозначно определенное целое p_n такое, что

$$p_n\varepsilon_n \leqslant x < (p_n + 1)\,\varepsilon_n. \tag{1}$$

Так как $|x - p_n\varepsilon_n| \leqslant \varepsilon_n$, то $p_n\varepsilon_n$ есть приближенное с точностью до ε_n значение x по недостатку, притом принадлежащее

A в силу предположения. Аналогично $(p_n+1)\,\varepsilon_n$ есть принадлежащее A приближенное с точностью до ε_n значение x по избытку. При этом обе последовательности $(p_n\varepsilon_n)$ и $((p_n+1)\,\varepsilon_n)$ имеют пределом число x.

2. *Разложения вещественных чисел по базисной последовательности*

Мы ограничимся изучением случая, когда $\varepsilon_n=\dfrac{1}{d_n}$, где (d_n) — строго возрастающая последовательность целых чисел такая, что $d_0=1$, а d_n *кратно* d_{n-1} для $n\geqslant 1$. Положим $a_n=\dfrac{d_n}{d_{n-1}}$ $(n\geqslant 1)$; это — целое число >1. В этом случае последовательность приближенных значений по недостатку $r_n=\dfrac{p_n}{d_n}$ — *возрастающая*: в самом деле, p_n — наибольшее целое такое, что $\dfrac{p_n}{d_n}\leqslant x$; но

$$\frac{p_{n-1}}{d_{n-1}}=\frac{p_{n-1}a_n}{d_n}\leqslant x<\frac{p_{n-1}+1}{d_{n-1}}=\frac{p_{n-1}a_n+a_n}{d_n},$$

откуда $a_np_{n-1}\leqslant p_n<a_np_{n-1}+a_n$ и, следовательно, $r_{n-1}\leqslant r_n\leqslant x$. Положим

$$p_n=a_np_{n-1}+u_n; \tag{2}$$

тогда $0\leqslant u_n<a_n$ или, что равносильно этому, $0\leqslant u_n\leqslant a_n-1$, ибо u_n — целое. Отсюда

$$r_n=r_{n-1}+\frac{u_n}{d_n}=p_0+\sum_{k=1}^{n}\frac{u_k}{d_k}, \tag{3}$$

и так как $x=\lim\limits_{n\to\infty} r_n$, то

$$x=p_0+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{d_n}. \tag{4}$$

Ряд в правой части формулы (4), имеющий x своей суммой, называется *разложением числа x по базисной последовательности* (d_n). Все коэффициенты $u_n\geqslant 0$; p_0, по определению, есть наибольшее из целых чисел p таких, что $p\leqslant x$; его называют *целой частью* x и часто обозначают $[x]$.

3. *Определение вещественного числа его разложением*

Обратно, пусть заданы целое число q_0 и последовательность (v_n) $(n \geqslant 1)$ целых чисел таких, что $0 \leqslant v_n \leqslant a_n - 1$; исследуем, существует ли число x, в разложении (4) которого $p_0 = q_0$ и $u_n = v_n$ для всех n. Если такое число существует, то оно *единственно*, будучи равным $q_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n}{d_n}$.

Для каждого целого $m > 0$ имеем (принцип сравнения)

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{v_n}{d_n} \leqslant \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{a_n - 1}{d_n} = \sum_{n=m+1}^{\infty} \left(\frac{1}{d_{n-1}} - \frac{1}{d_n} \right) = \frac{1}{d_m},$$

причем крайние члены равны только когда $v_n = a_n - 1$ для каждого $n > m$ (§ 7, теорема 2). Таким образом, ряд с общим членом $\frac{v_n}{d_n}$ сходится; кроме того, если $x = q_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n}{d_n}$, то

$$s_m = q_0 + \sum_{n=1}^{m} \frac{v_n}{d_n} \leqslant x \leqslant s_m + \frac{1}{d_m},$$

причем равенство $x = s_m + \frac{1}{d_m}$ может иметь место только в случае, если $v_n = a_n - 1$ для каждого $n > m$. Поскольку s_m есть дробь со знаменателем d_m, приближенное значение r_m числа x с точностью до $\frac{1}{d_m}$ по недостатку равно s_m или $s_m + \frac{1}{d_m}$, причем последнее может иметь место только если $v_n = a_n - 1$ для всех $n > m$. Итак, мы пришли к различению двух случаев:

1° Существует *бесконечно много* значений n таких, что $v_n < a_n - 1$; ряд $q_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n}{d_n}$ совпадает тогда с разложением его суммы x.

2° Существует целое $m \geqslant 0$ такое, что $v_n = a_n - 1$ для всех $n > m$, а $v_m < a_m - 1$ (если $m > 0$); тогда сумма x ряда

$q_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n}{d_n}$ равна рациональному числу

$$q_0 + \sum_{n=1}^{m} \frac{v_n}{d_n} + \frac{1}{d_m}, \tag{5}$$

имеющему вид $\frac{k}{d_m}$, где k — целое; *разложение* числа x совпадает с рядом (5), все члены которого с номерами $> m$ равны нулю; такое разложение называют *конечным*. Ряд

$$q_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n}{d_n} = q_0 + \sum_{n=1}^{m} \frac{v_n}{d_n} + \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{a_n - 1}{d_n} \tag{6}$$

называется *несобственным разложением* числа x.

Обратно, пусть x — рациональное число, допускающее представление в виде дроби со знаменателем d_n при некотором n; пусть m — наименьшее целое такое, что x имеет вид $\frac{k}{d_m}$ с целым k; тогда $r_n < x$ для всех $n < m$ и $r_m = x$; таким образом, разложение числа x имеет вид (5), и x обладает несобственным разложением, задаваемым формулой (6); это несобственное разложение притом *единственно*.

Для того чтобы рациональное число, представленное в виде несократимой дроби $\frac{p}{q}$, было равно дроби со знаменателем d_n, необходимо и достаточно, чтобы q было *делителем* d_n (число m будет тогда наименьшим целым n, при котором d_n делится на q). Можно сделать так, чтобы *всякое рациональное число* обладало этим свойством (для надлежаще выбранного n): для этого необходимо и достаточно, чтобы всякое целое > 0 было делителем некоторого d_n, что будет иметь место, например, в случае, когда $d_n = n!$. Если d_n обладают этим свойством, то для рациональности числа необходимо и достаточно, чтобы его разложение по последовательности (d_n) было конечно.

Итак, всякой последовательности s, первый член которой q_0 есть произвольное целое число, а член v_n $(n \geqslant 1)$ удовлетворяет условию $0 \leqslant v_n \leqslant a_n - 1$, соответствует вещественное число, равное $q_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n}{d_n}$; обозначая через I_n интервал $[0, a_n - 1] \subset \mathbf{N}$, имеем, таким образом, отображение φ множества $E = \mathbf{Z} \times \prod_{n=1}^{\infty} I_n$

на числовую прямую $\mathbf{R}$; при этом уравнение $\varphi(s)=x$ с заданным $x \in \mathbf{R}$ имеет *одно* решение, если x не является дробью со знаменателем d_n (для надлежаще выбранного n), и *два* решения в противоположном случае.

4. Сравнение разложений

Знание разложений двух различных вещественных чисел x и y позволяет определить, имеет ли место $x<y$ или $x>y$.

В самом деле, пусть $x=p_0+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{d_n}$, $y=q_0+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{v_n}{d_n}$ — разложения чисел x и y. Если $p_0<q_0$, то $x<y$, ибо

$$p_0 \leqslant x < p_0+1 \leqslant q_0 \leqslant y.$$

Более общим образом, пусть $p_0=q_0$ и $u_n=v_n$, когда $1 \leqslant n < m$, но $u_m<v_m$; положив

$$r_n=p_0+\sum_{k=1}^{n}\frac{u_k}{d_k}, \quad s_n=q_0+\sum_{k=1}^{n}\frac{v_k}{d_k},$$

будем иметь $r_n=s_n$ для $n<m$, и так как $u_m+1 \leqslant v_m$, то $r_m+\frac{1}{d_m} \leqslant s_m$; но $r_m \leqslant x < r_m+\frac{1}{d_m} \leqslant s_m \leqslant y$, следовательно, снова $x<y$. Иначе говоря, *отношение порядка чисел x и y совпадает с отношением порядка первых двух различных членов их разложений.*

Отсюда вытекает, что если $p_0=q_0$ и $u_n=v_n$ для $n<m$, то первые m членов разложения любого числа z, принадлежащего замкнутому интервалу с концами x и y, *те же*, что и для разложений чисел x и y.

Заметим также, что в этом случае $|y-x| \leqslant \frac{1}{d_{m-1}}$. Таким образом, если наделить $\mathbf{Z}$ и интервалы I_n *дискретной* топологией, то определенное выше отображение φ будет *непрерывно* на *произведении* E.

5. Разложения с основанием a

Важнейшие из базисных последовательностей — это те, для которых $d_n = a^n$, где a — целое >1; в этом случае говорят, что a есть *основание* соответствующих разложений. Для числовых расчетов используют разложения с основанием 10, называемые

десятичными разложениями; в теоретических исследованиях часто используют разложения с основанием 2 (называемые *двоичными* разложениями) и с основанием 3 (*троичные* разложения).

Для представления приближенных значений r_n числа $x \geqslant 0$ по недостатку в его разложении с основанием a используют следующую символику: каждое целое u такое, что $0 \leqslant u \leqslant a - 1$, обозначают особым знаком, и если $r_n = p_0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{u_k}{d_k}$, то записывают сначала с помощью этих знаков представление целого положительного числа $p_0 = [x]$ по основанию a (Теор. мн., гл. III, § 5, n° 7), далее ставят запятую и выписывают вслед за ней последовательно знаки, представляющие числа $u_1, u_2, \ldots, u_n$. Если S — полученный таким образом символ, часто, допуская вольность речи, пишут $x = S\ldots$; следует раз навсегда условиться, что такое равенство является лишь способом краткого обозначения того, что правая его часть есть приближенное значение числа x с точностью до $\frac{1}{a^n}$ *по недостатку*.

Для отрицательных чисел установившийся обычай — иной: пользуясь предыдущей символикой, записывают приближенное значение числа $x' = -x \geqslant 0$ и ставят впереди знак «—»; таким образом, на самом деле этим дается приближенное значение числа x с точностью до $\frac{1}{a^n}$ *по избытку*.

Этот способ действия не представляет неудобств при числовых расчетах; для обозначения же отрицательных логарифмов используют ту же символику, что и для положительных чисел, ставя просто черту над целой частью, чтобы указать, что последняя равна числу, противоположному написанному.

6. *Мощность множества* R

$\mathbf{R} = \bigcup_{n \in \mathbf{Z}} [n, n+1[$ и все интервалы $[n, n+1[$ равномощны интервалу $[0, 1[$; так как $[0, 1[$ — бесконечное множество, то заключаем (Теор. мн., Сводка результ., § 7, n° 9), что $\mathbf{R}$ *равномощно интервалу* $[0, 1[$. Рассматривая *двоичное* разложение чисел интервала $[0, 1[$, мы покажем, что этот интервал равномощен множеству S всевозможных последовательностей (u_n), члены которых равны 0 или 1.

Прежде всего, он равномощен подмножеству S' множества S, состоящему из последовательностей (u_n) таких, что $u_n = 0$ для бесконечного числа значений n. С другой стороны, множество S'', дополнительное к S' относительно S, равномощно множеству *несобственных* разложений рациональных чисел, равных дроби со знаменателем 2^n; поскольку эти числа составляют часть множества $\mathbf{Q}$, их множество *счетно*, а значит, счетно и множество S''. Так как S' бесконечно, то оно *равномощно* S (Теор. мн., Сводка результ., § 7, n° 9), и утверждение доказано.

Заметим теперь, что S *равномощно* $\mathfrak{P}(\mathbf{N})$; в самом деле, мы получим биективное отображение множества $\mathfrak{P}(\mathbf{N})$ на S, сопоставив каждому подмножеству X множества $\mathbf{N}$ последовательность (u_n), в которой $u_n = 0$ для $n \in X$ и $u_n = 1$ для $n \in \complement X$.

В итоге нами доказана следующая теорема:

Теорема 1 (Кантор). *Множество всех вещественных чисел равномощно множеству всех подмножеств счетно-бесконечного множества.*

Следствие. *Мощность множества всех вещественных чисел больше мощности счетного множества.*

Говорят, что множество, равномощное $\mathbf{R}$, *имеет мощность континуума*. В силу предложения 1 § 4 всякий *интервал*, не сводящийся к одной точке, имеет мощность континуума; точно так же дополнение всякого счетного множества в $\mathbf{R}$ имеет мощность континуума (Теор. мн., Сводка результ., § 7, n° 9), в частности, *множество всех иррациональных чисел имеет мощность континуума*.

Упражнения

1) Если x и y — вещественные числа, то

$$[x+y] = [x] + [y] + \varepsilon, \text{ где } \varepsilon \text{ равно } 0 \text{ или } 1,$$
$$[x-y] = [x] - [y] - \varepsilon, \text{ где } \varepsilon \text{ равно } 0 \text{ или } 1,$$
$$[x] + [x+y] + [y] \leqslant [2x] + [2y];$$
$$[x] + \left[x + \frac{1}{n}\right] + \ldots + \left[x + \frac{n-1}{n}\right] = [nx],$$
$$\left[\frac{[nx]}{n}\right] = [x]$$

для целых $n > 0$.

2) Пусть (ε_n) — строго убывающая последовательность конечных чисел >0, стремящаяся к 0, и $r_n(x)$ при любом $x \in \mathbf{R}$ означает кратное ε_n приближенное значение x с точностью до ε_n по недостатку. Для того чтобы последовательность $(r_n(x))$ при любом $x \in \mathbf{R}$ была возрастающей, необходимо и достаточно, чтобы каждое ε_n было целым кратным ε_{n+1}.

3) Пусть a — целое >1. Для того чтобы вещественное число x было рациональным, необходимо и достаточно, чтобы его разложение $x = p_0 + \sum_{n=0}^{\infty} u_n a^{-n}$ с основанием a было *периодическим*, т. е. существовали целые n_0 и $r > 0$ такие, что $u_{n+r} = u_n$ для всякого $n \geqslant n_0$.

*4) Пусть (u_n) — суммируемая в $\mathbf{R}$ последовательность чисел >0, удовлетворяющая следующим условиям: $u_{n+1} \leqslant u_n$ и $u_n \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} u_{n+k}$ для всех $n \geqslant 0$. Показать, что для любого числа a, удовлетворяющего неравенствам $0 < a \leqslant s = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$, существует подмножество I множества $\mathbf{N}$ такое, что $a = \sum_{n \in I} u_n$. Указанные условия выполняются, в частности, если $u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 2u_{n+1}$ для каждого n: случай двоичных разложений.

*5) Для каждого вещественного числа $x \in]0, 1]$ существует однозначно определенная возрастающая бесконечная последовательность (q_n), состоящая из целых чисел >0 и такая, что $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{q_1 q_2 \cdots q_n}$. Для того чтобы x было рациональным, необходимо и достаточно, чтобы $q_{n+1} = q_n$ для всех значений n, начиная с некоторого.

*6) Для каждого вещественного числа $x > 1$ существует однозначно определенная бесконечная последовательность (t_n), состоящая из целых чисел $\geqslant 1$, удовлетворяющих при любом $n \geqslant 1$ условию $t_{n+1} \geqslant t_n^2$, и такая, что $x = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{t_n}\right)$. [Использовать упражнение 19 § 7.] Для того чтобы x было рациональным, необходимо и достаточно, чтобы $t_{n+1} = t_n^2$ для всех значений n, начиная с некоторого. [Для доказательства необходимости условия показать, положив $x_n = \prod_{k=n+1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{t_k}\right)$, что знаменатели дробей $\frac{x_n}{x_n - 1}$ (взятых в несократимой форме) образуют убывающую последовательность.]

*°7) Пусть $(\varepsilon_n)_{n \geqslant 0}$ — последовательность чисел, равных $+1$ или -1; показать, что вещественное число

$$x_n = \varepsilon_0 \sqrt{2 + \varepsilon_1 \sqrt{2 + \varepsilon_2 \sqrt{2 + \ldots + \varepsilon_n \sqrt{2}}}}$$

существует и равно

$$2 \sin \left(\frac{\pi}{4} \sum_{k=0}^{n} \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_k}{2^k} \right).$$

Вывести отсюда, что $\lim\limits_{n \to \infty} x_n$ существует и что для любого вещественного числа x, удовлетворяющего условиям $-2 \leqslant x \leqslant 2$, существует последовательность (ε_n) указанного вида такая, что x равно пределу соответствующей последовательности (x_n). Для каких значений x последовательность (ε_n) единственна? Для каких значений x она периодична (см. упражнение 3)?$_\circ$

8) Показать, что не существует отличного от постоянной отображения ψ интервала $I \subset \mathbf{R}$ в множество $\mathbf{N}^{\mathbf{N}}$ всех последовательностей натуральных чисел, которое для каждого $x \in I$ обладало бы следующим свойством: каково бы ни было целое n, существует окрестность V точки x в I такая, что для любого $y \in V$ первые n членов последовательности $\psi(y)$ совпадают с первыми n членами последовательности $\psi(x)$. [Заметить, что это повлекло бы непрерывность ψ при наделении каждого из сомножителей $\mathbf{N}$ дискретной топологией, а $\mathbf{N}^{\mathbf{N}}$ — произведением этих топологий.]

9) Показать, что канторово множество K (§ 2, n° 5) совпадает с множеством всех вещественных чисел $x \in [0, 1]$, троичное разложение которых $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{3^n}$ (соотв. несобственное троичное разложение, если x есть начало интервала, смежного с K) таково, что все $u_n \neq 1$ (так что $u_n = 0$ или $u_n = 2$). Показать, что если положить тогда $v_n = u_n/2$ для каждого n и $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n 2^{-n}$, то f будет *сюръективным* непрерывным отображением K в $[0, 1]$; вывести отсюда, что K имеет мощность континуума.

*10) Пусть (d_n) — базисная последовательность, $a_n = \frac{d_n}{d_{n-1}}$ $(n \geqslant 1)$, (n_i) — строго возрастающая последовательность целых положительных чисел и (b_i) — последовательность целых чисел такая, что $0 < b_i < a_{n_i} - 1$ для всех i. Пусть, далее, G — множество тех точек $x \in [0, 1]$,

в разложении $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{d_n}$ которых или в несобственном разложении, если оно существует, $u_{n_i} \neq b_i$ для каждого $i \in \mathbf{N}$. Показать, что G — вполне несвязное совершенное множество и что если l — сумма длин смежных с G интервалов, содержащихся в $[0, 1]$, то $1 - l = \prod_{i=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{a_{n_i}}\right)$.

*11) Пусть E — отделимое топологическое пространство. Предположим, что для любой конечной последовательности s, члены которой равны 0 или 1, существует непустое множество $A(s) \subset E$, удовлетворяющее следующим условиям:

1° Если s состоит из n членов, а последовательности s' и s'' содержат $n+1$ членов (равных 0 или 1), первые n из которых совпадают с соответствующими членами последовательности s, то $A(s) = A(s') \cup A(s'')$; кроме того, $A(s_0) = E$ для пустой последовательности s_0.

2° Если для каждой бесконечной последовательности $(u_n)_{n \geq 0}$, члены которой равны 0 или 1, обозначить через s_n конечную последовательность $(u_k)_{0 \leq k \leq n}$, базис фильтра, образованный множествами $A(s_n)$, сходится к некоторой точке пространства E.

Показать, что при этих условиях существует непрерывное *сюръективное* отображение канторова множества K в E.

*12) Вывести из упражнения 11, что:

а) Для каждого компактного множества $A \subset \mathbf{R}$ существует непрерывное отображение канторова множества K на A. [Взять в качестве $A(s)$ пересечения с A надлежаще выбранных интервалов.]

б) Если, кроме того, A совершенно и вполне несвязно, то оно гомеоморфно K. [Применить тот же метод так, чтобы $A(s_1) \cap A(s_2) = \varnothing$, каковы бы ни были две различные последовательности s_1 и s_2 с одним и тем же числом членов (равных 0 или 1).]

*13) Пусть E — *не более чем счетное* отделимое топологическое пространство. Предположим, что для любой конечной последовательности s, члены которой равны 0 или 1, существует непустое множество $B(s) \subset E$, удовлетворяющее следующим условиям:

1° Если последовательность s состоит из n членов (равных 0 или 1), а последовательности s' и s'' содержат $n+1$ членов (равных 0 или 1), первые n из которых равны соответствующим членам последовательности s, то $B(s') \cup B(s'') = B(s)$ и $B(s') \cap B(s'') = \varnothing$; кроме того, если s_0 — пустая последовательность, то $B(s_0) = E$.

2° Каково бы ни было $x \in E$, если s_n означает (единственную) последовательность из n членов, равных 0 или 1, такую, что $x \in B(s_n)$, то базис фильтра, образованный множествами $B(s_n)$, сходится к x в E.

Показать, что при этих условиях *E гомеоморфно рациональной прямой* $\mathbf{Q}$. [Установить сначала, что E гомеоморфно счетному

подмножеству канторова множества K, плотному относительно K и не содержащему концов никакого смежного с K интервала. Для этого заметить, что сделанные предположения сопоставляют каждому $x \in E$ бесконечную последовательность $(u_n(x))$, члены которой равны 0 или 1; использовав счетность E, показать, что можно видоизменить биекцию $s \longmapsto B(s)$ так, чтобы $u_n(x)$ ни для какого $x \in E$ не образовывали стационарной последовательности. В заключение использовать упражнение 10 § 2.]

Вывести отсюда, что всякое счетное подпространство в $\mathbf{R}$, не имеющее изолированных точек, гомеоморфно $\mathbf{Q}$.

14) Показать, что всякое замкнутое множество в $\mathbf{R}$ не более чем счетно или имеет мощность континуума. [Использовать упражнение 12б этого параграфа, а также упражнение 17 § 9 главы I.]

15) Показать, что множество всех открытых множеств из $\mathbf{R}$ и множество всех вполне несвязных совершенных компактных множеств из $\mathbf{R}$ имеют мощность континуума.

16) а) Пусть A — не более чем счетное замкнутое множество в $\mathbf{R}$ и f — непрерывная числовая функция, определенная на $\mathbf{R}$. Если f постоянна на каждом из смежных с A интервалов, то она постоянна на $\mathbf{R}$. [Использовать теорему Больцано.]

б) Показать, что непрерывное отображение f канторова множества K в $[0, 1]$, определенное в упражнении 9, можно продолжить до непрерывной функции на $\mathbf{R}$, постоянной на каждом из смежных с K интервалов.

17) Пусть E — топологическое пространство, содержащее всюду плотное не более чем счетное множество. Показать, что множество всех непрерывных числовых функций на E имеет мощность континуума.

ИСТОРИЧЕСКИЙ ОЧЕРК

К ГЛАВЕ IV

(Римские цифры относятся к библиографии, помещенной в конце настоящего очерка.)

Всякое измерение величин предполагает смутное понятие вещественного числа (действительные основания чего будут выяснены в § 2 главы V). С математической точки зрения происхождение теории вещественных чисел следует вести от образования в вавилонской науке удачной системы нумерации, дающей (в принципе) возможность обозначать сколь угодно точные приближения любого вещественного числа (I). Владение такой системой и уверенность в числовых расчетах, которую это не могло не породить, действительно, неизбежно приводят к «наивному» понятию вещественного числа, ничем не отличающемуся от того, которое встречается и сегодня (в связи с десятичной системой) в элементарном обучении или у физиков и инженеров. Это понятие не поддается точному определению, но его можно выразить, сказав, что число считается заданным возможностью получать его приближенные значения и вводить их в вычисления; впрочем, это неизбежно связано с некоторой степенью несоответствия между мерами величин, данными в опыте, которые, конечно, не допускают неограниченного приближения, и «числами» вроде $\sqrt{2}$ (в предположении, что имеется алгорифм для их неограниченного приближения).

Подобная «прагматическая» точка зрения появляется поэтому во всех математических школах, в которых искусство вычислителя берет верх над заботой о строгости и теоретическими соображениями. Наоборот, именно последние являются доминирующими в греческой математике. Ей мы обязаны также первой строгой и связной теорией отношений величин, т. е. по существу вещественных чисел. Эта теория является завершением ряда относящихся к пропорциям и, в частности, к несоизмеримым отношениям открытий, значение которых в истории греческой мысли трудно переоценить, хотя из-за отсутствия точных текстов можно с трудом наметить лишь самые общие их черты. Греческая математика с самого возникновения неразрывно связана с отчасти научными, отчасти философскими и мистическими умозрениями о пропорциях, подобиях и отношениях, в частности о «простых отношениях»

(выражаемых дробями с малыми числителем и знаменателем); и одной из характерных тенденций пифагорейской школы было стремление все объяснять целыми числами и их отношениями. Но именно пифагорейская школа открыла несоизмеримость стороны квадрата с его диагональю (иррациональность $\sqrt{2}$) — несомненно, первый пример доказательства невозможности в математике; один факт постановки такого вопроса предполагает проведение четкого различия между отношением и его приближенными значениями и достаточно очерчивает глубокую пропасть, отделяющую греческих математиков от их предшественников *).

Мы плохо осведомлены о развитии идей, которое сопровождало это важное открытие и последовало за ним **). Мы ограничимся тем, что наметим в общих чертах главные идеи, лежащие в основе теории отношений величин; эта теория, построенная великим математиком Евдоксом (современником и другом Платона), была прочно воспринята классической греческой математикой и известна нам по Элементам Евклида (II), где она мастерски изложена (в Книге V этих Элементов):

1) Слово и понятие *число* строго удерживаются за целыми натуральными числами >1 (1 есть монада, а не число в собственном смысле слова), чем исключаются не только наши иррациональные числа, но даже то, что мы называем рациональными числами, которые для греческих математиков классической эпохи были отношениями чисел. Это отнюдь не просто вопрос терминологии, поскольку слово «число» было связано у греков (как и в нашу эпоху до недавнего прошлого) с идеей *системы с двойным законом композиции*

---

*) Открытие иррациональности $\sqrt{2}$ одни приписывают самому Пифагору, по-видимому без достаточного основания, другие — некоторым пифагорейцам V века; согласно свидетельству Платона в его «Теэтэте», Теодору Киренскому приписывается доказательство иррациональности $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ «*и так далее до* $\sqrt{17}$», после чего Теэтэт то ли получил общее доказательство для $\sqrt{N}$ (где N — целое, не являющееся точным квадратом), то ли, во всяком случае (если, что возможно, доказательство Теодора было по существу общим), провел классификацию некоторых типов иррациональностей. Неизвестно, были ли эти первые доказательства иррациональности проведены арифметическим или геометрическим путем. См. еще G. H. Hardy and E. M. Wright, An Introduction to the Theory of Numbers, Oxford, 1938, гл. IV; см. также Sir Th. Heath, A History of Greek Mathematics, 2 т., Oxford, 1921; H. Vogt, Entdeckung des Irrationalen..., Bibliotheca Mathematica (III) 10 (1909), стр. 97; H. Hasse und H. Scholz, Die Grundlagenkrise der griechischen Mathematik (Pan-Verlag), 1928.

**) В частности, см. по этому поводу статьи Бекера (O. Becker) и статьи Тэплица (O. Toeplitz), появившиеся в Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik (Abt. B, Studien), тт. 1—3, Berlin (Springer), 1931—1936, и, кроме того, сочинения, указанные в предыдущей сноске, а также статью B. L. van der Waerden, Zenon und die Grundlagenkrise..., Math. Ann., т. CXVII (1940), стр. 141.

(сложением и умножением). Отношения целых чисел понимались древнегреческими математиками как операторы, определенные на множестве всех целых чисел или его части (отношение p/q есть оператор, относящий числу N, *если оно кратно* q, целое число $p\cdot\frac{N}{q}$) и образующие мультипликативную группу, но не систему с двойным законом композиции. В этом греческие математики сознательно отмежевывались от «логистов» или профессиональных вычислителей, которые, так же как их предшественники египтяне и вавилоняне, не задумываясь рассматривали дроби или суммы целого и дроби как числа. Впрочем, это сужение идеи числа было вызвано, по-видимому, мотивами более философского, чем математического характера, и явилось результатом размышлений первых греческих философов о едином и множественном, в системе идей которых единица не могла быть разделена на части, не потеряв тем самым своего характера единицы *).

2) Теория величин строится аксиоматически и сразу для величин всех родов (имеются намеки на предшествовавшие теории, в которых, по-видимому, рассматривались отдельно длины, площади, объемы, времена и т. д.). Величины одного и того же рода характеризуются тем, что они допускают сравнение (т. е. предполагаются определенными равенство, представляющее собой, собственно говоря, эквивалентность, и отношения $>$ и $<$), их можно складывать и вычитать (определено $A+B$, а также $A-B$, если $A>B$) и они удовлетворяют так называемой «аксиоме Архимеда» (теорема 1 § 2). Последняя с самого начала с полной ясностью воспринималась как ключ ко всему зданию (она действительно неизбежна при любой аксиоматической характеризации вещественных чисел; см. гл. V, § 2). Имя Архимеда присвоено этой аксиоме по чистой случайности; сам Архимед во введении к своей «Квадратуре параболы» (III) подчеркивает, что эта аксиома использовалась его предшественниками, что она играет существенную роль в трудах Евдокса и что ее следствия не менее достоверны, чем определения площадей и объемов, выполненные без ее помощи **).

В главе V (§ 2) мы увидим, как из этих аксиоматических основ с необходимостью развертывается теория вещественных чисел. Отметим, что для Евдокса величины заданного рода образуют систему с *одним* внутренним законом композиции (сложением), но что эта система обладает *внешним* законом композиции, имеющим в качестве операторов *отношения величин*,

*) Платон (Республика, Книга VII, 525) насмехается над вычислителями, «*которые разменивают единицу на мелкую монету*», и говорит, что там, где они делят, ученые умножают; это означает, что, например, для математика равенство двух отношений $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ устанавливается не делением a на b и c на d, что вообще приводит к действиям с дробями (как и поступили бы египтяне и вавилоняне), но проверкой того, что $ad=bc$; и так же в других подобных случаях.

**) Явный намек на не дошедшую до нас полемику; представьте себе нашего современника, говорящего об аксиоме Цермело.

которые воспринимались как образующие коммутативную *мультипликативную группу*. Если A и A', равно как B и B',— величины одного и того же рода, то *отношения* A к A' и B к B' *по определению* равны, если, каковы бы ни были целые m и m', $mA < m'A'$ влечет $mB < m'B'$ и $mA > m'A'$ влечет $mB > m'B'$; аналогичными способами определяются неравенства между отношениями. То, что эти отношения образуют *область операторов* для величин любого рода, равносильно (явно не выраженной, но многократно использованной в изложении Евклида) аксиоме существования четвертой пропорциональной: для любых данных отношения A/A' и величины B' существует величина B того же рода, что и B', такая, что $B/B' = A/A'$. Так гениальная идея Евдокса позволила отождествить между собой области операторов, определенные для величин любого рода *); аналогичным образом можно отождествить множество отношений целых чисел (см. выше) с *частью* множества отношений величин, а именно с множеством рациональных отношений (отношений соизмеримых величин). Однако, поскольку эти отношения как операторы, применяемые к целым числам, определены (вообще говоря) лишь на части множества всех целых чисел, оказалось необходимым развить их теорию особо (Евклид, Книга VII).

Так построенная универсальная область операторов была тем самым для греческих математиков эквивалентом того, чем для нас является множество всех вещественных чисел; при этом ясно, что со *сложением* величин и *умножением* отношений величин они обладали эквивалентом того, чем для нас является *поле* вещественных чисел, хотя и в гораздо менее удобной форме **). С другой стороны, можно задаться вопросом, осознавались ли ими

---

*) Она позволила, таким образом, делать со всей строгостью то, что не задумываясь делали первые греческие математики, когда они считали какую-либо теорему о пропорциях доказанной, как только она доказана для всех рациональных отношений. По-видимому, до Евдокса делались попытки построить теорию, которая бы достигла той же цели путем определения отношения A/A' двух величин тем, что мы называем на современном языке членами цепной дроби, выражающей это отношение; по поводу этих попыток, к которым естественно приводил названный «евклидовым» алгорифм для отыскания общей меры A и A', если она существует (или для нахождения наибольшего общего делителя), см. отмеченные выше статьи Бекера (сноска **) на стр. 226).

**) Настолько менее удобной, что для того, чтобы перевести на свой язык алгебраическую науку вавилонян, греческим математикам пришлось систематически пользоваться средством совсем другого порядка, а именно соответствием между двумя длинами и площадью прямоугольника, построенного на этих двух длинах как на сторонах, что, собственно, не является законом композиции и не дает возможности удобно записывать алгебраические соотношения степени выше второй.

Отметим еще, что во всем этом изложении мы полностью отвлеклись от вопроса об отрицательных числах, отсылая по этому поводу к Историческому очерку, приложенному к главе I Алгебры.

эти множества (множества величин заданного рода или множество отношений величин) как *полные* в нашем смысле; иначе неясно, почему они допускали (не испытывая даже потребности сделать это аксиомой) существование четвертой пропорциональной; более того, некоторые тексты, по-видимому, ссылаются на идеи подобного рода; наконец, несомненно считалось очевидным, что кривая, которая может быть описана непрерывным движением, не может перейти с одной стороны прямой на другую, не пересекши эту прямую,— принцип, который они использовали, например, в своих исследованиях по удвоению куба (построение $\sqrt[3]{2}$ посредством пересечения кривых) и который, по существу, равносилен свойству, о котором идет речь; между тем тексты, которыми мы располагаем, не позволяют узнать с полной точностью их идеи на этот счет.

Таково состояние теории вещественных чисел в классическую эпоху греческой математики. При всем восхищении, вызываемом построением Евдокса, не оставляющим желать ничего лучшего в отношении строгости и стройности, следует признать, что ему недоставало гибкости и оно было мало подходящим для развития вычислительной техники и особенно алгебраического исчисления. Кроме того, оно могло казаться логически необходимым только умам, влюбленным в строгость и искушенным в абстракции; естественно поэтому, что на закате греческой математики мы видим постепенное возрождение «наивной» точки зрения, сохранявшейся в традиции логистов. Именно она доминирует у Диофанта (IV), бывшего в значительно большей степени продолжателем этой традиции, чем официальной греческой науки; воспроизводя для формы евклидово определение числа, он на самом деле под словом «число» понимает неизвестное алгебраических задач, решение которых может быть как целым, так и дробным или даже иррациональным числом *). Хотя это изменение отношения к понятию числа связано с одним из самых важных достижений в истории математики, а именно развитием алгебры, само по себе оно, конечно, представляло не прогресс, а скорее шаг назад.

Мы не имеем возможности проследить здесь превратности, которые претерпела идея числа в индийской, арабской и западной математике вплоть до конца средних веков: преобладающим было «наивное» понятие числа; и хотя основой математического образования в течение всего этого периода служили Элементы Евклида, весьма вероятно, что учение Евклида оставалось, как правило, непонятым, поскольку оно уже не представлялось больше необходимым. «Отношения» Евклида чаще всего именовались «числами»; к ним применяли правила действий над целыми числами и, получая так точные результаты, не пытались доискиваться причин успеха этих способов.

---

*) «*Это „число" оказывается не рациональным*», Диофант, Книга IV, задача IX. Об этом возврате к наивному понятию числа см. также у Евтоксия в его «Комментариях к Архимеду» ((III), т. III, стр. 120—126 2-го изд. = = стр. 140—148 1-го изд.).

Между тем уже в середине XVI века Р. Бомбелли изложил на этот счет в своей Алгебре (V) *) точку зрения, которая (если считать усвоенными результаты V Книги Евклида), по существу, корректна; принимая, что, как только выбрана единица длины, устанавливается взаимно однозначное соответствие между длинами и отношениями величин, он определяет различные алгебраические операции над длинами (считая, конечно, единицу фиксированной) и, представляя числа длинами, получает геометрическое определение поля вещественных чисел (точка зрения, которую чаще всего ставят в заслугу Декарту) и дает таким образом своей Алгебре прочную геометрическую основу **).

Однако Алгебра Бомбелли, хотя и поразительно опередившая свое время, не шла далее извлечения корней и решения в радикалах уравнений второй, третьей и четвертой степеней; разумеется, возможность извлечения корней принималась им без обсуждения. Симон Стевин (VI) также смотрит на число с аналогичной точки зрения; оно обозначает для него меру величины, и он рассматривает его как существенно «непрерывное» (без уточнения смысла, придаваемого им этому слову). Если он и различает «геометрические числа» и «арифметические числа», то лишь по случайному способу их определения, без того, чтобы видеть здесь различие по существу; вот, впрочем, его последнее слово по этому поводу: «*Итак, мы заключаем, что нет никаких чисел абсурдных, иррациональных, неправильных, невыразимых или глухих, но что среди чисел царит такое совершенство и согласие, что мы имеем основание размышлять ночь и день об их удивительной законченности*» (VI, стр. 10). С другой стороны, создав впервые из инструмента десятичных дробей вычислительный метод и предложив для них обозначение, уже близкое к нашему, он отчетливо понимал, что эти дроби доставляют алгорифм неограниченного приближения к любому вещественному числу, как это явствует из его *Appendice algebraique* 1594 г., «*содержащего общее правило для всех уравнений*» (брошюра, единственный известный экземпляр которой сгорел в 1914 г. в Лувене; см., однако, (VI), т. I, стр. 88). Записав такое уравнение в виде $P(x) = Q(x)$ (где P — полином, степень которого выше степени полинома Q, и $P(0) < Q(0)$), подставляем вместо x числа 10, 100, 1000, . . . до тех пор, пока не получим $P(x) > Q(x)$, чем, говорит он, определится число цифр корня; далее (если, например, оказалось, что корень имеет две цифры) подставляем 10, 20, . . ., чем определится число десятков, и далее так же для последовательных десятичных знаков: «*И продолжая так неограниченно*,— говорит он,— *мы приблизимся к требуемому с неограниченно*

*) Здесь идет речь о Книге IV этой Алгебры, которая оставалась неизданной вплоть до наших дней; для наших целей не важно, были ли идеи Бомбелли известны его современникам или нет.

**) Мы не вдаемся здесь в историю употребления отрицательных чисел, которая относится к Алгебре. Отметим все же, что Бомбелли там же дает совершенно отчетливо чисто формальное определение (какое можно было бы найти в курсе современной алгебры) не только отрицательных величин, но и комплексных чисел.

большой точностью» (VI, стр. 88). Как видим, Стевин (несомненно первый) имел отчетливое представление о теореме 2 § 6 и усматривал в ней основное средство систематического решения числовых уравнений; вместе с тем мы видим у него столь ясное интуитивное представление о числовом континууме, что оставалось сделать совсем немногое для его окончательного уточнения.

Однако в два последовавших века окончательное установление корректных методов дважды задерживалось развитием двух теорий, истории которых мы здесь касаться не будем: исчисления бесконечно малых и теории рядов. В спорах, поднятых в связи с этими теориями, как и во все эпохи истории математики, наблюдается постоянное балансирование между исследователями, занятыми тем, чтобы идти вперед, хотя бы ценой некоторой неуверенности, в убеждении, что впоследствии всегда найдется время для освоения завоеванных территорий, и критическими умами (не обязательно в чем-либо уступавшими первым в отношении интуитивных способностей и творческого дарования), не считавшими потерей труда посвятить некоторые усилия точному выражению и строгому обоснованию своих концепций. В XVII веке главным объектом дебатов является понятие бесконечно малой величины, которое, будучи оправдано апостериори полученными с его помощью результатами, казалось находящимся в явном противоречии с аксиомой Архимеда; и мы видим, что наиболее просвещенные умы этого времени усваивают в конце концов точку зрения, мало чем отличающуюся от точки зрения Бомбелли, причем главное различие состояло в большем внимании с их стороны к строгим методам древних; Исаак Барроу (учитель Ньютона, и сам принявший важное участие в создании исчисления бесконечно малых) дает блестящее изложение этих методов в своих *Лекциях по математике*, прочитанных в Кембридже в 1664—1666 гг. (VII); признавая необходимость вернуться к теории Евдокса для того, чтобы вновь обрести в вопросе о числе вошедшую в поговорку «геометрическую достоверность», он длительное время весьма здраво защищает эту теорию (которая, по его свидетельству, казалась непонятной многим его современникам) от тех, кто обвинял ее в неясности и даже абсурдности. С другой стороны, определяя числа как символы, обозначающие отношения величин и способные комбинироваться друг с другом по правилам арифметических операций, он получает поле вещественных чисел в терминах, которых придерживается затем Ньютон в своей *Арифметике* и в которых его последователям до Дедекинда и Кантора не пришлось ничего изменять.

Но как раз к этому времени появляется метод разложения в ряды, который скоро в руках закоренелых алгебраистов приобретает исключительно формальный характер и отвлекает внимание математиков от вопросов сходимости, поднимаемых разумным использованием рядов в области вещественных чисел. Ньютон, главный создатель метода, еще понимал необходимость рассмотрения этих вопросов, и хотя он не в достаточной степени выяснил их, все же по крайней мере заметил, что введенные им степенные ряды для малых значений аргумента чаще всего сходятся по меньшей мере столь же хорошо, как и геометрическая прогрессия (сходимость которой была

известна уже древним) (VIII); к тому же времени Лейбниц подметил, что знакочередующийся ряд, члены которого убывают по абсолютной величине и стремятся к 0, сходится; век спустя, в 1768 г., Даламбер выражает сомнения по поводу употребления расходящихся рядов. Но благодаря авторитету Бернулли и особенно Эйлера эти сомнения были в то время исключительным явлением.

Ясно, что математики, которым часто приходилось пользоваться рядами для числовых расчетов, никогда не пренебрегали подобным образом понятием сходимости; и не случайно, что первым, кто в этой области, как и во многих других, стал инициатором возвращения к корректным методам, оказался математик, с ранней молодости любивший числовые расчеты: К. Ф. Гаусс, который почти ребенком применил алгорифм среднего арифметико-геометрического *), не мог бы обойтись без превращения предела в отчетливое понятие; и мы видим, как он в одном фрагменте, датированном 1800 г. (но опубликованном только в наше время) (IX, т. X^1, стр. 390), точно определяет, с одной стороны, верхнюю и нижнюю грани и, с другой,— верхний и нижний пределы последовательности вещественных чисел. Существование первых (для ограниченной последовательности), по-видимому, допускалось как очевидное, а вторые корректно определены как пределы $\sup\limits_{p\geqslant 0} u_{n+p}$ и $\inf\limits_{p\geqslant 0} u_{n+p}$ при n, стремящемся к $+\infty$. С другой стороны, Гаусс в своем мемуаре о гипергеометрическом ряде, опубликованном в 1812 г. (IX, т. III, стр. 139), дает также первый образец исследования сходимости, проведенного, как он говорит, *«со всей строгостью и выполненного так, чтобы удовлетворить тех, кто отдает предпочтение строгим методам древних геометров»*; правда, это исследование, играющее в мемуаре второстепенную роль, не касается основных принципов теории рядов; они были впервые установлены Коши в его *Курсе анализа* 1821 г. (X) во всех отношениях корректным способом, отправляющимся от критерия Коши, сформулированного четким образом и допущенного как очевидный; так как в том, что касается определения числа, Коши придерживался точки зрения Барроу и Ньютона, то можно сказать, что для него вещественные числа определялись аксиомами величин и критерием Коши, что и в самом деле достаточно для их определения (см. гл. V, § 2).

К этому же времени окончательно выясняется другой важный аспект теории вещественных чисел. Как уже было сказано, всегда считалось геометрически очевидным, что две непрерывные линии не могут переходить одна через другую, не пересекаясь,— принцип, который (будучи надлежащим образом уточнен) в свою очередь равносилен свойству прямой быть полным

---

*) При заданных $x_0, y_0 > 0$ пусть $x_{n+1} = \dfrac{x_n + y_n}{2}$, $y_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}$; когда n стремится к $+\infty$, x_n и y_n стремятся (весьма быстро) к общему пределу, называемому средним арифметико-геометрическим чисел x_0 и y_0 (§ 5, упражнение 16); эта функция тесно связана с эллиптическими функциями и явилась отправным пунктом для относящихся к ним важных исследований Гаусса.

пространством. Он лежит также в основе данного Гауссом в 1799 г. «строгого» доказательства теоремы Даламбера, согласно которой всякий полином с вещественными коэффициентами имеет вещественный или комплексный корень (IX, т. III, стр. 1); доказательство той же теоремы, данное Гауссом в 1815 г. (IX, т. III, стр. 31), опирается, как и более ранняя попытка Лагранжа, на аналогичный, но более простой принцип, согласно которому полином не может изменить знак, не обратившись в нуль; это — частный случай теоремы 2 § 6, как мы видели, уже использованный Стевином. В 1817 г. Больцано дает, отправляясь от критерия Коши, полное доказательство этого последнего принципа, который он получает как частный случай аналогичной теоремы для непрерывных числовых функций числовой переменной (XI). Отчетливо сформулировав (до Коши) «критерий Коши», он пытается обосновать его рассуждением, которое, за отсутствием какого бы то ни было арифметического определения вещественного числа, не было и не могло быть ничем, кроме порочного круга; но раз только этот пункт принят, его работа вполне корректна и весьма замечательна, содержа не только современное определение непрерывной функции (данное здесь впервые) с доказательством непрерывности полиномов, но даже доказательство существования нижней грани *произвольного* ограниченного множества вещественных чисел (он говорит не о множествах, но, что сводится к тому же, о свойствах вещественных чисел). С другой стороны, Коши в своем *Курсе анализа* (X), определив непрерывные функции одной или нескольких числовых переменных, тоже доказывает, что непрерывная функция одной переменной не может изменить знака, не обратившись в нуль; и это делается с помощью такого же рассуждения, как у Симона Стевина, которое, разумеется, становится корректным (раз уже определена непрерывность), как только на помощь привлекается критерий Коши (или допущен, как поступает в этом месте Коши, равносильный ему принцип «вложенных интервалов», лишь частным случаем которого является, очевидно, сходимость бесконечных десятичных дробей).

По достижении этого пункта математикам оставалось лишь уточнять и развивать полученные результаты, исправляя некоторые ошибки и заполняя некоторые пробелы. Например, Коши одно время считал, что сходящийся ряд, членами которого являются непрерывные функции одной переменной, имеет в качестве суммы непрерывную функцию; исправление, внесенное в этот пункт Абелем в его важных работах о рядах (XII, т. I, стр. 219; см. также т. II, стр. 257 и след.), привело в конце концов Вейерштрасса к выяснению в его (неопубликованных, но имевших значительное влияние) лекциях понятия равномерной сходимости (см. Исторический очерк к главе X). С другой стороны, Коши в одном из данных им доказательств существования корней полинома допустил без достаточного обоснования существование минимума непрерывной функции; и снова ясность в вопросы такого рода внес Вейерштрасс, доказав в своих лекциях теорему 1 § 6 для функций числовых переменных, определенных на ограниченных замкнутых интервалах; именно его критика необоснованного применения этой теоремы

к множествам функций (наиболее известным примером чего является «принцип Дирихле») положила начало развитию идей, приведшему, как мы видели в Историческом очерке к главе I, к общему определению компактных пространств и данной нами современной формулировке теоремы.

В то же время Вейерштрасс в своих лекциях осознает логический интерес, представляемый полным отделением идеи вещественного числа от теории величин; в самом деле, использование последней сводится к аксиоматическому определению множества точек прямой (т. е. в конечном счете множества вещественных чисел) и допущению существования такого множества; хотя этот способ действий по существу корректен, очевидно, предпочтительнее отправляться от одних рациональных чисел и получить из них вещественные числа путем пополнения *). Это сделали, различными методами и независимо друг от друга, Вейерштрасс, Дедекинд, Мере и Кантор; в то время как предложенный Дедекиндом (XIII) способ «сечений» весьма близок к определениям Евдокса, другие предложенные методы близки к изложенному в настоящем трактате. В это же время Кантор начинает развивать теорию множеств вещественных чисел, впервые задуманную Дедекиндом (см. библиографию к гл. I), и получает таким образом основные элементарные результаты, относящиеся к топологии прямой, строению открытых и замкнутых множеств, понятиям производного множества, вполне несвязного совершенного множества и т. д.; вместе с тем он получает теорему 1 § 8 о мощности континуума и тотчас выводит из нее, что континуум несчетен, что множество трансцендентных чисел имеет мощность континуума, а также (результат — для того времени парадоксальный) что множество точек плоскости (или пространства) имеет ту же мощность, что и множество точек прямой.

С Кантором вопросы, изучаемые в настоящей главе, приняли, за немногими исключениями, свою окончательную форму; отсылая к Историческому очерку к главе I по поводу непосредственных откликов на его творение, отметим коротко, в каких направлениях оно было продолжено. Помимо работ по общей топологии (см. гл. I) и приложений к вопросам интегрирования, которые будут подробным образом рассмотрены в другом месте, речь идет прежде всего об исследованиях, относящихся к строению и классификации множеств точек на прямой и числовых функций вещественных пере-

---

*) В самом деле, таким образом вопрос о существовании, т. е., выражаясь современным языком, непротиворечивости теории вещественных чисел сводится к аналогичному вопросу для рациональных чисел, *однако при условии, что теория абстрактных множеств предположена известной* (поскольку пополнение опирается на понятие произвольного подмножества бесконечного множества); другими словами, все сводится к этой последней теории, поскольку теорию рациональных чисел можно из нее вывести (см. Теор. мн., гл. III, § 4 и Алг., гл. I, § 9). Напротив, если не предполагать, что теория абстрактных множеств в нашем распоряжении, то непротиворечивость теории вещественных чисел невозможно свести к непротиворечивости арифметики и снова становится необходимым дать этой теории независимую аксиоматическую характеризацию.

менных; они ведут начало от работ Бореля (XIV), которые ориентированы преимущественно на теорию меры, но среди прочего приводят к определению «борелевских множеств», совокупность которых образует минимальное семейство множеств из R, содержащее интервалы и замкнутое относительно *счетных* объединений и пересечений и операции C (см. гл. IX, 2-е изд., § 6, n° 3). С этими множествами тесно связаны так называемые «борелевские» или «бэровские» функции, т. е. функции, которые могут быть получены исходя из непрерывных функций «трансфинитным» повторением операции перехода к пределу последовательности; они были определены Бэром в ходе важных исследований, где он полностью оставляет точку зрения меры и переходит к систематическому рассмотрению качественного и «топологического» аспектов этих вопросов (XV); именно в связи с этим он первый определяет и изучает полунепрерывные функции и в целях охарактеризования функций, являющихся пределами непрерывных, вводит важное понятие «множества первой категории», которое мы будем изучать в главе IX. Что касается многочисленных работ, последовавших за работами Бэра и обязанных главным образом русской и особенно польской школам, то мы можем здесь только отметить их существование (см., например, (XVI) и журнал *Fundamenta Mathematicae*)

БИБЛИОГРАФИЯ

(I) O. Neugebauer, Vorlesungen über Geschichte der antiken Mathematik, Bd. I: Vorgriechische Mathematik, Berlin (Springer), 1934. [О. Нейгебауер, Лекции по истории античных математических наук, т. I: Догреческая математика, ОНТИ, М.— Л., 1937.]

(II) Euclidis Elementa, 5 тт., изд. J. L. Heiberg, Lipsiae (Teubner), 1883—1888. [Начала Евклида, Гостехиздат, М.— Л., 1948—1950.]

(II bis) T. L. Heath, The thirteen books of Euclid's Elements. . ., 3 тт., Cambridge, 1908.

(III) Archimedis Opera Omnia, 3 тт., изд. J. L. Heiberg, 2-е изд., 1913—1915. [Архимед, Сочинения, Физматгиз, Москва, 1962.]

(III bis) Les Œuvres complètes d'Archimède, пер. P. Ver Eecke, Paris — Bruxelles (Desclée-de Brouwer), 1921.

(IV) Diophanti Alexandrini Opera Omnia. . ., 2 тт., изд. P. Tannery, Lipsiae (Teubner), 1893—1895.

(IV bis) Diophante d'Alexandrie, пер. P. Ver Eecke, Bruges (Desclée-de Brouwer), 1926.

(V) R. Bombelli, L'Algebra, изд. E. Bortolotti, Bologna (Zanichelli), 1929.

(VI) Les ŒUVRES Mathématiques de SIMON STEVIN de Bruges, Ou ſont inſérées les MEMOIRES MATHEMATIQUES, Eſquelles s'eſt exercé le Tres-haut & Tres-illustre Prince MAURICE DE NASSAU, Prince d'Aurenge, Gouverneur des Provinces des Païs-bas unis, General par Mer & par Terre, &c., *Le tout reveu, corrigé, et augmenté* par ALBERT GIRARD Samielois, Mathematicien, A LEYDE, Chez Bonaventure & Abraham Elsevier, Imprimeurs ordinaires de l'Université, Anno CIƆ IƆ CXXXIV (=1634), vol. I.

(VII) I. Barrow, Mathematical Works, Cambridge (University Press), 1860.

(VIII) I. Newton, De Analysi per aequatione numero terminorum infinitas, in Commercium Epistolicum D. Johannis Collins et aliorum de Analysi promota, Londini, 1712. [Исаак Ньютон, Математические работы, М.— Л., 1937, Анализ с помощью уравнений с бесконечным числом членов (стр. 3—24).]

(IX) C. F. G a u s s, Werke, т. III (Göttingen, 1876) и X^1 (ibid., 1917).

(X) A. C a u c h y, Cours d'Analyse de l'Ecole Royale Polytechnique, 1re partie, 1821 = Œuvres (II), т. III, Paris (Gauthier-Villars), 1897.

(XI) B. B o l z a n o, Rein Analytischer Beweis des Lehrsatzes, dass zwischen je zwei Werthen, die ein entgegengesetzes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel liegt, Ostwald's Klassiker, n° 153, Leipzig, 1905. [Русск. перевод дан в виде Приложения 1 к книге: Э. К о л ь м а н, Бернард Больцано, Изд. АН СССР, М., 1955.]

(XII) N. H. A b e l, Œuvres, 2 тт., изд. Силовым и Ли, Christiania, 1881.

(XIII) R. D e d e k i n d, Gesammelte mathematische Werke, т. II, Braunschweig (Vieweg), 1932, стр. 315.

(XIV) E. B o r e l, Leçons sur la théorie des fonctions, 2-е изд., Paris (Gauthier-Villars), 1914.

(XV) R. B a i r e, Leçons sur les fonctions discontinues, Paris (Gauthier-Villars), 1905. [Р. Б э р, Теория разрывных функций, ГТТИ, М.— Л., 1932.]

(XVI) N. L u s i n, Leçons sur les ensembles analitiques et leurs applications, Paris (Gauthier-Villars), 1930. [Н. Н. Л у з и н, Лекции об аналитических множествах и их прило [illegible], [illegible] М., 1953.]

ГЛАВА V

ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ ГРУППЫ

§ 1. Подгруппы и факторгруппы группы $\mathbf{R}$

1. Замкнутые подгруппы группы $\mathbf{R}$

Предложение 1. *Всякая замкнутая подгруппа аддитивной группы* $\mathbf{R}$, *отличная от* $\mathbf{R}$ *и от* $\{0\}$, *есть дискретная группа вида* $a\mathbf{Z}$, *где* $a > 0$ (другими словами, образована целыми кратными числа a).

Покажем сначала, что всякая недискретная подгруппа группы $\mathbf{R}$ всюду плотна. Если подгруппа G группы $\mathbf{R}$ не дискретна, то для любого $\varepsilon > 0$ существует точка $x \neq 0$ из G, принадлежащая интервалу $[-\varepsilon, +\varepsilon]$; так как всякое целое кратное числа x принадлежит G, то любой интервал длины $> \varepsilon$ содержит такое кратное; это и означает, что G всюду плотна в $\mathbf{R}$.

Всякая отличная от $\mathbf{R}$ замкнутая подгруппа является поэтому дискретной. Остается показать, что всякая дискретная подгруппа G группы $\mathbf{R}$, не сводящаяся к $\{0\}$, имеет вид $a\mathbf{Z}$, где $a > 0$. Но из равенства $-G = G$ следует, что множество H элементов > 0, принадлежащих G, не пусто. Пусть $b \in H$; пересечение интервала $[0, b]$ с G есть *дискретное компактное* и потому *конечное* множество. Пусть a — наименьший из элементов множества H, содержащихся в $[0, b]$. Для каждого $x \in G$ положим $m = \left[\frac{x}{a}\right]$ (целой части числа $\frac{x}{a}$); тогда $x - ma \in G$ и $0 \leqslant x - ma < a$; по определению числа a имеем $x - ma = 0$, чем и доказано, что $G = a\mathbf{Z}$.

2. *Факторгруппы группы* R

Всякая *отделимая* факторгруппа группы $\mathbf{R}$ имеет вид $\mathbf{R}/H$, где H — некоторая *замкнутая* подгруппа группы $\mathbf{R}$ (гл. III, § 2, предложение 18); таким образом, согласно предложению 1 имеем:

Предложение 2. *Отделимые факторгруппы группы* $\mathbf{R}$, *не сводящиеся к нейтральному элементу, суть группы* $\mathbf{R}/a\mathbf{Z}$ $(a \geqslant 0)$.

Если a и b — числа > 0, то автоморфизм $x \longmapsto \frac{b}{a}x$ группы $\mathbf{R}$ преобразует $a\mathbf{Z}$ в $b\mathbf{Z}$; следовательно (гл. III, § 2, n° 8, замечание 3), факторгруппы $\mathbf{R}/a\mathbf{Z}$ и $\mathbf{R}/b\mathbf{Z}$ изоморфны; другими словами:

Предложение 3. *Всякая отделимая факторгруппа группы* $\mathbf{R}$, *отличная от* $\mathbf{R}$ *и не сводящаяся к нейтральному элементу, изоморфна группе* $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$.

Определение 1. *Топологическая группа* $\mathbf{R}/a\mathbf{Z}$ $(a > 0)$ *называется аддитивной группой вещественных чисел, приведенных по модулю* a. *Топологическая группа* $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ *обозначается* $\mathbf{T}$; *рассматриваемое как топологическое пространство*, $\mathbf{T}$ *называется одномерным тором* (допуская вольность речи, «одномерным тором» называют также *топологическую группу* $\mathbf{T}$).

Замечания. 1) Отношение $x \equiv y \pmod{a\mathbf{Z}}$ записывают чаще в виде $x \equiv y \pmod{a}$ или просто $x \equiv y \ (a)$ и читают «x и y сравнимы по модулю a»; оно означает, таким образом, что $x - y$ есть *целое кратное* числа a. Если a — целое, то это отношение индуцирует в $\mathbf{Z}$ отношение эквивалентности, являющееся не чем иным, как сравнимостью по модулю a (Алг., гл. I, § 4, n° 3), чем и оправдывается предыдущее обозначение.

°2) Как мы увидим в главе VI, § 2, n° 4, топологическое пространство $\mathbf{T}$ гомеоморфно *окружности* $x^2 + y^2 = 1$ на числовой плоскости $\mathbf{R}^2$; произведение $\mathbf{T}^2$ гомеоморфно *тору вращения* в $\mathbf{R}^3$ (гл. VII, § 1, упражнение 15); отсюда и название «одномерный тор», применяемое для наименования $\mathbf{T}$ (в главе VII, § 1 мы точно так же называем $\mathbf{T}^n$ «n-мерным тором»).$_\circ$

Предложение 4. *Тор* $\mathbf{T}$ *есть пространство, гомеоморфное факторпространству произвольного замкнутого интервала* $[a, a+1]$ *числовой прямой* $\mathbf{R}$, *полученному путем отождествления концов этого интервала; оно компактно, связно и локально связно.*

В самом деле, всякое $x \in \mathbf{R}$ сравнимо (mod 1) с числом из интервала $[a, a+1]$, а именно с $x - [x - a]$; поэтому $\mathbf{T}$ есть образ этого интервала при каноническом отображении φ пространства $\mathbf{R}$ на $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$, а следовательно, компактно и связно (гл. I, § 9, теорема 2 и § 11, предложение 4). С другой стороны, два различных элемента интервала $[a, a+1]$ могут быть сравнимы (mod 1) только когда они являются его концами; в силу компактности $\mathbf{T}$ заключаем отсюда, что $\mathbf{T}$ гомеоморфно факторпространству интервала $[a, a+1]$, полученному путем отождествления его концов (гл. I, § 9, следствие 4 теоремы 2 и § 10, предложение 8). Наконец, так как $\mathbf{Z}$ — дискретная подгруппа группы $\mathbf{R}$, то $\mathbf{T} = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ *локально изоморфно* $\mathbf{R}$ (гл. III, § 2, предложение 19) и, в частности, локально связно (что является также следствием предложения 12 § 11 главы I).

Замечание. Заметим, что сужение канонического отображения φ пространства $\mathbf{R}$ на $\mathbf{T} = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ на полуоткрытый интервал $[a, a+1[$ есть *непрерывное биективное* отображение этого интервала на $\mathbf{T}$; обратное к нему отображение *непрерывно* во всех точках пространства $\mathbf{T}$, отличных от $\varphi(a)$, и *разрывно* в точке $\varphi(a)$. Иногда пространство $\mathbf{T}$ отождествляют с интервалом $[a, a+1[$, наделенным прообразом топологии пространства $\mathbf{T}$ относительно отображения φ (гл. I, § 1, n° 3); эта топология, конечно, отлична от топологии, индуцируемой в $[a, a+1[$ топологией пространства $\mathbf{R}$.

3. Непрерывные представления группы R в себя

Предложение 5. *Всякое непрерывное представление f топологической группы $\mathbf{R}$ в себя имеет вид $x \mapsto ax$, где $a \in \mathbf{R}$; оно является автоморфизмом группы $\mathbf{R}$, если $a \neq 0$.*

В самом деле, для всякого $x \in \mathbf{R}$ и всякого целого $p \in \mathbf{Z}$ имеем $f(px) = pf(x)$; заменяя x на $\frac{1}{p}x$, где $p \neq 0$, получаем $f\left(\frac{1}{p}x\right) = \frac{1}{p}f(x)$; следовательно, при любых целых p и $q \neq 0$ имеем $f\left(\frac{p}{q}x\right) = \frac{p}{q}f(x)$; иначе говоря, $f(rx) = rf(x)$ для всякого рационального числа r. Если теперь t — произвольное вещественное число, то в силу непрерывности f на $\mathbf{R}$ имеем

$$f(tx) = \lim_{r \to t,\, r \in \mathbf{Q}} f(rx) = \lim_{r \to t,\, r \in \mathbf{Q}} rf(x) = \left(\lim_{r \to t,\, r \in \mathbf{Q}} r\right) \cdot f(x) = tf(x).$$

В частности, полагая $a = f(1)$, получаем $f(t) = at$, и предложение доказано.

Таким образом, *группа автоморфизмов* топологической группы **R** изоморфна *мультипликативной группе* $\mathbf{R}^*$ ненулевых вещественных чисел.

Следствие. *Пусть G — топологическая группа, изоморфная группе* **R**; *тогда для любого $a \in G$ существует, и притом единственное, непрерывное представление f_a группы* **R** *в G такое, что $f_a(1) = a$; если a отлично от нейтрального элемента группы G, то это представление есть изоморфизм* **R** *на G.*

4. *Локальное определение непрерывного представления группы* R *в топологическую группу*

Пусть даны группа G и *порождающее* ее множество $A \subset G$; ясно, что если два представления f, g группы G в группу G' имеют одинаковые значения в каждой точке из A, то они равны. Но представление f группы G в G', вообще говоря, не может быть задано на A произвольно; если G и G' — группы с мультипликативно записываемой операцией, то значения f на A должны удовлетворять условию $f(xy) = f(x) f(y)$, какова бы ни была пара (x, y) такая, что $x \in A$, $y \in A$ и $xy \in A$; впрочем, это необходимое условие не является в общем случае достаточным.

В частности, *локальный изоморфизм* топологической группы G в топологическую группу G' не всегда может быть продолжен до представления (непрерывного или нет) G в G'. Например, локальный изоморфизм f группы **T** в **R** не может быть продолжен до представления **T** в **R**: в самом деле, пусть f определен в окрестности V нуля; существует целое $p > 0$ такое, что класс $x \pmod{\mathbf{Z}}$ числа $\frac{1}{p}$ принадлежит V; так как x является в **T** элементом порядка p, то его образ при всяком представлении **T** в **R** необходимо равен 0 и, следовательно, не совпадает с $f(x)$.

Топологическая группа **R** обладает в этом отношении следующим свойством:

Предложение 6. *Пусть I — интервал числовой прямой* **R**, *содержащий 0, но не сводящийся к этой точке; пусть f — непрерывное отображение I в топологическую группу G* (с мультипли-

кативно записываемой операцией) *такое, что* $f(x+y)=f(x)f(y)$ *для всякой пары точек* x, y *таких, что* $x\in I$, $y\in I$ *и* $x+y\in I$. *Тогда существует, и притом единственное, непрерывное представление группы* $\mathbf{R}$ *в* G, *продолжающее* f.

Единственность такого продолжения (если оно существует) следует из предшествующих замечаний, поскольку I порождает группу $\mathbf{R}$; остается доказать его существование.

Пусть n — целое >0; если $x\in I$ и $nx\in I$, то $f(nx)=(f(x))^n$, как устанавливается индукцией по n, если заметить, что $mx\in I$ для всех целых m таких, что $1\leqslant m\leqslant n$. Положим $J=\bigcup\limits_{n\in\mathbf{N}} nI$; J есть прямая $\mathbf{R}$, либо один из интервалов $[0, +\infty[$ или $]-\infty, 0]$, смотря по тому, находится ли 0 внутри I или нет; если $x\in J$, то $\frac{x}{n}\in I$ для всех достаточно больших целых $n>0$. Пусть $x\in J$ и m, n — целые числа >0 такие, что $\frac{x}{n}\in I$ и $\frac{x}{m}\in I$; тогда $\frac{x}{mn}\in I$, а потому $f\left(\frac{x}{m}\right)=\left(f\left(\frac{x}{mn}\right)\right)^n$ и $f\left(\frac{x}{n}\right)=\left(f\left(\frac{x}{mn}\right)\right)^m$; иначе говоря, элемент $\left(f\left(\frac{x}{n}\right)\right)^n$ группы G один и тот же для всех целых $n>0$, удовлетворяющих условию $\frac{x}{n}\in I$. Обозначим этот элемент через $f_1(x)$; f_1 есть отображение J в G, совпадающее с f на I и потому непрерывное в точке 0 (относительно J). Пусть x, y — два элемента из J, n — целое >0 столь большое, что $\frac{x}{n}\in I$, $\frac{y}{n}\in I$ и $\frac{x+y}{n}\in I$; тогда

$$f\left(\frac{x+y}{n}\right)=f\left(\frac{x}{n}\right)f\left(\frac{y}{n}\right)=f\left(\frac{y}{n}\right)f\left(\frac{x}{n}\right),$$

чем доказано, что $f\left(\frac{x}{n}\right)$ и $f\left(\frac{y}{n}\right)$ перестановочны; по определению f_1 имеем поэтому $f_1(x+y)=f_1(x)f_1(y)$. Если $J=\mathbf{R}$, то предложение доказано. В противном случае предположим, например, что $J=[0, +\infty[$; для каждого $x<0$ положим $f_1(x)=(f_1(-x))^{-1}$. Равенство $f_1(x+y)=f_1(x)f_1(y)$ остается тогда в силе для любых $x\in\mathbf{R}$, $y\in\mathbf{R}$: при $x<0$ и $y<0$ это непосредственно ясно; при $x\geqslant 0$, $y<0$, $x+y\geqslant 0$ имеем $f_1(x)=f_1(x+y)f_1(-y)$, откуда следует утверждаемое свойство; то же при $x\geqslant 0$, $y<0$, $x+y<0$, ибо тогда $f_1(-y)=f_1(-x-y)f_1(x)$; при $x<0$ и $y\geqslant 0$ доказательства анало-

гичны. Таким образом, мы видим, что f_1 есть представление $\mathbf{R}$ в G; следовательно, $f_1(0) = e$ (нейтральному элементу группы G), и так как f_1 непрерывно относительно J, то оно имеет в точке 0 предел справа, равный e; так как $f_1(-x) = (f_1(x))^{-1}$, то f_1 имеет в точке 0 также предел слева, равный e; следовательно, f_1 непрерывно в точке 0, чем доказательство и завершается.

Следствие. *Пусть f — локальный изоморфизм $\mathbf{R}$ в топологическую группу G; существует, и притом единственный, гомоморфизм группы $\mathbf{R}$ на открытую подгруппу группы G, совпадающий с f во всех точках некоторой окрестности нуля.*

В самом деле, пусть $\overline{f}$ — непрерывное представление $\mathbf{R}$ в G, совпадающее с f во всех точках открытого интервала I, содержащего 0 и содержащегося в множестве, на котором определено f; по предположению $\overline{f}(\mathbf{R})$ содержит окрестность нейтрального элемента группы G и потому (гл. III, § 2, следствие предложения 4) является открытой подгруппой группы G; кроме того, по предложению 24 § 2 главы III, $\overline{f}$ есть строгий морфизм $\mathbf{R}$ на $\overline{f}(\mathbf{R})$.

Предложение 7. *Всякая связная группа G, локально изоморфная $\mathbf{R}$, изоморфна $\mathbf{R}$ или $\mathbf{T}$.*

В самом деле, локальный изоморфизм $\mathbf{R}$ в G продолжается до строгого морфизма $\mathbf{R}$ на открытую подгруппу группы G (следствие предложения 6) и, значит, на саму группу G, поскольку она связна. Отсюда следует, что G изоморфна некоторой факторгруппе группы $\mathbf{R}$; поскольку (будучи локально изоморфной $\mathbf{R}$) G отделима и не сводится к нейтральному элементу, она изоморфна $\mathbf{R}$ или $\mathbf{T}$ согласно предложению 3.

Упражнения

1) °а) Пусть f — непрерывное представление аддитивной группы $\mathbf{R}$ в себя. Показать, что если его график не плотен в $\mathbf{R}^2$, то f имеет вид $x \longmapsto ax$. [Рассмотреть в $\mathbf{R}^2$ замыкание графика f и использовать теорему о строении замкнутых подгрупп в $\mathbf{R}^2$ (гл. VII, § 1, теорема 2).]° [Сравнить с упражнением 12б § 1 главы VI и упражнением 2 § 6 главы IV.]

б) Если график f плотен в $\mathbf{R}^2$, то прообраз топологии пространства $\mathbf{R}^2$ относительно отображения $x \longmapsto (x, f(x))$ согласуется со структурой группы в $\mathbf{R}$ и сильнее обычной топологии в $\mathbf{R}$. Если, кроме того, f инъективно, то прообраз обычной топологии пространства $\mathbf{R}$

относительно f согласуется со структурой группы в $\mathbf{R}$ и не сравним с обычной топологией в $\mathbf{R}$.

*2) Пусть $\mathscr{T}$ — отделимая топология в $\mathbf{R}$, согласующаяся со структурой группы в $\mathbf{R}$ и *более слабая*, чем обычная топология $\mathscr{T}_0$ в $\mathbf{R}$.

а) Показать, что всякая открытая окрестность нуля для $\mathscr{T}$ не ограниченна в $\mathbf{R}$. [Заметить, что отделимая топология, мажорируемая топологией компактного пространства, необходимо совпадает с последней.]

б) Пусть $V \neq \mathbf{R}$ — симметричная открытая окрестность нуля для $\mathscr{T}$, а W — такая симметричная открытая окрестность нуля для $\mathscr{T}$, что $W + W \subset V$. Показать, что если a есть длина связной компоненты множества V (относительно $\mathscr{T}_0$), содержащей 0, то всякая связная компонента множества W (относительно $\mathscr{T}_0$) имеет длину $\leqslant a$. Кроме того, множество длин связных компонент внутренности множества $\mathbf{R} - W$ (относительно $\mathscr{T}_0$) ограниченно. [Использовать а) и существование симметричной открытой окрестности W_1 нуля для $\mathscr{T}$ такой, что $W_1 + W_1 \subset W$.]

в) Вывести из б), что $\mathbf{R}$ *предкомпактно* в топологии $\mathscr{T}$, но не локально компактно.

г) Показать также, что $\mathbf{Z}$ предкомпактно, но не локально компактно во всякой недискретной топологии $\mathscr{T}$, согласующейся со структурой группы.

д) Пусть f — непрерывное представление подгруппы Γ группы $\mathbf{R}$, не сводящейся к 0 (и наделенной топологией, индуцируемой топологией $\mathscr{T}_0$), в полную отделимую группу G. Показать, что если f не есть изоморфизм группы Γ на подгруппу $f(\Gamma)$ группы G, то $f(\Gamma)$ относительно компактно в G. [Использовать в) и г).]

е) °Для любого целого $n \geqslant 2$ дать примеры таких инъективных непрерывных представлений f группы $\mathbf{R}$ в $\mathbf{T}^n$, чтобы $f(\mathbf{R})$ было плотно в $\mathbf{T}^n$. [См. гл. VII, § 1, следствие 1 предложения 7.]$_\circ$

3) Показать, что группа $\mathbf{T}$ алгебраически изоморфна произведению $\mathbf{R} \times (\mathbf{Q}/\mathbf{Z})$. [Взять в $\mathbf{R}$ надлежащий базис Хамеля.] Вывести отсюда, что в $\mathbf{R}$ имеется отделимая топология, согласующаяся со структурой группы, не сравнимая с обычной топологией и такая, что $\mathbf{R}$ в ней предкомпактно.

§ 2. Измерение величин

Мы видели (см. Исторический очерк к главе IV), что в основе понятия вещественного числа лежит проблема *измерения величин*; точнее говоря, величины различного рода, изучение которых становилось постепенно все более важным по причинам практического или теоретического характера, рассматривались сначала раздельно; а возможность измерять их все одной и той же системой чисел стала экспериментальным фактом задолго до того, как

у греческих математиков родилась дерзкая идея сделать ее объектом строгого доказательства. В созданной ими аксиоматической теории идея величины связывалась с законом композиции («сложением» величин одного и того же рода) и отношением порядка (отношением «A меньше B», называемым отношением сравнения величин). Мы рассмотрим теперь ту же проблему, т. е. будем разыскивать условия, которым должны были бы удовлетворять закон внутренней композиции и отношение порядка в множестве E для того, чтобы оно было *изоморфно* множеству $E' \subset \mathbf{R}$, наделенному структурой, индуцированной сложением и отношением $\leqslant$ из $\mathbf{R}$. Так как коммутативность заданного в E закона композиции априори не предполагается, то мы будем записывать его в мультипликативных обозначениях; за исключением этого, мы ни в чем не отклонимся от классических рассуждений, относящихся к измерению величин.

Пусть E — множество, *совершенно упорядоченное* отношением порядка, обозначаемым $x \leqslant y$, и имеющее наименьший элемент ω. Пусть I — подмножество множества E такое, что $\omega \in I$ и из $x \in I$, $y \leqslant x$ следует $y \in I$; предположим, что в E задан закон композиции $(x, y) \mapsto xy$ так, что композиция xy определена для всех пар элементов из I (причем xy принадлежит E, но не обязательно I; см. Алг., гл. I, § 1, n° 1). Сделаем, кроме того, следующие предположения:

($\mathrm{GR_I}$) ω *есть нейтральный элемент* ($\omega x = x\omega = x$ для любого $x \in I$), *и закон композиции ассоциативен* (в следующем смысле: если $x \in I$, $y \in I$, $z \in I$, $xy \in I$ и $yz \in I$, то $x(yz) = (xy)z$).

($\mathrm{GR_{II}}$) *Отношение $x < y$ между элементами из I влечет для всех $z \in I$ отношения $xz < yz$ и $zx < zy$.*

($\mathrm{GR_{III}}$) *Множество всех элементов $> \omega$ из I не пусто и не имеет наименьшего элемента, и каковы бы ни были элементы $x, y \in I$ такие, что $x < y$, существует $z > \omega$, для которого $xz \leqslant y$.*

Условие ($\mathrm{GR_{II}}$) влечет возможность почленного перемножения неравенств, связывающих элементы из I: если $x < y$ и $x' < y'$, то $xx' < yy'$ (ибо $xx' < yx'$ и $yx' < yy'$). В частности, $y < yx$ для всех $x > \omega$ ($x \in I$, $y \in I$).

Для каждой заданной конечной последовательности $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ элементов из I можно индукцией по p определить композицию $\prod_{i=1}^{p} x_i$ как $\left(\prod_{i=1}^{p-1} x_i\right) x_p$, коль скоро композиция $\prod_{i=1}^{p-1} x_i$ уже определена и принадлежит I; если композиция $\prod_{i=1}^{p} x_i$ определена, то тем самым определена и принадлежит I каждая из композиций $\prod_{i=1}^{q} x_i$ $(2 \leqslant q \leqslant p-1)$. В частности, взяв все x_i равными одному и тому же элементу $x \in I$, видим, что если x^p определено, то x^q определено и принадлежит I для всех q таких, что $2 \leqslant q \leqslant p-1$; по условию считаем $x^0 = \omega$ для каждого $x \in I$. Согласно $(\mathrm{GR_{II}})$, если $x > \omega$ и x^p определено, то $\omega < x^q < x^p$ для всех q таких, что $1 \leqslant q \leqslant p-1$; если $x < y$ и y^p определено, то, как убеждаемся индукцией по p, x^p определено и $x^p < y^p$. С другой стороны, условие ассоциативности $(\mathrm{GR_I})$ влечет, как снова показывает индукция по n, что если x^{m+n} определено, то определено и $x^m x^n$, причем $x^{m+n} = x^m x^n$. Обратно, в силу $(\mathrm{GR_I})$ и $(\mathrm{GR_{II}})$, если $x^m x^n$ определено и принадлежит I, то x^{m+n} определено и $x^{m+n} = x^m x^n$: и в этом убеждаемся индукцией по n; в самом деле, так как $x^{n-1} \leqslant x^n$, то $x^m x^{n-1}$ определено и принадлежит I; по предположению индукции $x^m x^{n-1} = x^{m+n-1} \in I$, а потому $(x^{m+n-1})\, x = x^{m+n}$ определено и равно $x^m x^n$ согласно предыдущему результату. Точно так же индукцией по n убеждаемся в том, что если x^{mn} определено, то и $(x^m)^n$ определено и $x^{mn} = (x^m)^n$; обратно, если $(x^m)^n$ определено и принадлежит I, то x^{mn} определено и равно $(x^m)^n$.

Наконец, аксиома $(\mathrm{GR_{III}})$ влечет, что для всех $x \in I$ таких, что $x > \omega$, существует $y > \omega$ такое, что $y^2 \leqslant x$. В самом деле, если $x > \omega$, то существуют $z > \omega$ такое, что $z < x$, и $t > \omega$ такое, что $zt \leqslant x$; за y принимаем меньший из элементов z, t. Индукцией по n заключаем отсюда, что существует $u > \omega$, для которого $u^{2^n} \leqslant x$.

Введем теперь следующее допущение:

$(\mathrm{GR_{IV}})$ («Аксиома Архимеда») *Каковы бы ни были $x \in I$ и $y \in I$, где $x > \omega$, существует целое $n > 0$ такое, что x^n определено и $x^n > y$.*

Если за E принять множество вещественных чисел $\geqslant 0$, содержащее 0 и произвольно малые числа > 0, за I — пересечение E с интервалом из $\mathbf{R}$, имеющим своим началом 0 и не сводящимся к одной точке, а за закон композиции — сложение двух чисел из I, и если предположить, что $x + y \in E$, когда $x \in I$ и $y \in I$, то ясно, что аксиомы (GR_{I}), (GR_{II}), (GR_{III}) и (GR_{IV}) будут выполнены *). Обратно:

Предложение 1. *Пусть E — совершенно упорядоченное множество, имеющее наименьший элемент ω; пусть I — подмножество множества E, содержащее ω и такое, что из $x \in I$, $y \leqslant x$ следует $y \in I$; пусть $(x, y) \mapsto xy$ — закон композиции в E, определенный для всех $x \in I$, $y \in I$. Если тогда выполнены аксиомы (GR_{I}), (GR_{II}), (GR_{III}) и (GR_{IV}), то существует строго возрастающее отображение f множества I в множество $\mathbf{R}_{+}$ вещественных чисел $\geqslant 0$ такое, что*

$$f(xy) = f(x) + f(y),$$

коль скоро $x \in I$, $y \in I$ и $xy \in I$; кроме того, пересечение образа $f(I)$ со всяким интервалом $[0, f(b)] \subset \mathbf{R}$, где b — любой элемент из I, плотно в этом интервале.

Для любых двух данных элементов x, y из I, где $y \neq \omega$, обозначим через $(x : y)$ наибольшее из целых чисел $n \geqslant 0$ таких, что y^n определено и $\leqslant x$ **); это целое число существует в силу аксиомы (GR_{IV}); если $(x : y) = p$, то y^{p+1} определено и $> x$. Если $x \in I$, $y \in I$ и $xy \in I$, то

$$(x : z) + (y : z) \leqslant (xy : z) \leqslant (x : z) + (y : z) + 1. \qquad (1)$$

*) В множествах «величин», встречающихся в экспериментальных науках, аксиомы (GR_{I}) и (GR_{II}), вообще говоря, допускают экспериментальную проверку, по крайней мере с известным приближением. Напротив, аксиома (GR_{III}), постулирующая существование «сколь угодно малых» величин, очевидно, не может быть обоснована тем же способом; она представляет собой чисто *априорное* требование. Что касается аксиомы (GR_{IV}), то она может быть рассматриваема как «экстраполяция» факта, экспериментально проверяемого для величин, не «слишком малых».

**) Если $E = I$ есть множество всех натуральных чисел и законом композиции является сложение, то $(x : y)$ есть не что иное, как целая часть дроби $\frac{x}{y}$ или, как говорят еще, «приближение отношения x к y по недостатку с точностью до единицы».

В самом деле, пусть $(x:z)=p$, $(y:z)=q$; тогда $z^p \leqslant x$, $z^q \leqslant y$; так как $xy \in I$, то $z^p z^q$ определено и принадлежит I, так что z^{p+q} определено и $z^{p+q}=z^p z^q \leqslant xy$; кроме того, если z^{p+q+2} определено, то $z^{p+q+2} > xy$, ибо $z^{p+1} > x$ и $z^{q+1} > y$.

Докажем теперь неравенства

$$\left.\begin{aligned} &(x:y)(y:z) \leqslant (x:z), \\ &((x:y)+1)((y:z)+1) \geqslant (x:z)+1. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Пусть $(x:y)=p$ и $(y:z)=q$; тогда $y^p \leqslant x$ и $z^q \leqslant y$, так что $(z^q)^p$ определено и $\leqslant x$, а тем самым принадлежит I, и, значит, z^{pq} определено, причем $z^{pq}=(z^q)^p \leqslant x$; отсюда и следует первое неравенство. С другой стороны, если $z^{(p+1)(q+1)}$ определено, то $z^{(p+1)(q+1)} > x$, ибо $y^{p+1} > x$ и $z^{q+1} > y$; отсюда — второе неравенство.

Обозначим через $\mathfrak{F}$ фильтр сечений упорядоченного множества элементов $> \omega$ из I, фильтрующегося по отношению $\geqslant$; интервалы $]\omega, z]$, где z пробегает множество элементов $>\omega$, образуют базис фильтра $\mathfrak{F}$. Покажем, что для любых элементов a и x из I, где $a > \omega$, отношение $\frac{(x:z)}{(a:z)}$, которое определено для $z \leqslant a$ и является рациональным числом >0, есть функция от z, имеющая *предел* по фильтру $\mathfrak{F}$. При $x=\omega$ это очевидно, ибо тогда $(x:z)=0$, каково бы ни было z. Пусть $x > \omega$; покажем, что образ $\mathfrak{G}$ фильтра $\mathfrak{F}$ при отображении $z \mapsto \frac{(x:z)}{(a:z)}$ (рассматриваемом на множестве тех $z > \omega$, которые $\leqslant x$ и $\leqslant a$) является базисом фильтра Коши для равномерной структуры *мультипликативной* группы $\mathbf{R}_+^*$ и, следовательно, сходится к некоторому вещественному числу >0. В самом деле, заметим сначала, что $(u:z)$ при любом заданном $u > \omega$ имеет предел $+\infty$ по фильтру $\mathfrak{F}$, ибо существует $z > \omega$ такое, что $z^{2^n} \leqslant u$, откуда $(u:z) \geqslant 2^n > n$. Пусть теперь дано произвольное число $\varepsilon > 0$; существует $t > \omega$ такое, что $(x:t) \geqslant \frac{1}{\varepsilon}$ и $(a:t) \geqslant \frac{1}{\varepsilon}$; напишем двойное неравенство

$$\frac{(x:t)}{(a:t)+1} \cdot \frac{(t:z)}{(t:z)+1} \leqslant \frac{(x:z)}{(a:z)} \leqslant \frac{(x:t)+1}{(a:t)} \cdot \frac{(t:z)+1}{(t:z)},$$

непосредственно вытекающее из неравенств (2). Существует $z_0 > \omega$ такое, что $z \leqslant z_0$ влечет $(t:z) \geqslant \frac{1}{\varepsilon}$ и, следовательно,

$$\frac{1}{(1+\varepsilon)^2} \frac{(x:t)}{(a:t)} \leqslant \frac{(x:z)}{(a:z)} \leqslant (1+\varepsilon)^2 \frac{(x:t)}{(a:t)},$$

чем доказано, что $\mathfrak{S}$ есть базис фильтра Коши для мультипликативной равномерной структуры.

Фиксируем отныне элемент $a > \omega$ («единицу измерения») и положим для всех $x \in I$

$$f(x) = \lim_{\mathfrak{F}} \frac{(x:z)}{(a:z)}.$$

Согласно предшествующему, $f(\omega) = 0$, $f(x) > 0$ при $x > \omega$ и $f(a) = 1$. Деля неравенства (1) на $(a:z)$ и переходя к пределу по фильтру $\mathfrak{F}$, видим, что $f(xy) = f(x) + f(y)$, когда $x \in I$, $y \in I$ и $xy \in I$. Точно так же из $x \leqslant y$ следует $(x:z) \leqslant (y:z)$, откуда, деля на $(a:z)$ и переходя к пределу, получаем $f(x) \leqslant \leqslant f(y)$, т. е. f *возрастает* на I. Отсюда следует, что f *строго возрастает* на I; в самом деле, если $x < y$, то существует $z > \omega$ такое, что $xz \leqslant y$, откуда $f(xz) \leqslant f(y)$, и так как $xz \in I$, то $f(x) + f(z) = f(xz) \leqslant f(y)$; но $f(z) > 0$, следовательно, $f(x) < f(y)$.

Наконец, пересечение $f(I)$ с интервалом $[0, f(b)] \subset \mathbf{R}$ плотно в этом интервале для каждого $b \in I$; в самом деле, для любого целого $n > 0$ существует $x > \omega$ такое, что $f(x) \leqslant 2^{-n}$: достаточно взять x так, чтобы $x^{2^n} \leqslant a$; обозначая через p наименьшее целое такое, что $x^{p+1} > b$, имеем $(p+1) f(x) > f(b)$ и $qf(x) \leqslant f(b)$, если $1 \leqslant q \leqslant p$; поэтому всякий интервал длины $> 2^{-n}$, содержащийся в $[0, f(b)]$, содержит по крайней мере одну точку вида $qf(x) = f(x^q) \in f(I)$. Тем самым предложение 1 полностью доказано.

Замечания. 1) Если $x \in I$, $y \in I$, $xy \in I$, $yx \in I$, то $f(xy) = f(x) + f(y) = f(yx)$ и, следовательно, $xy = yx$, поскольку f строго возрастает; иначе говоря, заданный в E закон композиции индуцирует в надлежаще выбранном интервале $[0, b]$ (где b взято, например, так, чтобы $b^2 \leqslant a$) *коммутативный* закон.

2) Всякое отображение g множества I в $\mathbf{R}_+$, удовлетворяющее тем же условиям, что и f, имеет вид $x \longmapsto \lambda f(x)$, где $\lambda > 0$. В самом деле, пусть $\lambda = g(a) > 0$; в силу предположения, отношения

$z^p \leqslant x \leqslant z^{p+1}$, $z^q \leqslant a \leqslant z^{q+1}$ влекут

$$pg(z) \leqslant g(x) \leqslant (p+1)\,g(z), \quad qg(z) \leqslant g(a) \leqslant (q+1)\,g(z),$$

откуда

$$\lambda \frac{(x:z)}{(a:z)+1} \leqslant g(x) \leqslant \lambda \frac{(x:z)+1}{(a:z)};$$

переходя к пределу по фильтру $\mathfrak{F}$, получаем $g(x) = \lambda f(x)$.

Выясним, при каких условиях $f(I)$ есть *интервал* в $\mathbf{R}_+$. Очевидно, имеем два необходимых условия:

($\mathrm{GR_{IIIa}}$) *Множество всех элементов* $>\omega$ *из* I *не пусто и не имеет наименьшего элемента, и, каковы бы ни были элементы* x, $y \in I$ *такие, что* $x < y$, *существует* $z \in I$ *такое, что* $xz = y$ («вычитание» величин).

($\mathrm{GR_{IVa}}$) *Всякая возрастающая последовательность элементов из* I, *мажорируемая элементом из* I, *имеет в* I *верхнюю грань.*

Докажем, что эти условия достаточны и, кроме того, избавляют от постулирования аксиомы ($\mathrm{GR_{IV}}$) (аксиомы Архимеда). Точно говоря, мы докажем следующее предложение:

Предложение 2. *Если совершенно упорядоченное множество* E *и его подмножество* I *удовлетворяют аксиомам* ($\mathrm{GR_I}$), ($\mathrm{GR_{II}}$), ($\mathrm{GR_{IIIa}}$) *и* ($\mathrm{GR_{IVa}}$), *то существует строго возрастающее отображение* f *множества* I *на интервал числовой прямой* $\mathbf{R}$ *с началом* 0, *такое, что* $f(\omega) = 0$ *и* $f(xy) = f(x) + f(y)$, *коль скоро* x, y *и* xy *принадлежат* I.

Покажем сначала, что выполнена аксиома ($\mathrm{GR_{IV}}$). Будем рассуждать от противного: предположим, что $x \in I$, $y \in I$ и $x > \omega$, а x^n определено и $\leqslant y$ для всякого целого $n > 0$; согласно ($\mathrm{GR_{IVa}}$) возрастающая последовательность (x^n) имеет верхнюю грань $b \in I$. Так как $x < b$, то согласно ($\mathrm{GR_{IIIa}}$) существует $c \in I$ такое, что $xc = b$; при этом $c < b$, поскольку $x > \omega$. Но, каково бы ни было n, $x^{n+1} \leqslant b = xc$, откуда в силу ($\mathrm{GR_{II}}$) $x^n \leqslant c$; таким образом, верхняя грань b последовательности (x^n) должна быть $\leqslant c$, и мы пришли к противоречию.

Итак, все условия применимости предложения 1 выполнены. Остается показать, что если $\gamma = f(c)$ $(c > \omega)$ — любой элемент

из $f(I)$ и β — вещественное число такое, что $0 < \beta < \gamma$, то существует $b \in I$ такое, что $f(b) = \beta$ (гл. IV, § 2, предложение 1). Но так как пересечение $f(I)$ с интервалом $[0, \gamma]$ плотно в этом интервале, то в I существует возрастающая последовательность элементов (x_n) такая, что $f(x_n)$ имеет пределом β. Пусть b — верхняя грань последовательности (x_n) в I. Так как $f(b) \geqslant f(x_n)$ для всех n, то $f(b) \geqslant \beta$; но неравенство $f(b) > \beta$ невозможно, ибо тогда существовало бы $y \in I$ такое, что $\beta < f(y) < f(b)$, и так как β есть верхняя грань последовательности $(f(x_n))$, то мы имели бы $f(x_n) < f(y) < f(b)$ при любом n, откуда $x_n < y < b$ при любом n, что абсурдно. Таким образом, $f(b) = \beta$, и предложение 2 доказано.

Замечание. Если $I = E$, то образом $f(I) = f(E)$ служит всё $\mathbf{R}_+$; в самом деле, b^n для $b > \omega$ определено при любом n, и, следовательно, $nf(b)$ принадлежит $f(E)$, каково бы ни было n; а отсюда следует, что $f(E)$ не ограниченно, поскольку $f(b) > 0$.

Упражнения

1) Пусть E — совершенно упорядоченное множество, имеющее наименьший элемент ω, и I — интервал в E с началом ω, содержащий ω. Предположим, что E и I удовлетворяют аксиомам $(\mathrm{GR_I})$, $(\mathrm{GR_{II}})$, $(\mathrm{GR_{IV}})$ и следующей аксиоме:

$(\mathrm{GR_{III б}})$ Множество всех элементов $>\omega$ из I не пусто, и для любого $x > \omega$ из I существует $y > \omega$ в I такое, что $y^2 \leqslant x$.

Показать, что существует такое возрастающее отображение f интервала I в $\mathbf{R}$, что $f(\omega) = 0$ и $f(xy) = f(x) + f(y)$, коль скоро $x \in I$, $y \in I$ и $xy \in I$; кроме того, $f(I) \cap [0, f(b)]$ плотно в $[0, f(b)]$ для каждого $b \in I$.

2) Пусть G — совершенно упорядоченная некоммутативная группа, не сводящаяся к нейтральному элементу (например, мультипликативная группа K^* некоммутативного упорядоченного тела K; см. Алг., гл. VI, § 1, упражнение 1 и § 2, упражнение 23). Рассмотрим в произведении $\mathbf{R}_+ \times G$ множество E, состоящее из пары $(0, e)$ (где e — нейтральный элемент группы G) и пар (x, y), где x пробегает множество всех вещественных чисел >0, а y — группу G. Введем в E закон композиции $(x, y)(x', y') = (x + x', yy')$ и упорядочим E лексикографически (считая $(x, y) < (x', y')$, если $x < x'$ или если $x = x'$ и $y < y'$). Приняв $I = E$, показать, что аксиомы $(\mathrm{GR_I})$, $(\mathrm{GR_{II}})$, $(\mathrm{GR_{III б}})$ (упражнение 1) и $(\mathrm{GR_{IV}})$ будут выполнены, но никакое возрастающее отображение f множества E в $\mathbf{R}_+$ такое, что $f(zz') = f(z) + f(z')$ для всех z, z' из E, не будет строго возрастающим.

§ 3. Топологическая характеризация групп R и T

Теорема 1. *Топологическая группа G, в которой существует окрестность нейтрального элемента, гомеоморфная открытому интервалу числовой прямой* **R**, *локально изоморфна группе* **R**.

Эта теорема интересна тем, что она позволяет на основании чисто топологического свойства группы G заключить о свойстве *структуры группы* в G.

Здесь мы имеем дело с феноменом, свойственным именно группе **R** и не имеющим аналога для групп $\mathbf{R}^n$ при $n > 1$ (см. гл. VIII, § 1, n° 4). Группы, локально изоморфные **R**, иногда называют *однопараметрическими группами.*

Доказательство теоремы 1 мы сведем к предложению 2 § 2. По предположению существует гомеоморфизм φ открытой окрестности U нейтрального элемента e группы G на открытый интервал числовой прямой **R**. Посредством отображения, обратного к φ, в U можно перенести из интервала $\varphi(U)$ структуру совершенно упорядоченного множества; топология в U (индуцированная топологией группы G) будет тогда иметь своим базисом множество всех открытых интервалов из U (гл. IV, § 1, предложение 5). Можно найти *симметричную* окрестность V элемента e, являющуюся открытым интервалом и такую, что $VV \subset U$; в самом деле, существует открытый интервал V', содержащий e и такой, что $V'V' \subset U \cap U^{-1}$, $V'V'^{-1} \subset U$ и $V'^{-1}V' \subset U$; тогда $V = V' \cup V'^{-1}$ открыто, симметрично, удовлетворяет условию $VV \subset U$ и связно, а потому является интервалом (гл. IV, § 2, теорема 4).

Покажем, что если x, y, z принадлежат V, то $x < y$ влечет $xz < yz$ и $zx < zy$; в самом деле, функции $f_1(z) = \varphi(yz) - \varphi(xz)$ и $f_2(z) = \varphi(zy) - \varphi(zx)$ непрерывны на V, >0 при $z = e$ и при $z \in V$ не обращаются в 0 (ибо, например, из $\varphi(yz) = \varphi(xz)$ следовало бы, что $yz = xz$ и потому $y = x$). Так как $f_1(V)$ и $f_2(V)$ связны (гл. I, § 11, предложение 4) и тем самым являются в **R** интервалами (гл. IV, § 2, теорема 4) и так как эти интервалы содержат число >0, но не содержат 0, то они содержатся в $\mathbf{R}_+^*$; иначе говоря, $f_1(z) > 0$ и $f_2(z) > 0$, каково бы ни было $z \in V$.

Если x и y — элементы из V такие, что $x \geqslant e$, $y \geqslant e$, то, в частности, $xy \geqslant e$. Обозначим через E (совершенно упорядоченное)

множество тех элементов из U, которые $\geqslant e$, и через I — множество тех элементов из V, которые $\geqslant e$. Аксиомы (GR_I), (GR_{II}), (GR_{IIIa}) и (GR_{IVa}) будут тогда выполнены (если за ω принять элемент e, а за закон композиции — закон композиции, заданный в группе G); для (GR_I), (GR_{II}) и (GR_{IVa}) это явствует из предыдущего, а для (GR_{IIIa}) достаточно заметить, что если $e < x < y$ ($x \in V$, $y \in V$), то $x^{-1} \in V$, а потому $x^{-1} < e < x^{-1}y$ и $x^{-1}y < y$; следовательно, $z = x^{-1}y$ принадлежит I и при этом $xz = y$. Тем самым согласно предложению 2 § 2 существует строго возрастающее отображение f множества I на интервал в $\mathbf{R}_+$ с началом 0 такое, что $f(e) = 0$ и $f(xy) = f(x) + f(y)$, коль скоро x, y и xy принадлежат I (что, в частности, имеет место, когда x и y принадлежат $W \cap I$, где W есть окрестность e такая, что $WW \subset V$).

Для всякого элемента $x \in V$, не принадлежащего I, имеем $x < e$ и потому $x^{-1} > e$; следовательно, f продолжается до *строго возрастающего* отображения $\overline{f}$ множества V *на* интервал числовой прямой $\mathbf{R}$, если положить $\overline{f}(x) = -f(x^{-1})$ для каждого $x < e$ из V. Так как прообраз открытого интервала, содержащегося в $\overline{f}(V)$, относительно $\overline{f}$ есть открытый интервал в V, то $\overline{f}$ непрерывно на V; обратно, образ открытого интервала из V при отображении $\overline{f}$ есть открытый интервал в $\overline{f}(V)$; тем самым $\overline{f}$ есть *гомеоморфизм* V на некоторую окрестность нуля группы $\mathbf{R}$. С другой стороны, легко убедиться (путем рассмотрения различных возможных случаев, как в предложении 6 § 1), что $\overline{f}(xy) = \overline{f}(x) + \overline{f}(y)$, когда x, y и xy принадлежат V; отсюда заключаем, что сужение $\overline{f}$ на надлежащую окрестность элемента e в G является локальным изоморфизмом G в $\mathbf{R}$ (гл. III, § 1, предложение 3), что и требовалось доказать.

Теорема 2. *Связная группа G, в которой существует окрестность нейтрального элемента, гомеоморфная открытому интервалу числовой прямой* $\mathbf{R}$, *изоморфна* $\mathbf{R}$ *или* $\mathbf{T}$.

Это — непосредственное следствие предыдущей теоремы и предложения 7 § 1.

Замечания. 1) Если дана группа G, удовлетворяющая условиям теоремы 2, то для того, чтобы установить, изоморфна ли она $\mathbf{T}$ или $\mathbf{R}$, достаточно выяснить, компактна она или нет.

2) Теорема 2 показывает, в частности, что всякая топологическая группа, *гомеоморфная* группе **R**, необходимо *изоморфна* ей.

3) В полученной топологической характеризации групп **R** и **T** участвует в качестве вспомогательного множества топологическое пространство **R**. Можно охарактеризовать структуры топологических групп **R** и **T** аксиомами, не вводящими никакого вспомогательного множества (см. упражнения 4 и 5).

Упражнения

1) Совершенно упорядоченную группу G (не обязательно коммутативную; см. Алг., гл. VI, § 1, упражнение 1) называют *архимедовой*, если множество I элементов $\geqslant e$ (где e — нейтральный элемент группы G) удовлетворяет аксиоме ($\mathrm{GR_{IV}}$) § 2 (см. Алг., гл. VI, § 1, упражнение 33). Показать, что для того, чтобы совершенно упорядоченная группа G была изоморфна подгруппе аддитивной группы **R**, необходимо и достаточно, чтобы G была архимедовой. [Различать два случая, смотря по тому, имеется ли в множестве элементов $> e$ из G наименьший элемент или нет, и использовать предложение 1 § 2.]

2) Пусть G — совершенно упорядоченная группа (не обязательно коммутативная), не сводящаяся к нейтральному элементу; топология $\mathscr{T}_0(G)$ (гл. I, § 2, упражнение 5) согласуется с групповой структурой группы G. Если G в этой топологии *связна*, то она изоморфна аддитивной группе **R**. [Использовать упражнение 7 § 2 главы IV и предложение 2 § 2.]

3) Пусть G — совершенно упорядоченная группа (не обязательно коммутативная); если G при наделении топологией $\mathscr{T}_0(G)$ *локально компактна* и не дискретна, то она локально изоморфна **R**, а связная компонента нейтрального элемента есть открытая подгруппа группы G, изоморфная **R**. [Использовать упражнение 6 § 2 главы IV и предложение 2 § 2.]

*4) Пусть G — топологическая группа, удовлетворяющая следующим условиям:

($\mathrm{R_I}$) G связна.

($\mathrm{R_{II}}$) Дополнение G^* нейтрального элемента e в G несвязно.

При этих условиях существует *биективное непрерывное представление* G на **R** (иначе говоря, G алгебраически изоморфна **R**, причем ее топология мажорирует топологию из **R**). Последовательно установить следующие свойства:

a) Пусть $(U_i)_{1 \leq i \leq n}$ $(n \geqslant 2)$ — разбиение множества G^*, состоящее из множеств, открытых *в* G^*. Показать, что каждое из множеств U_i открыто в G, что e служит точкой прикосновения каждого из них и что G отделима. Вывести отсюда, что все замыкания $\overline{U}_i = U_i \cup \{e\}$ в G связны. [Гл. I, § 11, упражнение 4.]

б) Пусть A — связная компонента множества U_i; показать, что $A^{-1}\overline{U}_j = A^{-1}$ для всех $j \neq i$. [Заметить, что $A^{-1}\overline{U}_j$ связно и содержит A^{-1} и что $A^{-1}\overline{U}_j \subset G^*$ при $j \neq i$.]

в) Показать, что необходимо $n = 2$. [Для каждого i, $1 \leqslant i \leqslant n$, взять связную компоненту A_i множества U_i; на основании б) при $j \neq i$ будем иметь $A_i^{-1}A_j \subset A_i^{-1}$, $A_j^{-1}A_i \subset A_j^{-1} \subset U_j^{-1}$, откуда $A_i^{-1} \subset U_j$.] Вывести отсюда, что G^* имеет в точности *две* связные компоненты A, B, причем $B = A^{-1}$ и $\overline{A} = \complement(A^{-1})$.

г) $yx^{-1} \in \overline{A}$ есть отношение порядка, превращающее G в совершенно упорядоченную группу. [Показать, что $\overline{A}^2 = \overline{A}$ и $x\overline{A}x^{-1} = \overline{A}$, каково бы ни было $x \in G$.]

д) Топология $\mathcal{T}_0(G)$ мажорируется заданной топологией $\mathcal{T}$ группы G. [Заметить, что A открыто в топологии $\mathcal{T}$.]

В заключение воспользоваться предыдущим упражнением 2 и предложением 4 § 11 главы I. [См. гл. VI, § 1, упражнение 12б.]

е) Показать, что если, кроме того, G *локально компактна* или *локально связна*, то G изоморфна $\mathbf{R}$.

°5) Дать пример топологии в $\mathbf{R}$, согласующейся с его групповой структурой и такой, чтобы $\mathbf{R}$ было связно, локально компактно, локально связно и дополнение к $\{0\}$ в $\mathbf{R}$ было связно. [Использовать тот факт, что $\mathbf{R}$ и $\mathbf{R}^n$ алгебраически изоморфны.]°

*6) Пусть G — топологическая группа, удовлетворяющая следующим условиям:

($\mathrm{LR_I}$) G отделима и локально связна.

($\mathrm{LR_{II}}$) Существует связная окрестность U нейтрального элемента e группы G такая, что его дополнение относительно U несвязно.

Показать, что при этих условиях G есть топологическая группа, *локально изоморфная* $\mathbf{R}$.

[Установить сначала, рассуждая, как в упражнении 4, что для любой связной окрестности V элемента e в G, содержащейся в U, множество $V \cap \complement\{e\}$ несвязно, что e является точкой прикосновения для каждой его связной компоненты и что это множество имеет ровно две связные компоненты. Взять затем достаточно малую связную окрестность V и определить в V структуру совершенно упорядоченного множества так, чтобы топология $\mathcal{T}_0(V)$ мажорировалась топологией, индуцируемой в V топологией группы G, и чтобы предложение 2 § 2 было применимо к множеству E всех элементов $\geqslant e$ из V.]

7) Пусть G — недискретная локально компактная группа, обладающая счетным базисом открытых множеств, и V_0 — компактная окрестность нейтрального элемента e в G, не содержащая *никакой подгруппы* группы G, отличной от $\{e\}$.

а) Пусть (x_n) — последовательность точек из V_0, сходящаяся к e. Для каждого n существует целое $p(n) > 0$ такое, что $x_n^k \in V_0$

при всех $k \leqslant p(n)$, $x_n^{p(n)+1} \notin V_0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} p(n) = +\infty$. Показать, что (x_n) обладает подпоследовательностью (x_{k_n}) такой, что, каково бы ни было рациональное число r, такое, что $|r| \leqslant 1$, последовательность $(x_{k_n}^{[rp(k_n)]})$ стремится в V_0 к некоторому пределу $f(r)$. [Использовать диагональный процесс.] При этом для любых двух рациональных чисел r, r' таких, что $|r| \leqslant 1$, $|r'| \leqslant 1$ и $|r + r'| \leqslant 1$, имеем $f(r + r') = f(r) f(r')$.

б) Показать, что f непрерывна на некоторой окрестности нуля из $\mathbf{Q}$. [Рассуждая от противного, доказать, что если бы существовала последовательность (r_n) рациональных чисел, стремящаяся к 0 и такая, что $f(r_n)$ стремится в V_0 к элементу $y \neq e$, то мы имели бы $y^m \in V_0$ для всех целых m.]

в) Вывести из б) существование нетривиального непрерывного представления $\mathbf{R}$ в G. [Использовать предложение 6 § 1.]

г) Пусть H — замкнутый нормальный делитель группы G, отличный от G; предположим, что в G/H существует окрестность нейтрального элемента, не содержащая ни одной нетривиальной подгруппы. Показать, что существует непрерывное представление $f\colon \mathbf{R} \to G$, для которого составное представление $\mathbf{R} \xrightarrow{f} G \to G/H$ нетривиально.

8) Пусть G — топологическая группа, H — ее замкнутая подгруппа, содержащаяся в центре и такая, что существует сюръективное непрерывное представление $\varphi\colon \mathbf{R} \to G/H$. Показать, что G коммутативна. [Заметить, что если a_0 — элемент из G, не принадлежащий H, то существуют последовательности элементов (a_n) в G и (c_n) в H такие, что $a_n = c_n a_{n+1}^2$, причем подгруппа группы G, порождаемая H и всеми a_n, плотна в G.]

§ 4. Показательные функции и логарифмы

1. *Определение a^x и $\log_a x$*

Теорема 1. *Мультипликативная группа $\mathbf{R}_+^*$ всех вещественных чисел > 0 есть топологическая группа, изоморфная аддитивной группе $\mathbf{R}$ вещественных чисел.*

В самом деле, $\mathbf{R}_+^* =]0, +\infty[$ есть открытый интервал в $\mathbf{R}$, а потому *гомеоморфно* $\mathbf{R}$ (гл. IV, § 4, предложение 1); тем самым по теореме 2 § 3 топологическая группа $\mathbf{R}_+^*$ *изоморфна* $\mathbf{R}$.

По следствию предложения 5 § 1, для любого числа $a > 0$ существует, и притом единственное, непрерывное представление f_a группы $\mathbf{R}$ в $\mathbf{R}_+^*$ такое, что $f_a(1) = a$. Каковы бы ни были $x \in \mathbf{R}$

и $y \in \mathbf{R}$, имеем, таким образом,

$$f_a(x+y)=f_a(x)\,f_a(y), \quad f_a(-x)=\frac{1}{f_a(x)},$$

откуда, в частности, для любого целого $n \in \mathbf{Z}$ получаем

$$f_a(n)=a^n.$$

В соответствии с этим пишут $f_a(x) = a^x$ для любого $x \in \mathbf{R}$; функции a^x (для всех значений $a > 0$) называют *показательными функциями*. Каково бы ни было $x \in \mathbf{R}$, имеем $1^x = 1$; при $a \neq 1$ функция a^x есть *изоморфизм* группы $\mathbf{R}$ на группу $\mathbf{R}_+^*$.

При $a \neq 1$ изоморфизм $\mathbf{R}_+^*$ на $\mathbf{R}$, обратный к a^x, называют *логарифмом с основанием* a, а его значение для $x \in \mathbf{R}_+^*$ обозначают $\log_a x$. Таким образом, в этих обозначениях имеем:

$$a^{x+y}=a^xy^y \quad \text{для } x\in\mathbf{R},\ y\in\mathbf{R},\ a>0; \tag{1}$$

$$a^{-x}=\frac{1}{a^x} \quad \text{для } x\in\mathbf{R},\ a>0; \tag{2}$$

$$\log_a 1=0, \quad \log_a a=1 \quad \text{для } a>0 \text{ и } \neq 1; \tag{3}$$

$$\log_a(xy)=\log_a x+\log_a y \quad \text{для } x>0,\ y>0; \tag{4}$$

$$\log_a\left(\frac{1}{x}\right)=-\log_a x \quad \text{для } x>0; \tag{5}$$

$$a^{\log_a x}=x \quad \text{для } x>0; \tag{6}$$

$$\log_a(a^x)=x \quad \text{для } x\in\mathbf{R}. \tag{7}$$

Вследствие предложения 5 § 1 всякое непрерывное представление группы $\mathbf{R}$ в $\mathbf{R}_+^*$ имеет вид $y \mapsto a^{xy}$, где $x \in \mathbf{R}$; так как его значением при $y = 1$ служит a^x, то имеем тождественно

$$(a^x)^y=a^{xy} \quad \text{для } x\in\mathbf{R},\ y\in\mathbf{R},\ a>0 \tag{8}$$

или, в измененных обозначениях,

$$x^y=a^{y\log_a x} \quad \text{для } x>0,\ y\in\mathbf{R},\ a>0 \text{ и } \neq 1. \tag{9}$$

Формула (8) показывает, что $(a^{1/n})^n=a$ для любого целого $n>0$, чем и оправдывается обозначение $a^{1/n}$, вводимое для *корня n-й степени* $\sqrt[n]{a}$, определенного в § 3 главы IV.

Формулы (7) и (9) показывают, что

$$\log_a(x^y)=y\log_a x \quad \text{для } x>0 \text{ и } y\in\mathbf{R} \tag{10}$$

или, в измененных обозначениях,

$$\log_a x = \log_a b \log_b x \text{ для } x > 0,\ a > 0,\ b > 0,\ a \text{ и } b \neq 1 \quad (11)$$

(формула «перехода к новому основанию»).

Разыщем, наконец, все *непрерывные представления* топологической группы $\mathbf{R}_+^*$ в себя; если g — такое представление, то $\log_a(g(a^x))$ есть непрерывное представление $\mathbf{R}$ в $\mathbf{R}$ и, следовательно (§ 1, предложение 5), существует $\alpha \in \mathbf{R}$ такое, что $\log_a(g(a^x)) = \alpha x$, каково бы ни было $x \in \mathbf{R}$; отсюда на основании (8) получаем тождество $g(x) = x^\alpha$, каково бы ни было $x > 0$. Тем самым имеем тождественно

$$(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha, \text{ каковы бы ни были } x > 0,\ y > 0,\ \alpha \in \mathbf{R}. \quad (12)$$

В силу формулы (4), сводящей всякое умножение к сложению (единственной операции, к которой по-настоящему приспособлена употребительная система нумерации), логарифмы долгое время были незаменимым инструментом для численных расчетов (см. Исторический очерк к этой главе).

При их использовании в этих целях выбирают основание $a = 10$; и существуют таблицы, дающие значения функции $\log_{10} x$ (с известной точностью). В анализе, как мы позже увидим (Функц. действ. перем., гл. III, § 1, n° 1), более естествен другой выбор основания, которое (обозначаемое через e) берется так, чтобы $\lim\limits_{x \to 1,\ x \neq 1} \dfrac{\log_e x}{x-1} = 1$ (см. упражнение 1).

2. *Изменение функций a^x и $\log_a x$*

По теореме 5 § 2 главы IV $x \mapsto a^x$ при $a \neq 1$ есть *строго монотонное* отображение $\mathbf{R}$ на интервал $\mathbf{R}_+^* =]0, +\infty[$. Если $a > 1$, то $a^1 = a > 1 = a^0$, так что a^x *строго возрастает*; кроме того, так как $\mathbf{R}_+^*$ не ограниченно сверху, то a^x не ограниченно сверху на $\mathbf{R}$, и, значит,

$$\lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty \quad (a > 1); \quad (13)$$

отсюда согласно (2)

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = 0 \quad (a > 1). \quad (14)$$

Напротив, если $a < 1$, то функция a^x строго убывает на $\mathbf{R}$, стремится к 0, когда x стремится к $+\infty$, и стремится к $+\infty$, когда x стремится к $-\infty$ (рис. 2).

Из этих свойств и (12) вытекает, что если $0 < a < b$, то $a^x < b^x$ для $x > 0$ и $a^x > b^x$ для $x < 0$; в самом деле, это сводится к констатации того, что $\left(\frac{b}{a}\right)^x > 1$ для $x > 0$ и $\left(\frac{b}{a}\right)^x < 1$ для $x < 0$.

Изменение $\log_a x$ на $\mathbf{R}_+^*$ определяется изменением a^x на $\mathbf{R}$; если $a > 1$, то $\log_a x$ — строго возрастающая функция, стремящаяся к $-\infty$, когда x стремится к 0, и к $+\infty$, когда x стремится к $+\infty$; если $a < 1$, то $\log_a x$ — строго убывающая функция,

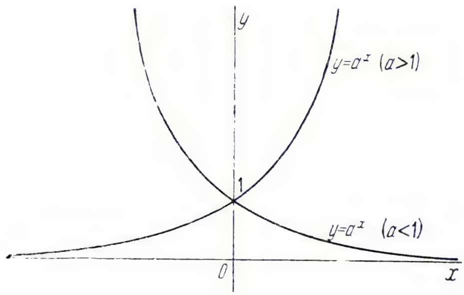

Рис. 2.

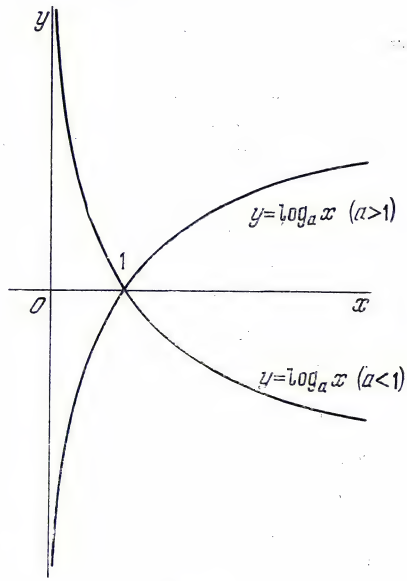

Рис. 3.

стремящаяся к $+\infty$, когда x стремится к 0, и к $-\infty$, когда x стремится к $+\infty$ (рис. 3).

Будем рассматривать a^x (соотв. $\log_a x$) как функцию, определенную на части расширенной прямой $\overline{\mathbf{R}}$ и принимающую значения из $\overline{\mathbf{R}}$; тогда ее можно *продолжить по непрерывности* на $\overline{\mathbf{R}}$ (соотв. на интервал $[0, +\infty] \subset \overline{\mathbf{R}}$), придав ей в точках $+\infty$ и $-\infty$ (соотв. в 0 и $+\infty$) соответствующие предельные значения.

Более общим образом, формула (9) показывает, что функция x^y непрерывна на подпространстве $\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}$ пространства $\overline{\mathbf{R}}^2$ и стремится к пределу, когда (x, y) стремится к точке $(a, b) \in \overline{\mathbf{R}}^2$, являющейся точкой прикосновения для $\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}$, за исключением точек $(0, 0)$, $(+\infty, 0)$, $(1, +\infty)$, $(1, -\infty)$. Поэтому и x^y можно продолжить по непрерывности на те точки из $\overline{\mathbf{R}}^2$, где

существует ее предел; по принципу продолжения тождеств (гл. I, § 8, следствие 1 предложения 2) формулы (1), (4) и (8) будут по-прежнему иметь место, если каждый из обоих их членов имеет смысл.

Отметим, что продолжение по непрерывности функции x^y не позволяет получить заново формулу $0^0 = 1$, вытекающую из соглашений, принятых в Алгебре (Алг., гл. I, § 2, n° 1); следует избежать всякой неясности в этом отношении.

Заметим также, что определение показательной функции позволяет продолжить на $\mathbf{R}$ функцию $n \longmapsto a^n$, определенную на $\mathbf{Z}$, для всякого $a > 0$; но таким путем не получается продолжение этой функции, если $a < 0$; «естественное» продолжение этой функции может быть определено только с помощью теории аналитических функций.

3. *Перемножаемые семейства чисел* >0

Из изоморфизма топологических групп $\mathbf{R}$ и $\mathbf{R}_+^*$ сразу следует, что для того, чтобы семейство (x_ι) конечных вещественных чисел >0 было *перемножаемым* (гл. IV, § 7, n° 4), необходимо и достаточно, чтобы семейство $(\log_a x_\iota)$ (где a — любое число >0 и $\neq 1$) было *суммируемо*; при этом

$$\prod_\iota x_\iota = a^{\sum\limits_\iota \log_a x_\iota}. \tag{15}$$

Точно так же, для того чтобы бесконечное произведение, определяемое последовательностью $(1 + u_n)$ конечных чисел >0, было *сходящимся* (гл. IV, § 7, n° 6), необходимо и достаточно, чтобы ряд с общим членом $\log_a(1 + u_n)$ был *сходящимся*, и тогда

$$\mathop{\mathsf{P}}\limits_{n=0}^{\infty} (1 + u_n) = a^{\mathop{\mathsf{S}}\limits_{n=0}^{\infty} \log_a (1+u_n)}. \tag{16}$$

Изучение бесконечных произведений вещественных чисел >0 приводится, таким образом, к изучению бесконечных сумм вещественных чисел с членами, представленными в виде логарифмов; мы увидим позже, как суммы этого вида удобно изучать с помощью дифференциальных свойств логарифма.

Упражнения

1) а) Пусть $(x_n, y_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ — семейство точек из $\mathbf{R}^2$ таких, что для любого $n \in \mathbf{Z}$ имеем $x_n < x_{n+1}$ и

$$\frac{y_{n+1}-y_n}{x_{n+1}-x_n} < \frac{y_{n+2}-y_{n+1}}{x_{n+2}-x_{n+1}};$$

показать, что, каковы бы ни были целые $n \in \mathbf{Z}$, $m > 0$, $p > 0$,

$$\frac{y_{n+m}-y_n}{x_{n+m}-x_n} < \frac{y_{n+m+p}-y_n}{x_{n+m+p}-x_n}.$$

б) Пусть $f_a(x) = \frac{a^x - 1}{x}$, где $a > 0$ и $x \neq 0$; показать, что если $x < y$, $x \neq 0$, $y \neq 0$ и $a \neq 1$, то $f_a(x) < f_a(y)$. [Доказать это сначала для целых x, y, используя а), затем для рациональных x, y и, наконец, для общего случая.]

в) Вывести отсюда, что, каково бы ни было $a > 0$, функция $f_a(x)$, определенная для $x \neq 0$, имеет пределы справа и слева при x, стремящемся к 0; показать, что эти два предела имеют одно и то же значение $\varphi(a)$ и что $\varphi(a) \neq 0$, если $a \neq 1$ Показать, что если $a \neq 1$, то функция $\frac{\log_a x}{x-1}$, определенная для $x \neq 1$, имеет предел $\frac{1}{\varphi(a)}$, когда x стремится к 1.

г) Показать, что $\varphi(b) = \varphi(a) \log_a b$, каковы бы ни были $a > 0$ и $\neq 1$ и $b > 0$; вывести отсюда, что существует число e, заключенное между 2 и 4, такое, что $\varphi(e) = 1$ и $\varphi(a) = \log_e a$ для каждого $a > 0$.

2) Показать индукцией по n, что $2^n > \frac{n(n+1)}{2}$ для любого целого $n > 0$. Вывести отсюда, что для $a > 1$ и $\alpha > 0$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{a^x}{x^\alpha} = +\infty, \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{\log_a x}{x^\alpha} = 0.$$

[Сначала доказать первую из этих формул для $a = 2$ и $\alpha = 1$.]

ИСТОРИЧЕСКИЙ ОЧЕРК

К ГЛАВЕ V

(Римские цифры относятся к библиографии, помещенной в конце настоящего очерка.)

История теории мультипликативной группы $\mathbf{R}_+^*$ вещественных чисел >0 тесно связана с историей развития понятия *степеней* числа >0 и способов их обозначения. Концепция «геометрической прогрессии», образованной последовательными степенями одного и того же числа, восходит к египтянам и вавилонянам; она была хорошо известна греческим математикам, и уже у Евклида (Начала, IX, 11) имеется общее утверждение, равносильное правилу $a^m a^n = a^{m+n}$ для целых показателей >0. В средневековье французский математик Н. Орем (XIV век) вновь находит это правило; у него впервые появляется также понятие степени с дробным показателем >0 в обозначении, уже близком к нашему, и с относящимися к нему (сформулированными в общем виде) правилами исчисления (например, двумя правилами, которые мы теперь записываем в виде $(ab)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}} b^{\frac{1}{n}}$, $(a^m)^{\frac{p}{q}} = (a^{mp})^{\frac{1}{q}}$) *). Но идеи Орема слишком опередили математику его времени, чтобы оказать влияние на современников, и его трактат скоро был предан забвению. Веком позже Н. Шюке вновь формулирует правило Евклида и вводит, кроме того, экспоненциальное обозначение для степеней неизвестных в своих уравнениях, не колеблясь употребляя показатель 0 и целые показатели <0 **). С этого времени (хотя сочинение Шюке оставалось в рукописном виде и, по-видимому, не получило большого распространения) идея изоморфизма между «арифметической прогрессией» показателей и «геометрической прогрессией» степеней больше уже не теряется из виду; распространенная Штифелем на отрицательные и на дробные показатели ***), она завершается

---

*) См. M. Curtze, Zeitschr. f. Math. u. Phys., т. XIII, Supplem., 1868, стр. 65.

**) Шюке пишет, например, 12^1, 12^2, 12^3 и т. д. вместо $12x$, $12x^2$, $12x^3$ и т. д., 12^0 вместо числа 12 и $12^{2\widetilde{m}}$ вместо $12x^{-2}$ (Bull. bibl. storia math., т. XIII, 1880, стр. 737—738).

***) M. Stifel, Arithmetica integra, Nüremberg, 1544, fol. 35 и 249—250.

наконец определением логарифмов и составлением первых таблиц, предпринятым независимо друг от друга шотландцем Дж. Непером в 1614—1620 гг. и швейцарцем И. Бюрги (сочинение которого появилось лишь в 1620 г., хотя замысел восходит к первым годам XVII века). У Бюрги непрерывность изоморфизма, установленного между $\mathbf{R}$ и $\mathbf{R}_+^*$, неявно предполагается путем использования интерполяции при обращении с таблицами; напротив, в определении Непера она формулируется явно (по крайней мере настолько явно, насколько это было возможно при столь смутном представлении о непрерывности, какое имелось в то время) *).

Мы не будем останавливаться здесь на помощи, оказываемой логарифмами в числовых расчетах; с теоретической точки зрения их роль становится особенно значительной после возникновения исчисления бесконечно малых, с открытием рядов для функций $\log(1+x)$ и e^x и дифференциальных свойств этих функций (см. Функц. действ. перем., Исторические очерки к главам I — III). Что касается определения показательных функций и логарифмов, то до середины XIX века ограничивались интуитивным допущением возможности продолжения по непрерывности функции a^x, определенной для всех рациональных x, на множество всех вещественных чисел; и только после того, как понятие вещественного числа было окончательно уточнено и выведено из понятия рационального числа, позаботились дать этому продолжению строгое обоснование. Аналогичный принцип продолжения, примененный надлежащим образом, лежит также в основе рассуждения, посредством которого мы установили предложения 1 и 2 § 2, откуда вытекает не только определение степеней и логарифмов, но, как мы это увидим в главе VIII, и измерение углов.

*) Непер рассматривает две точки M и N, движущиеся одновременно по двум прямым, причем движение M равномерно, а движение N таково, что скорость N пропорциональна ее абсциссе; абсцисса точки M является тогда по определению логарифмом абсциссы точки N ((II), стр. 20—21).

БИБЛИОГРАФИЯ

(I) Euclidis Elementa, 5 тт., изд. J. L. Heiberg, Lipsiae (Teubner), 1883—1888. [Начала Евклида, 3 тт., Гостехиздат, М.— Л., 1948—1950.]

(II) J. Neper, Mirifici logarithmorum canonis constructio, Lyon, 1620.

ГЛАВА VI

ЧИСЛОВЫЕ И ПРОЕКТИВНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

§ 1. Числовое пространство $\mathbf{R}^n$

1. *Топология пространства* $\mathbf{R}^n$

Определение 1. *n-мерным числовым пространством* $\mathbf{R}^n$ *(числовой плоскостью, если $n = 2$) называют топологическое произведение n пространств, совпадающих каждое с числовой прямой.*

Замечание. Пространство $\mathbf{R}^0$ сводится к одной точке.

Как известно (Теор. мн., гл. III, § 6, следствие 1 теоремы 2), если E — бесконечное множество, то E^n и E равномощны при любом целом $n > 0$; таким образом, при $n > 0$ пространство $\mathbf{R}^n$ равномощно $\mathbf{R}$, т. е. имеет *мощность континуума* (см. упражнения 1 и 2).

Определение 2. *Открытым* (соотв. *замкнутым*) *кирпичом пространства* $\mathbf{R}^n$ *называется всякое множество в* $\mathbf{R}^n$, *являющееся произведением n открытых* (соотв. *замкнутых*) *интервалов из* $\mathbf{R}$.

Открытые кирпичи образуют *базис* топологии пространства $\mathbf{R}^n$ (гл. I, § 4, n° 1); открытые кирпичи, содержащие точку $x = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$ пространства $\mathbf{R}^n$, образуют фундаментальную систему окрестностей этой точки; то же верно и для замкнутых кирпичей в $\mathbf{R}^n$, содержащих x в качестве внутренней точки.

Всякий непустой открытый кирпич в $\mathbf{R}^n$ *гомеоморфен* $\mathbf{R}^n$ (гл. IV, § 4, предложение 1).

Отсюда следует, что при $n \geqslant 1$ всякое непустое открытое множество в $\mathbf{R}^n$ имеет мощность континуума.

Открытым (соотв. *замкнутым*) *кубом* в $\mathbf{R}^n$ называют открытый (соотв. замкнутый) кирпич, являющийся произведением n *ограниченных* интервалов *одинаковой длины* (при $n = 2$ его называют *открытым* (соотв. *замкнутым*) *квадратом*); общая длина этих интервалов называется *стороной* куба. Открытые кубы $K_m = \prod\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \left]x_i - \frac{1}{m},\ x_i + \frac{1}{m}\right[$ (где m пробегает множество всех целых > 0 или неограниченно возрастающую последовательность целых чисел) образуют *счетную* фундаментальную систему окрестностей точки $x = (x_i)$.

Всякий открытый (или замкнутый) кирпич в $\mathbf{R}^n$ *связен* (гл. I, § 11, предложение 8); в частности, $\mathbf{R}^n$ есть *связное локально связное* пространство.

Таким образом, связные компоненты непустого открытого множества $A \subset \mathbf{R}^n$ являются *открытыми* множествами (гл. I, § 11, предложение 11); при этом множество этих компонент *не более чем счетно*, ибо $\mathbf{R}^n$ содержит счетное всюду плотное множество (например, $\mathbf{Q}^n$).

Найдем условие для того, чтобы множество $A \subset \mathbf{R}^n$ было *относительно компактным*; по теореме Тихонова (гл. I, § 9, теорема 3) для этого необходимо и достаточно, чтобы проекции A на пространства-сомножители произведения $\mathbf{R}^n$ были относительно компактны; по теореме Бореля — Лебега (гл. IV, § 2, теорема 2) это равносильно *ограниченности* в $\mathbf{R}$ указанных проекций; если это имеет место, то говорят, что A *ограниченно* в $\mathbf{R}^n$; таким образом:

Предложение 1. *Для того чтобы множество $A \subset \mathbf{R}^n$ было относительно компактным, необходимо и достаточно, чтобы оно было ограниченным.*

Следствие. *Пространство $\mathbf{R}^n$ локально компактно и при $n \geqslant 1$ не компактно.*

2. Аддитивная группа $\mathbf{R}^n$.

Множество $\mathbf{R}^n$, наделенное *произведением* структур групп его n сомножителей, есть коммутативная группа; групповая операция в ней записывается в аддитивных обозначениях, так что, если $x = (x_i)$ и $y = (y_i)$, их сумма $x + y = (x_i + y_i)$. Топология числового пространства согласуется с этой структурой группы;

наделенное этими двумя структурами, $\mathbf{R}^n$ есть топологическая группа, называемая *аддитивной группой n-мерного числового пространства*. При $n = 0$ условимся считать, что $\mathbf{R}^0$ есть группа, сводящаяся к нейтральному элементу.

Равномерная структура группы $\mathbf{R}^n$, называемая ее *аддитивной равномерной структурой*, является произведением равномерных структур ее сомножителей (гл. III, § 3, n° 2). Пусть V_p для каждого целого $p > 0$ — множество всех пар (x, y) точек из $\mathbf{R}^n$ таких, что $\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i - y_i| \leqslant \frac{1}{p}$; множества V_p образуют *фундаментальную систему окружений* этой равномерной структуры. Рассматривая $\mathbf{R}^n$ как равномерное пространство, мы будем всегда, если не оговорено противное, иметь в виду эту аддитивную равномерную структуру. $\mathbf{R}^n$, наделенное этой структурой, есть *полное* равномерное пространство (гл. II, § 3, предложение 10).

3. *Векторное пространство* $\mathbf{R}^n$

Поскольку $\mathbf{R}$ — *поле*, в $\mathbf{R}^n$ можно ввести структуру *векторного пространства* относительно поля $\mathbf{R}$ (Алг., гл. II, § 1), определяя произведение tx точки (или вектора) $x = (x_i) \in \mathbf{R}^n$ на скаляр $t \in \mathbf{R}$ как точку (tx_i); отметим, что гомотетия $(t, x) \rightarrow tx$ *непрерывна* на $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$. Пусть e_i — вектор из $\mathbf{R}^n$, все координаты которого равны нулю, за исключением координаты с номером i, равной 1; векторы e_i образуют *базис* векторного пространства $\mathbf{R}^n$, называемый *каноническим базисом* этого пространства (Алг., гл. II, § 1; 3-е изд., § 1, n° 11); всякий вектор $x = (x_i) \in \mathbf{R}^n$ записывается в виде $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$, и отношение $\sum\limits_{i=1}^{n} t_i e_i = 0$ влечет $t_i = 0$ для всех i $(1 \leqslant i \leqslant n)$.

Таким образом, векторное пространство $\mathbf{R}^n$ имеет *размерность* n относительно поля $\mathbf{R}$ в смысле, определенном в Алгебре (Алг., гл. II, § 3; 3-е изд., § 7, n° 2); отсюда и его наименование n-мерного числового пространства.

Пусть f — *аффинное* отображение (Алг., гл. II, 2-е изд., Приложение II; 3-е изд., § 9, n° 4) векторного пространства $\mathbf{R}^n$ в векторное пространство $\mathbf{R}^m$ (где m и n — целые >0) и $g(x) =$

$= f(x) - f(0)$; g — *линейное* отображение $\mathbf{R}^n$ в $\mathbf{R}^m$. Пусть a_{ij} и b_j $(1 \leqslant j \leqslant m)$ — координаты векторов $g(e_i)$ и $f(0)$ в $\mathbf{R}^m$; если x_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ — координаты вектора $x \in \mathbf{R}^n$, а y_j $(1 \leqslant j \leqslant m)$ — координаты вектора $y = f(x)$, то имеем

$$y_j = \sum_{i=0}^{m} a_{ij}x_i + b_j \quad (1 \leqslant j \leqslant m).$$

Так как всякий полином первой степени относительно $x_1, \ldots, x_n$ равномерно непрерывен на $\mathbf{R}^n$, то всякое аффинное линейное отображение $\mathbf{R}^n$ в $\mathbf{R}^m$ *равномерно непрерывно* на $\mathbf{R}^n$ (гл. II, § 2, предложение 7).

В частности, как известно, всякое аффинное отображение $\mathbf{R}^n$ *на* себя *биективно*, а обратное отображение снова является аффинным отображением (Алг., гл. II, 3-е изд., § 7, следствие предложения 9); тем самым всякое аффинное отображение $\mathbf{R}^n$ на себя есть *гомеоморфизм* (и автоморфизм равномерной структуры в $\mathbf{R}^n$).

Пусть $(\boldsymbol{a}_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ — *свободная система* n векторов в $\mathbf{R}^n$ (или, что то же (Алг., гл. II, 3-е изд., § 7, предложение 1), *базис* векторного пространства $\mathbf{R}^n$) и $\boldsymbol{b}$ — произвольная точка из $\mathbf{R}^n$; множество P точек $x = \boldsymbol{b} + \sum\limits_{i=1}^{n} u_i\boldsymbol{a}_i$ таких, что $-1 \leqslant u_i \leqslant 1$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, есть *компактная окрестность* точки $\boldsymbol{b}$; в самом деле, существует биективное аффинное отображение f пространства $\mathbf{R}^n$ на себя такое, что $f(\boldsymbol{b}) = 0$ и $f(\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}_i) = e_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, так что $f(P)$ есть куб в $\mathbf{R}^n$, являющийся произведением n интервалов $[-1, +1]$ из пространств-сомножителей. P называется *замкнутым параллелепипедом* с центром $\boldsymbol{b}$, построенным на базисных векторах $\boldsymbol{a}_i$. Его внутренность состоит из точек $\boldsymbol{b} + \sum\limits_{i=1}^{n} u_i\boldsymbol{a}_i$ таких, что $-1 < u_i < 1$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$; ее называют *открытым параллелепипедом* с центром $\boldsymbol{b}$, построенным на векторах $\boldsymbol{a}_i$.

4. *Аффинные линейные многообразия в* $\mathbf{R}^n$

Пусть V — *аффинное линейное многообразие* размерности p в $\mathbf{R}^n$; как известно (Алг., гл. II, 2-е изд., Приложение II; 3-е изд., § 9, n° 3), существует аффинное отображение f пространства $\mathbf{R}^n$ на себя, преобразующее V в *координатное* многообразие размер-

ности p, т. е. в векторное подпространство V', порождаемое p векторами канонического базиса (e_i) пространства $\mathbf{R}^n$. Существует отображение V' на $\mathbf{R}^p$, являющееся изоморфизмом структур векторного пространства и топологии в V' на соответствующие структуры в $\mathbf{R}^p$ (причем часто бывает удобно *отождествлять* $\mathbf{R}^p$ с таким координатным многообразием V', например с векторным подпространством, порождаемым векторами e_1, e_2, ..., e_p). При этом V' есть *замкнутое* множество в $\mathbf{R}^n$ (гл. I, § 4, следствие предложения 7). Таким образом:

Предложение 2. *Всякое p-мерное аффинное линейное многообразие в $\mathbf{R}^n$ есть замкнутое множество в $\mathbf{R}^n$, гомеоморфное $\mathbf{R}^p$.*

Именно исходя из этого результата, *одно*мерное (соотв. *дву*мерное) аффинное линейное многообразие в векторном пространстве над произвольным телом именуют *прямой* (соотв. *плоскостью*) (Алг., гл. II; 3-е изд., § 7, n° 3). Напомним также, что при $n \geqslant 1$ $(n-1)$-мерные аффинные линейные многообразия в $\mathbf{R}^n$ называют *гиперплоскостями* (там же).

n одномерных координатных многообразий, т. е. n прямых, проходящих через 0 и соответственно через n точек e_i, называют *координатными осями*. При $n = 2$ ось, проходящую через e_1, называют *осью абсцисс*, а ось, проходящую через e_2,— *осью ординат*; первую координату точки $x \in \mathbf{R}^2$ называют *абсциссой* этой точки, вторую — *ординатой*.

Всякая прямая D, проходящая через точку a, допускает параметрическое представление $t \mapsto a + tb$, где t пробегает $\mathbf{R}$, а $b \neq 0$; это отображение есть гомеоморфизм $\mathbf{R}$ на D; вектор b называют *направляющим вектором* прямой D, а его координаты b_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ — *направляющими параметрами* (или просто *параметрами*) этой прямой; если b' — другой направляющий вектор той же прямой, то существует $h \neq 0$ такое, что $b' = hb$.

Множество точек $a + tb$, где t пробегает все вещественные числа $\geqslant 0$, называют *замкнутой полупрямой* (или просто *полупрямой*) *с началом a* и *направляющим вектором b* (или *направляющими параметрами b_i*). Это — *замкнутое* множество в $\mathbf{R}^n$, гомеоморфное интервалу $[0, +\infty[$ числовой прямой $\mathbf{R}$ и потому *связное*. Прямая D есть объединение двух полупрямых с началом a

и направляющими векторами $\boldsymbol{b}$ и $-\boldsymbol{b}$, называемых *противоположными*.

Допуская вольность речи, множество точек $\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b}$, где t пробегает все вещественные числа > 0, называют *открытой полупрямой* с началом $\boldsymbol{a}$ и направляющим вектором $\boldsymbol{b}$; это множество, гомеоморфное интервалу $]0, +\infty[$ (а тем самым и всему $\mathbf{R}$), не является открытым в $\mathbf{R}^n$ при $n > 1$; но оно открыто относительно содержащей его прямой.

Прямая, проходящая через две различные точки $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$, допускает также параметрическое представление $(u, v) \mapsto u\boldsymbol{x} + v\boldsymbol{y}$, где (u, v) пробегает множество всех пар вещественных чисел таких, что $u + v = 1$. *Замкнутым отрезком* (или просто *отрезком*) с концами $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$, где $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ — любые две точки (различные или нет), называют множество точек $u\boldsymbol{x} + v\boldsymbol{y}$, где (u, v) пробегает множество всех пар вещественных чисел, удовлетворяющих условиям $u \geqslant 0$, $v \geqslant 0$ и $u + v = 1$; замкнутый отрезок *компактен* и *связен*, ибо, если его концы отличны друг от друга, он гомеоморфен интервалу $[0, 1] \subset \mathbf{R}$.

Точно так же *открытым отрезком* с концами $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, где $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y}$, называют (допуская вольность речи) множество всех точек $u\boldsymbol{x} + v\boldsymbol{y}$ таких, что $u > 0$, $v > 0$, $u + v = 1$; это — множество, гомеоморфное открытому интервалу $]0, 1[$ (а тем самым и всему $\mathbf{R}$). Наконец, *отрезком, открытым в* $\boldsymbol{x}$ *и замкнутым в* $\boldsymbol{y}$, называют иногда объединение $\boldsymbol{y}$ с открытым отрезком с концами $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$; это — множество, гомеоморфное интервалу $[0, 1[$. Все отрезки с концами $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ связны и имеют своим замыканием замкнутый отрезок с теми же концами.

Предложение 3. *Пусть* $f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — *полином с вещественными коэффициентами, определенный на* $\mathbf{R}^n$ *и не равный тождественно нулю. Дополнение множества* $\overset{-1}{f}(0)$ *всюду плотно в* $\mathbf{R}^n$.

В самом деле, пусть $\boldsymbol{x}$ — произвольная точка из $\mathbf{R}^n$ и $\boldsymbol{y}$ — точка из $\mathbf{R}^n$ такая, что $f(\boldsymbol{y}) \neq 0$; тогда $\varphi(t) = f(\boldsymbol{x} + t(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}))$ есть полином относительно вещественной переменной t, не равный тождественно нулю; следовательно, существуют сколь угодно малые значения t, для которых $\varphi(t) \neq 0$, а это показывает, что $\boldsymbol{x}$ есть точка прикосновения для дополнения к $\overset{-1}{f}(0)$.

Следствие. *Дополнение аффинного линейного многообразия размерности $p < n$ всюду плотно в* $\mathbf{R}^n$.

Так как всякое аффинное линейное многообразие размерности $p < n$ содержится в некоторой гиперплоскости, то достаточно доказать справедливость утверждения следствия для гиперплоскости; но гиперплоскость определена уравнением $g(x) = 0$, где g — полином первой степени, не равный тождественно нулю.

Предложение 4. *Дополнение всякой гиперплоскости в* $\mathbf{R}^n$ $(n \geqslant 1)$ *имеет две связные компоненты.*

В самом деле, пусть $g(x) = 0$ — уравнение гиперплоскости H в $\mathbf{R}^n$, где g — полином первой степени. Множество $\complement H$ есть объединение множества E_1 точек x, для которых $g(x) > 0$, и множества E_2 точек x, для которых $g(x) < 0$. E_1 и E_2 связны, ибо если $g(x) > 0$ и $g(y) > 0$, то $g(ux+vy) = ug(x) + vg(y) > 0$, когда $u + v = 1$, $u \geqslant 0$, $v \geqslant 0$, иначе говоря, весь отрезок с концами x и y содержится в E_1; для E_2 доказательство аналогично. С другой стороны, $\complement H$ не связно, ибо его образ в $\mathbf{R}$ при отображении g есть объединение интервалов $]0, +\infty[$ и $]-\infty, 0[$.

Связные компоненты E_1 и E_2 дополнения $\complement H$ гиперплоскости H называют *открытыми полупространствами*, определяемыми этой гиперплоскостью.

Замыкания множеств E_1 и E_2, совпадающие соответственно с $E_1 \cup H$ и $E_2 \cup H$, называют *замкнутыми полупространствами*, определяемыми гиперплоскостью H.

Отметим, что аффинное линейное отображение пространства $\mathbf{R}$ на себя, преобразующее H в какую-либо координатную гиперплоскость, например в гиперплоскость, записываемую уравнением $x_n = 0$, преобразует открытые полупространства, определяемые гиперплоскостью H, в открытые полупространства, определяемые соответственно неравенствами $x_n > 0$ и $x_n < 0$; эти последние являются открытыми кирпичами и, следовательно, *гомеоморфны* $\mathbf{R}^n$.

5. *Топология векторных пространств и алгебр над полем* R

Пусть E — n-мерное векторное пространство над полем $\mathbf{R}$ и $(a_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ — *базис* в E; всякая точка $x \in E$ представима, и притом единственным образом, в виде $x = \sum_{i=1}^{n} x_i a_i$, где

x_i — вещественные числа; отображение $(x_i) \mapsto \sum_{i=1}^{n} x_i a_i$ есть тем самым взаимно однозначное линейное отображение $\mathbf{R}^n$ на E. Если посредством этого отображения *перенести* в E топологию из $\mathbf{R}^n$, то E будет наделено топологией, согласующейся с его структурой аддитивной группы, и в этой топологии отображение $(t, x) \mapsto tx$ произведения $\mathbf{R} \times E$ в E будет непрерывно. Полученная в E топология *независима* от выбора *базиса* в E; в самом деле, пусть (a_i') — другой базис в E и $x = \sum_{i=1}^{n} x_i' a_i' = \sum_{i=1}^{n} x_i a_i$; тогда отображение $(x_i) \mapsto (x_i')$ пространства $\mathbf{R}^n$ на себя линейно и, следовательно, является гомеоморфизмом.

Это обстоятельство наводит на мысль, что определенная указанным образом топология может быть охарактеризована без помощи базиса пространства E. И действительно, мы увидим позже, что это — *единственная* отделимая топология в E, для которой функции $x - y$ и tx непрерывны (соотв. на $E \times E$ и на $\mathbf{R} \times E$) (Топ. вект. простр., гл. I, § 2, теорема 2).

Пусть теперь A — *алгебра* конечного ранга n над полем $\mathbf{R}$; описанная выше топология в A (рассматриваемом как n-мерное векторное пространство над R) согласуется не только со структурой аддитивной группы в A, но также со структурой *кольца* в A. Это вытекает из следующего более общего предложения:

Предложение 5. *Пусть E, F, G — конечномерные векторные пространства над полем* $\mathbf{R}$; *всякое билинейное* *) *отображение f произведения $E \times F$ в G непрерывно.*

В самом деле, можно предполагать, что $E = \mathbf{R}^m$, $F = \mathbf{R}^n$, $G = \mathbf{R}^p$, и все сводится к доказательству того, что координаты $f(x, y)$ в $\mathbf{R}^p$ являются непрерывными функциями от $(x, y) \in E \times F$ (гл. I, § 4, предложение 1); иначе говоря, достаточно показать, что всякая *билинейная форма* g непрерывна на $E \times F$, а это непосредственно ясно, ибо $g(x, y)$ есть полином относительно координат векторов x и y.

*) Напомним (Алг., гл. III; 3-е изд., гл. II, § 3, n° 5), что если E, F, G — векторные пространства относительно поля K, то отображение f произведения $E \times F$ в G называется *билинейным*, если $f(x + x', y) = f(x, y) + f(x', y)$, $f(x, y + y') = f(x, y) + f(x, y')$, $f(\lambda x, y) = f(x, \lambda y) = \lambda f(x, y)$, каковы бы ни были элементы x, x' из E, y, y' из F и $\lambda \in K$.

6. Топология пространств матриц над R

В качестве важного примера векторного пространства над $\mathbf{R}$ рассмотрим пространство $\mathbf{M}_{m,n}(\mathbf{R})$ *матриц из m строк и n столбцов*, элементы которых принадлежат $\mathbf{R}$; это — пространство размерности mn над $\mathbf{R}$, тем самым гомеоморфное $\mathbf{R}^{mn}$. По предложению 5 *произведение* XY двух матриц $X \in \mathbf{M}_{m,n}(\mathbf{R})$, $Y \in \mathbf{M}_{n,p}(\mathbf{R})$ есть непрерывная функция от (X, Y). В частности, топология пространства $\mathbf{M}_n(\mathbf{R})$ *квадратных* матриц n-го порядка (см. Алг., гл. II, § 6, n° 5; 3-е изд., § 10, n° 7) согласуется со структурой кольца в $\mathbf{M}_n(\mathbf{R})$. Кроме того, имеет место

Предложение 6. *Группа* $\mathbf{GL}_n(\mathbf{R})$ *обратимых матриц есть всюду плотное открытое подмножество кольца* $\mathbf{M}_n(\mathbf{R})$, *и индуцированная в этом подмножестве топология согласуется со структурой группы.*

В самом деле, если X — обратимая квадратная матрица, то элементы матрицы X^{-1} являются рациональными функциями элементов матрицы X; следовательно, эти функции определены и непрерывны в некоторой окрестности матрицы X, а это показывает, что всякая матрица Y, принадлежащая этой окрестности, обратима и отображение $Y \mapsto Y^{-1}$ непрерывно в точке X; следовательно, $\mathbf{GL}_n(\mathbf{R})$ открыто в $\mathbf{M}_n(\mathbf{R})$ и топология в $\mathbf{GL}_n(\mathbf{R})$ согласуется со структурой группы.

Наконец, $\mathbf{GL}_n(\mathbf{R})$ есть дополнение множества тех квадратных матриц X, определитель которых равен нулю; так как этот определитель есть полином относительно элементов матрицы X, то предложение 3 показывает, что $\mathbf{GL}_n(\mathbf{R})$ *всюду плотно.*

Упражнения

1) Доказать, что $\mathbf{R}^n$ равномощно $\mathbf{R}$, используя теорему Кантора (гл. IV, § 8, теорема 1) и соотношение $2^{\mathfrak{a}}2^{\mathfrak{a}} = 2^{\mathfrak{a}}$, справедливое для любого бесконечного кардинального числа $\mathfrak{a}$.

*2) Существует *непрерывное* отображение интервала $I = [0, 1] \subset \subset \mathbf{R}$ на квадрат $I \times I \subset \mathbf{R}^2$ («кривая Пеано», см. упражнение 8). [Показать сначала с помощью упражнения 11 § 8 главы IV, что существует непрерывное отображение канторова множества K на $I \times I$, и затем продолжить f на I.]

*3) Пусть A и B — счетные всюду плотные множества в $\mathbf{R}^2$. Показать, что существует гомеоморфизм $\mathbf{R}^2$ на себя, отображающий A на B. [Показать сначала, что посредством вращения можно свести дело к случаю, когда проекции pr_1 и pr_2 являются инъективными отображениями A и B в $\mathbf{R}$; построить затем путем надлежащей индукции биекцию A на B так, чтобы она определяла монотонное отображение $\mathrm{pr}_1 A$ на $\mathrm{pr}_1 B$, а также монотонное отображение $\mathrm{pr}_2 A$ на $\mathrm{pr}_2 B$; наконец, используя упражнение 11 § 2 главы IV, показать, что это отображение есть гомеоморфизм, который можно продолжить до гомеоморфизма $\mathbf{R}^2$ на себя.] Вывести отсюда, что множество C в $\mathbf{R}^2$, имеющее всюду плотное дополнение, гомеоморфно некоторому подмножеству дополнения к $\mathbf{Q}^2$ в $\mathbf{R}^2$. Обобщить эти результаты на $\mathbf{R}^n$ с $n > 2$.

4) Всякое счетное подпространство пространства $\mathbf{R}^n$, не имеющее изолированных точек, гомеоморфно рациональной прямой $\mathbf{Q}$. [Применить упражнение 13 § 8 главы IV.]

5) Всякое вполне несвязное компактное подпространство пространства $\mathbf{R}^n$, не имеющее изолированных точек, гомеоморфно канторову множеству K. [Использовать упражнения 11 и 12 § 8 главы IV и предложение 6 § 4 главы II.]

6) Множество $L \subset \mathbf{R}^n$ называют *ломаной линией*, если в $\mathbf{R}^n$ существует такая конечная последовательность точек $(\boldsymbol{x}_i)_{0 \leqslant i \leqslant p}$, что L есть объединение замкнутых отрезков S_i с концами $\boldsymbol{x}_{i-1}$ и $\boldsymbol{x}_i$ $(1 \leqslant i \leqslant p)$; S_i называются тогда *сторонами* ломаной L относительно последовательности $(\boldsymbol{x}_i)$ (в $\mathbf{R}^n$ существует вообще бесконечное множество конечных последовательностей точек, определяющих одну и ту же ломаную линию L). Ломаная линия есть также образ отрезка $[0, 1]$ при таком его отображении u в $\mathbf{R}^n$, которое для некоторой строго возрастающей последовательности $(t_j)_{0 \leqslant j \leqslant q}$ в $[0, 1]$ с $t_0 = 0$ и $t_q = 1$ является аффинным линейным отображением $t \longmapsto \boldsymbol{a}_j + t\boldsymbol{b}_j$, когда $t_{j-1} \leqslant t \leqslant t_j$ $(0 \leqslant j \leqslant q)$ (такое отображение u называют «*кусочно линейным*»). Пусть дано непустое множество $A \subset \mathbf{R}^n$; говорят, что две его точки $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ *соединимы ломаной линией в* A, если существует ломаная линия $L \subset A$, определяемая последовательностью $(\boldsymbol{x}_i)_{0 \leqslant i \leqslant p}$, в которой $\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{b}$. Если любые две точки из A соединимы ломаной линией в A, то A связно. Показать, что, обратно, если A — *связное открытое* множество в $\mathbf{R}^n$, то любые две точки из A соединимы ломаной линией в A. [Рассмотреть отношение «$\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ соединимы ломаной линией в A» между точками $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ из A; показать, что это — отношение эквивалентности и классы по нему — открытые множества.] Можно даже всегда предполагать, что эта линия есть объединение отрезков, каждый из которых параллелен одной из координатных осей. [Тот же метод.] Вывести отсюда, что в непустом открытом множестве $A \subset \mathbf{R}^n$ связная компонента всякой точки $\boldsymbol{a} \in A$ есть множество всех точек из A, соединимых с $\boldsymbol{a}$ ломаной линией в A.

7) Пусть A — непустое связное открытое множество в $\mathbf{R}^n$ $(n > 1)$, $(V_p)_{p \in \mathbf{N}}$ — счетное семейство линейных многообразий в $\mathbf{R}^n$, размерность каждого из которых $\leqslant n-2$, и B — объединение всех V_p. Показать, что $A \cap \complement B$ всюду плотно в A и связно. [Доказательство того, что $A \cap \complement B$ всюду плотно в A, провести индукцией по n. Показать затем, что если $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ — две различные точки из A, то для каждого $\varepsilon > 0$ существует такая точка $\boldsymbol{y}' \in A$, что $\| \boldsymbol{y}' - \boldsymbol{y} \| \leqslant \varepsilon$ и замкнутый отрезок с концами $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}'$ не имеет ни одной общей точки с B, кроме $\boldsymbol{x}$. В заключение использовать упражнение 6 для доказательства связности $A \cap \complement B$.]

8) Вывести из упражнения 7, что для $n > 1$ непустое открытое множество в $\mathbf{R}^n$ не гомеоморфно никакому множеству из $\mathbf{R}$ *).

9) Ломаную линию L в $\mathbf{R}^n$ $(n > 1)$ (упражнение 6) называют *простой*, если она гомеоморфна интервалу $I = [0, 1] \subset \mathbf{R}$ или, что равносильно этому, если существует кусочно линейный (упражнение 6) гомеоморфизм u интервала I на L. Показать, что если A — связное открытое множество в $\mathbf{R}^2$ и $L \subset A$ — простая ломаная линия, то $A - L$ связно. [Применить индукцию по числу отрезков, объединением которых служит L, и использовать упражнение 6 § 11 главы I.]

*10) а) Пусть $\mathfrak{M}$ — конечное множество и $R \{ x, y \}$ — симметричное отношение между его элементами. Предположим, что существуют два различных элемента a, b из $\mathfrak{M}$ со следующими свойствами: существуют $x \neq a$ и $y \neq b$ такие, что x (соотв. y) есть единственный элемент $z \in \mathfrak{M}$, для которого $R \{ a, z \}$ (соотв. $R \{ b, z \}$) истинно, и, кроме того, для всякого $t \in \mathfrak{M}$, отличного от a и b, множество тех $z \in \mathfrak{M}$, для которых $R \{ t, z \}$ истинно, есть множество из двух элементов, отличных от t. Показать, что при этих условиях существует такая биекция $i \mapsto x_i$ интервала $[0, n] \subset \mathbf{N}$ на $\mathfrak{M}$, что $x_0 = a$, $x_n = b$ и для всех i таких, что $1 \leqslant i \leqslant n$, справедливо отношение $R \{ x_{i-1}, x_i \}$. [Определить x_i индукцией по i.]

б) Пусть L и L' — ломаные линии в $\mathbf{R}^n$ (где $n \geqslant 2$), отождествленном с $\mathbf{R}^{n-1} \times \mathbf{R}$, определяемые соответственно последовательностями $(\boldsymbol{x}_i)_{0 \leqslant i \leqslant p}$ и $(\boldsymbol{x}'_j)_{0 \leqslant j \leqslant q}$, где $\boldsymbol{x}_i = (\boldsymbol{y}_i, z_i)$, $\boldsymbol{x}'_j = (\boldsymbol{y}'_j, z'_j)$, и обладающие следующими свойствами: 1° $z_0 = z'_0 = 0$, $z_p = z'_q = 1$, $0 < z_i < 1$ $(1 \leqslant i \leqslant p-1)$ и $0 < z'_j < 1$ $(1 \leqslant j \leqslant q-1)$; 2° все $p + q - 2$ чисел z_i, z'_j $(1 \leqslant i \leqslant p-1,\ 1 \leqslant j \leqslant q-1)$ попарно различны; 3° две различные стороны в L (соотв. L') имеют не более одной общей точки (не обязательно совпадающей с одной из точек $\boldsymbol{x}_i$ (соотв. $\boldsymbol{x}'_j$)). Показать, что существуют сюръективные кусочно линейные (упражнение 6) отображения $\boldsymbol{u}\colon I \to L$, $\boldsymbol{u}'\colon I \to L'$, где I — интервал $[0, 1] \subset \mathbf{R}$, а $\boldsymbol{u}(t) = (\boldsymbol{v}(t), \zeta(t))$, $\boldsymbol{u}'(t) = (\boldsymbol{v}'(t), \zeta'(t))$ для $t \in I$,

*) Можно показать, что открытое множество в $\mathbf{R}^m$ не гомеоморфно никакому множеству из $\mathbf{R}^n$ с $n < m$.

такие, что $\zeta(t) = \zeta'(t)$ для *всех* $t \in I$, $\zeta(0) = \zeta'(0) = 0$ и $\zeta(1) = \zeta'(1) = 1$. [Пусть $(a_k)_{1 \leqslant k \leqslant p+q-2}$ — строго возрастающая последовательность тех z_i и z'_j, которые отличны от 0 и 1; положим, кроме того, $a_0 = 0$, $a_{p+q-1} = 1$ и обозначим через B_i $(1 \leqslant i \leqslant p+q-1)$ множество тех $x = (y, z) \in \mathbf{R}^n$, для которых $a_{i-1} \leqslant z \leqslant a_i$. Пусть $\mathfrak{M}$ — множество всех пар $\gamma = (C, C')$, где C (соотв. C') — пересечение *одного и того же* B_i с такой стороной из L (соотв. L'), что ни C, ни C' не сводится к одной точке. Обозначим через $R\{\alpha, \beta\}$ следующее отношение между элементами из $\mathfrak{M}$: «$\alpha \neq \beta$; если $\alpha = (C_1, C'_1)$, $\beta = (C_2, C'_2)$, $C_1 \cap C_2$ и $C'_1 \cap C'_2$ не пусты и одно из них сводится к точке, не совпадающей ни с одним x_i (соотв. x'_j), то C_1 и C_2 (соотв. C'_1 и C'_2) содержатся оба в одной и той же стороне ломаной L (соотв. L')». Показать, что к отношению R можно применить а).]

в) Пусть K — связное компактное множество в $\mathbf{R}^n$, отождествленном с $\mathbf{R}^{n-1} \times \mathbf{R}$, такое, что $K \cap (\mathbf{R}^{n-1} \times \{0\})$ не пусто и не сводится к точке. Показать, что если $K' = K - K$ (множество всех $x - y$, где x, y пробегают K), то $K' \cap (\mathbf{R}^{n-1} \times \{0\})$ содержит связное множество, не сводящееся к точке. [Использовать б), применяя предложение 6 и упражнение 15 § 4 главы II.]

11) Распространить на пространства $\mathbf{R}^n$ $(n \geqslant 2)$ упражнения 14 и 15 § 8 главы IV.

*12) а) Пусть f — отображение $\mathbf{R}$ в $\mathbf{R}$ и $G \subset \mathbf{R}^2$ — его график. Предположим, что G плотно в $\mathbf{R}^2$ и пересекает всякое совершенное множество, содержащееся в $\mathbf{R}^2$ и не содержащееся ни в каком счетном объединении прямых $\{x_n\} \times \mathbf{R}$. Показать, что G связно. [Используя связность $\mathbf{R}$, заметить, что в противном случае в $\mathbf{R}^2$ существовали бы такие непустые открытые множества A, B без общих точек, что G было бы объединением $G \cap A$ и $G \cap B$ и существовали бы по крайней мере одна точка в A и одна точка в B, которые имели бы одну и ту же первую проекцию; в заключение использовать упражнение 11.]

б) Вывести из а) существование *линейного* отображения f пространства $\mathbf{R}$ в себя, график которого G *плотен* в $\mathbf{R}^2$ и *связен*. [Используя а) и упражнение 11, определить трансфинитной индукцией значения f в точках какого-либо базиса Хамеля в $\mathbf{R}$, применяя тот же метод, что и в Теор. мн., гл. III, § 6, упражнение 24.] Вывести отсюда, что подгруппа G группы $\mathbf{R}^2$ удовлетворяет условиям $(\mathrm{R_I})$ и $(\mathrm{R_{II}})$ упражнения 4 § 3 главы V, но не локально компактна, обладая, таким образом, топологией более сильной, чем обычная топология в $\mathbf{R}$; кроме того, G не локально связна.

13) Пусть f — непрерывное отображение открытого множества $A \subset \mathbf{R}^{n-1}$ в $\mathbf{R}$ и S — его график; показать, что подпространство S пространства $\mathbf{R}^n$, отождествленного с $\mathbf{R}^{n-1} \times \mathbf{R}$, гомеоморфно A, а дополнение к S в «цилиндре» $A \times \mathbf{R}$ есть всюду плотное открытое множество в $A \times \mathbf{R}$, имеющее ровно две связные компоненты, когда A связно.

§ 2. Евклидово расстояние; шары и сферы

1. *Евклидово расстояние в* $\mathbf{R}^n$

В соответствии с общими определениями, данными в Алгебре (Алг., гл. IX, § 7, n° 1) *евклидовым расстоянием* между двумя точками $x=(x_i)$ и $y=(y_i)$ пространства $\mathbf{R}^n$ называют число $d(x, y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}\geqslant 0$; напомним его основные свойства: $d(x, y)=0$ равносильно $x=y$; $d(y, x)=d(x, y)$; $d(tx, ty)=|t|\,d(x, y)$ для любого скаляра $t\in\mathbf{R}$; $d(x+z, y+z)=d(x, y)$ для любого $z\in\mathbf{R}^n$, т. е. расстояние между двумя точками *инвариантно относительно переноса*. Расстояние $d(0, x)$ от начала 0 до точки x обозначают также $\|x\|$ и называют *евклидовой нормой* вектора x (или просто *нормой* x, если это не может повести к недоразумению; см. гл. IX, § 3, n° 3); имеем $d(x, y)=\|y-x\|$.

При $n=1$ евклидово расстояние между точками x, y пространства $\mathbf{R}$ сводится к длине $|y-x|$ интервала с концами x, y; при произвольном n $d(x, y)=\|y-x\|$ также называют *длиной* отрезка с концами x, y.

Евклидово расстояние удовлетворяет *неравенству треугольника*

$$d(x, y)\leqslant d(x, z)+d(z, y) \tag{1}$$

при любых $x, y, z\in\mathbf{R}^n$.

Напомним, что доказательство неравенства (1) приводится к доказательству неравенства

$$\Big(\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^2\Big)^{1/2}\leqslant\Big(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\Big)^{1/2}+\Big(\sum_{i=1}^{n}y_i^2\Big)^{1/2},$$

равносильного неравенству Коши

$$\Big(\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\Big)^2\leqslant\Big(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\Big)\Big(\sum_{i=1}^{n}y_i^2\Big);$$

а последнее само является непосредственным следствием тождества Лагранжа:

$$\Big(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\Big)\Big(\sum_{i=1}^{n}y_i^2\Big)-\Big(\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\Big)^2=\frac{1}{2}\sum_{i,\,j}(x_iy_j-x_jy_i)^2.$$

Это доказательство показывает в то же время, что знак равенства в (1) может иметь место, только когда z есть точка отрезка с концами x, y.

Из (1) вытекает неравенство

$$d(x, y) \geqslant |d(x, z) - d(y, z)|. \tag{2}$$

Наконец, если $x = (x_i)$, $y = (y_i)$, то

$$\sup_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i - y_i| \leqslant d(x, y) \leqslant \sqrt{n} \sup_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i - y_i|. \tag{3}$$

Отсюда вытекает, что для того, чтобы множество $A \subset \mathbf{R}^n$ было *ограниченным* (§ 1, n° 1), необходимо и достаточно, чтобы $\sup_{x \in A} \|x\| < +\infty$.

2. *Движения*

Напомним еще (Алг., гл. IX, § 6, n° 6), что аффинные отображения f пространства $\mathbf{R}^n$ на себя, оставляющие *инвариантным* расстояние между любыми двумя точками (т. е. такие, что $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$, каковы бы ни были x и y), называются *евклидовыми движениями* (или просто *движениями*) *); они образуют группу, называемую *группой движений* в $\mathbf{R}^n$. Эта группа действует в $\mathbf{R}^n$ транзитивно; более общим образом, каковы бы ни были аффинные линейные многообразия V и V' в $\mathbf{R}^n$, имеющие одинаковую размерность, всегда существует движение, преобразующее V в V'. Движения, оставляющие инвариантным начало, называют *ортогональными преобразованиями*; они образуют подгруппу группы движений, называемую *ортогональной группой* от n вещественных переменных (Алг., гл. IX, § 6, n° 2); линейные отображения, образующие эту группу, характеризуются тем, что они оставляют инвариантной *норму* $\|x\|$ любой точки $x \in \mathbf{R}^n$, или, что то же, *квадратичную форму* $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$. Напомним, наконец, что *скалярным произведением* двух векторов $x = (x_i)$ и $y = (y_i)$ пространства $\mathbf{R}^n$ называют значение $\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$

---

*) Впрочем, из одного только предположения, что $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$ при любых x и y, уже следует, что f есть аффинное отображение и, значит, движение (см. Алг., гл. IX, § 6, упражнение 21).

билинейной формы, ассоциированной (Алг., гл. IX, § 3, n° 4) с квадратичной формой $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2$; оно обозначается $(x \mid y)$ или просто xy, если можно не опасаться недоразумения; всякое ортогональное преобразование оставляет инвариантным скалярное произведение любых двух векторов. Векторы x, y называют *ортогональными*, если $(x \mid y) = 0$; два векторных подпространства V, V' пространства $\mathbf{R}^n$ называют *ортогональными*, если всякий вектор $x \in V$ ортогонален ко всякому вектору $y \in V'$; два аффинных линейных многообразия P, P' называют *ортогональными*, если ортогональны векторные подпространства, параллельные соответственно P и P'.

3. Евклидовы шары и сферы

Пусть p — любое целое >0; обозначим через U_p множество тех пар (x, y) точек из $\mathbf{R}^n$, для которых $d(x, y) < \frac{1}{p}$; неравенства (3) показывают, что множества U_p образуют *фундаментальную систему окружений* равномерной структуры пространства $\mathbf{R}^n$ (см. гл. IX, § 2).

Отсюда и из неравенства

$$|d(x, y) - d(x', y')| \leqslant d(x, x') + d(y, y'),$$

являющегося следствием неравенства (1), вытекает, что $d(x, y)$ *равномерно непрерывно* на $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$; следовательно, норма $\|x\| = d(0, x)$ *равномерно непрерывна* на $\mathbf{R}^n$.

Определение 1. *Пусть даны точка* $x_0 \in \mathbf{R}^n$ *и число* $r > 0$; *открытым* (соотв. *замкнутым*) *n-мерным евклидовым шаром с центром x_0 и радиусом r называют множество тех точек $x \in \mathbf{R}^n$, для которых $d(x_0, x) < r$* (соотв. $d(x_0, x) \leqslant r$); *$(n-1)$-мерной евклидовой сферой с центром x_0 и радиусом r называют множество тех точек x, для которых $d(x_0, x) = r$.*

Когда нет опасности недоразумений, вместо «евклидов шар» (соотв. «евклидова сфера») говорят просто «шар» (соотв. «сфера»). При $n = 2$ вместо «двумерный шар» говорят «круг» и вместо «одномерная сфера» — «окружность».

При $n = 1$ открытый (соотв. замкнутый) шар с центром x_0 и радиусом r есть интервал $]x_0 - r, x_0 + r[$ (соотв. $[x_0 - r, x_0 + r]$); сфера с центром в x_0 и радиусом r есть множество, состоящее из концов $x_0 - r$, $x_0 + r$ этих интервалов.

Согласно предшествующему всевозможные (открытые или замкнутые) шары с центром x_0 (или только те из них, которые имеют радиус $\frac{1}{p}$, где p пробегает множество всех целых чисел >0) образуют *фундаментальную систему окрестностей точки* x_0.

Предложение 1. *Всякий открытый* (соотв. *замкнутый*) *шар в* $\mathbf{R}^n$ *есть открытое* (соотв. *компактное*) *множество. Замыкание открытого шара есть замкнутый шар с теми же центром и радиусом; внутренность замкнутого шара есть открытый шар с теми же центром и радиусом.*

Открытый (соотв. замкнутый) шар с центром x_0 и радиусом r есть прообраз интервала $]-\infty, r[$ (соотв. $]-\infty, r]$) относительно непрерывной функции $d(x_0, x)$, следовательно, это — открытое (соотв. замкнутое и ограниченное, а потому компактное) множество. Пусть $d(x_0, x)=r$ и $y=x_0+t(x-x_0)$ $(0<t<1)$ — точка открытого отрезка с концами x_0 и x; тогда $d(x_0, y) = tr < r$, причем $d(x, y) = (1-t)r$ может быть сколь угодно малым; следовательно, x есть точка прикосновения открытого шара с центром x_0 и радиусом r. Точно так же, если $z = x + t(x-x_0)$ $(t>0)$ — точка открытой полупрямой с началом x и направляющим вектором $x-x_0$, то $d(x_0, z) = (1+t)r > r$, причем $d(x, z) = tr$ может быть сколь угодно малым; следовательно, x не будет внутренней для замкнутого шара с центром x_0 и радиусом r.

Следствие. *Всякая евклидова сфера есть компактное множество, являющееся границей открытого и замкнутого шаров с теми же центром и радиусом.*

Отображение $x \mapsto \frac{1}{r}(x-x_0)$ преобразует сферу (соотв. открытый шар, замкнутый шар) с центром x_0 и радиусом r в сферу (соотв. открытый шар, замкнутый шар) с центром 0 и радиусом 1; эту сферу обозначают $\mathbf{S}_{n-1}$ и называют *единичной сферой* пространства $\mathbf{R}^n$; через $\mathbf{B}_n$ обозначается *замкнутый* шар с центром 0 и радиусом 1, называемый *единичным шаром* пространства $\mathbf{R}^n$. Таким образом, топологическое изучение $(n-1)$-мерной сферы (соотв. замкнутого n-мерного шара) сводится к топологическому изучению сферы $\mathbf{S}_{n-1}$ (соотв. шара $\mathbf{B}_n$). Что касается открытых шаров, то имеет место следующее предложение:

Предложение 2. *Всякий открытый n-мерный шар гомеоморфен* $\mathbf{R}^n$.

В самом деле, отображение $x \mapsto \frac{x}{1+\|x\|}$ непрерывно на $\mathbf{R}^n$ и преобразует $\mathbf{R}^n$ в открытый шар с центром 0 и радиусом 1; так как при этом из $y = \frac{x}{1+\|x\|}$ вытекает $x = \frac{y}{1-\|y\|}$, то указанное отображение биективно и взаимно непрерывно.

Обозначим через $\mathbf{R}_n^*$ дополнение к 0 в $\mathbf{R}^n$.

Предложение 3. *Пространство* $\mathbf{R}_n^*$ *гомеоморфно произведению сферы* $\mathbf{S}_{n-1}$ *на множество* $\mathbf{R}_+^*$ *всех чисел* >0.

В самом деле, каждая точка $x \neq 0$ может быть записана, и притом единственным образом, в виде tz, где $t > 0$ и $\|z\| = 1$, ибо из $x = tz$ следует $t = \|x\|$ и $z = \frac{x}{\|x\|}$. Но tz непрерывно на произведении $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$, значит, тем более на $\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{S}_{n-1}$, а $\|x\|$ и $\frac{1}{\|x\|}$ непрерывны на $\mathbf{R}_n^*$; отсюда и вытекает справедливость утверждения.

Отображение $x \mapsto \frac{x}{\|x\|}$ называется *центральным проектированием* пространства $\mathbf{R}_n^*$ на $\mathbf{S}_{n-1}$. Так же определяется *центральное проектирование* дополнения к точке a на сферу с центром a.

Следствие 1. *Сфера* $\mathbf{S}_{n-1}$ *гомеоморфна факторпространству пространства* $\mathbf{R}_n^*$ *по отношению эквивалентности, классами которого служат открытые полупрямые с началом* 0.

Эти классы можно было бы также определить как отличные от $\{0\}$ *классы интранзитивности* группы гомотетий с коэффициентами >0.

Следствие 2. *Пространство* $\mathbf{R}_n^*$ *гомеоморфно* $\mathbf{R} \times \mathbf{S}_{n-1}$.

В самом деле, $\mathbf{R}_+^* =]0, +\infty[$ гомеоморфно $\mathbf{R}$ (гл. IV, § 4, предложение 1).

Замечание. Приведенные предложения не являются специфическими для евклидовых шаров, допуская распространение на целую категорию компактных окрестностей нуля пространства $\mathbf{R}^n$ (см. упражнение 12).

Множества $\mathbf{S}_{n-1}$ и $\mathbf{B}_n$, очевидно, инвариантны относительно любых ортогональных преобразований. Для каждого p-мерного векторного подпространства V пространства $\mathbf{R}^n$ существует ортогональное преобразование, переводящее V в p-мерное координатное многообразие; отсюда вытекает, что $V \cap \mathbf{S}_{n-1}$ (соотв. $V \cap \mathbf{B}_n$) гомеоморфно $\mathbf{S}_{p-1}$ (соотв. $\mathbf{B}_p$).

4. *Стереографическая проекция*

Рассмотрим точку $\boldsymbol{e}_n = (0, \ldots, 0, 1)$ сферы $\mathbf{S}_{n-1}$ и гиперплоскость H с уравнением $x_n = 0$, ортогональную к вектору $\boldsymbol{e}_n$. Каждой отличной от $\boldsymbol{e}_n$ точке $\boldsymbol{x} = (x_i)$ сферы $\mathbf{S}_{n-1}$ сопоставим

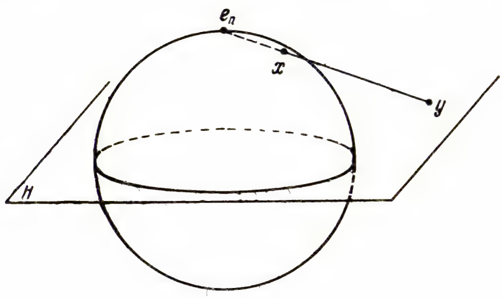

Рис. 4.

точку $\boldsymbol{y}$ пересечения прямой, проходящей через $\boldsymbol{e}_n$ и $\boldsymbol{x}$, с гиперплоскостью H (рис. 4). Легко видеть, что $\boldsymbol{y} = \frac{1}{1-x_n}(\boldsymbol{x} - x_n \boldsymbol{e}_n)$ и $\boldsymbol{x} = \frac{\|\boldsymbol{y}\|^2-1}{\|\boldsymbol{y}\|^2+1}\boldsymbol{e}_n + \frac{2}{\|\boldsymbol{y}\|^2+1}\boldsymbol{y}$.

Эти формулы показывают, что описанное отображение определяет *гомеоморфизм* дополнения A к $\{\boldsymbol{e}_n\}$ относительно $\mathbf{S}_{n-1}$ *на* гиперплоскость H. Этот гомеоморфизм называют *стереографической проекцией* A на H или, допуская вольность речи, стереографической проекцией $\mathbf{S}_{n-1}$ на H (см. Алг., гл. IX, § 10, упражнение 14); $\boldsymbol{e}_n$ называют при этом *центром* проекции, а H — *гиперплоскостью проекции*. Таким же образом определяется стереографическая проекция с центром $\boldsymbol{a}$ на гиперплоскость проекции H' в том более общем случае, когда H' — произвольная гиперплоскость, проходящая через 0 (*диаметральная гиперплоскость шара*

$\mathbf{B}_n$), и $\boldsymbol{a}$ — одна из точек пересечения $\mathbf{S}_{n-1}$ с прямой, проходящей через 0 ортогонально к H'; впрочем, эта проекция приводится к предыдущей посредством ортогонального преобразования, переводящего H' в H и $\boldsymbol{a}$ в $\boldsymbol{e}_n$.

Предложение 4. *При $n > 1$ евклидова сфера $\mathbf{S}_{n-1}$ гомеоморфна числовому пространству $\mathbf{R}^{n-1}$, расширенному до компактного пространства путем присоединения «бесконечно удаленной точки»* (гл. I, § 9, теорема 4).

В самом деле, стереографическая проекция устанавливает гомеоморфизм между дополнением к точке в $\mathbf{S}_{n-1}$ и гиперплоскостью в $\mathbf{R}^n$, гомеоморфной $\mathbf{R}^{n-1}$.

Следствие 1. *Сфера $\mathbf{S}_n$ гомеоморфна факторпространству шара $\mathbf{B}_n$, полученному путем отождествления всех точек сферы $\mathbf{S}_{n-1}$.*

В самом деле, шар $\mathbf{B}_n$ есть *регулярное* пространство (гл. I, § 8, n° 4); поэтому факторпространство F пространства $\mathbf{B}_n$, полученное путем отождествления всех точек сферы $\mathbf{S}_{n-1}$, *отделимо* (гл. I, § 8, предложение 15). Так как $\mathbf{B}_n$ — компактное пространство, то F компактно и, следовательно, в силу теоремы Александрова (гл. I, § 9, теорема 4) гомеоморфно открытому n-мерному шару, расширенному до компактного пространства путем присоединения бесконечно удаленной точки; поэтому утверждаемое следствие вытекает из предложений 2 и 4.

В частности, при $n = 1$, принимая во внимание предложение 4 § 1 главы V, получаем:

Следствие 2. *Окружность $\mathbf{S}_1$ гомеоморфна тору $\mathbf{T}$.*

В гл. VIII, § 2, n° 1, мы вновь получим это предложение как следствие более точной теоремы.

Предложение 5. *При $n > 1$ евклидова сфера $\mathbf{S}_{n-1}$ есть связное локально связное пространство, каждая точка которого обладает открытой окрестностью, гомеоморфной $\mathbf{R}^{n-1}$.*

В самом деле, дополнение к точке в $\mathbf{S}_{n-1}$ есть всюду плотное связное множество, так что (гл. I, § 11, предложение 1) сфера $\mathbf{S}_{n-1}$ связна. Чтобы убедиться в том, что всякая ее точка обладает окрестностью, гомеоморфной $\mathbf{R}^{n-1}$, достаточно выполнить стереографическую проекцию с центром, отличным от этой точки.

Из этого предложения и предложения 3 вытекает, что $\mathbf{R}_n^*$, будучи произведением двух связных пространств, связно (гл. I, § 11, предложение 8; см. § 1, упражнение 10).

$(n-1)$-мерной *замкнутой* (соотв. *открытой*) *полусферой* называют пересечение $\mathbf{S}_{n-1}$ с *замкнутым* (соотв. *открытым*) *полупространством*, определяемым диаметральной гиперплоскостью шара $\mathbf{B}_n$; посредством стереографической проекции на такую гиперплоскость замкнутая (соотв. открытая) полусфера, не содержащая центра проекции, отображается на *замкнутый* (соотв. *открытый*) $(n-1)$-мерный *шар*, которому она тем самым *гомеоморфна*.

При $n = 2$ вместо «полусфера» говорят «полуокружность».

Упражнения

°1) Пусть I — замкнутый куб в $\mathbf{R}^n$, являющийся произведением n экземпляров интервала $\left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]$. Каждой точке $x = (x_i) \in I$ сопоставим точку $y = (y_i) \in \mathbf{R}^{n+1}$, для которой

$$y_1 = \sin x_1,$$
$$y_p = \cos x_1 \cos x_2 \ldots \cos x_{p-1} \sin x_p \quad (2 \leqslant p \leqslant n-1),$$
$$y_n = \cos x_1 \cos x_2 \ldots \cos x_{n-1} \sin 2x_n,$$
$$y_{n+1} = \cos x_1 \cos x_2 \ldots \cos x_{n-1} \cos 2x_n.$$

Показать, что образом куба I при этом отображении служит сфера $\mathbf{S}_n$ и что сужение этого отображения на внутренность I есть гомеоморфизм на всюду плотное открытое множество в $\mathbf{S}_n$.$_\circ$

2) Определить гомеоморфизм произведения $\mathbf{S}_p \times \mathbf{S}_q$ на часть сферы $\mathbf{S}_{p+q+1}$. [Принять во внимание, что уравнение этой сферы записывается в виде $(x_1^2 + \ldots + x_{p+1}^2) + (x_{p+2}^2 + \ldots + x_{p+q+2}^2) = 1$.]

3) а) Показать, что непрерывное отображение f окружности $\mathbf{S}_1$ в $\mathbf{R}^n$ может быть продолжено до непрерывного отображения круга $\mathbf{B}_2$ в $\mathbf{R}^n$. [Точке $tx \in \mathbf{B}_2$ $(t \geqslant 0,\ x \in \mathbf{S}_1)$ сопоставить точку $tf(x)$.]

б) Вывести отсюда, что непрерывное отображение f окружности $\mathbf{S}_1$ в $\mathbf{S}_n$ такое, что $f(\mathbf{S}_1) \neq \mathbf{S}_n$, может быть продолжено до непрерывного отображения круга $\mathbf{B}_2$ в $\mathbf{S}_n$ [воспользоваться стереографической проекцией с центром, не принадлежащим $f(\mathbf{S}_1)$] *).

4) Показать, что не существует никакого гомеоморфизма окружности $\mathbf{S}_1$ в $\mathbf{R}$. [Принять во внимание, что дополнение к любой точке в $\mathbf{S}_1$ связно и что всякое связное множество в $\mathbf{R}$ есть интервал.]

---

*) Ниже мы увидим, что при $n > 1$ предложение остается верным также в случае $f(\mathbf{S}_1) = \mathbf{S}_n$.

Вывести отсюда, что всякий гомеоморфизм $\mathbf{S}_1$ на свое подпространство необходимо является гомеоморфизмом $\mathbf{S}_1$ *на себя*. [Использовать предложение 4.]

5) Показать, что сфера $\mathbf{S}_n$, где $n > 1$, не гомеоморфна окружности $\mathbf{S}_1$. [См. § 1, упражнение 8.]

6) Отождествив $\mathbf{S}_1$ с тором $\mathbf{T}$, т. е. факторпространством пространства $\mathbf{R}$ по отношению $x \equiv y \pmod 1$ (следствие 2 предложения 4), обозначим через φ каноническое отображение $\mathbf{R}$ на $\mathbf{S}_1$. Непрерывное отображение f топологического пространства E в $\mathbf{S}_1$ называется *несущественным*, если существует непрерывное отображение g пространства E в $\mathbf{R}$ такое, что $f = \varphi \circ g$ *); отображение, не являющееся несущественным, называется *существенным*.

Показать, что тождественное отображение $\mathbf{S}_1$ на $\mathbf{S}_1$ существенно. [Использовать упражнение 4.]

7) Показать, что существует окружение U равномерной структуры в $\mathbf{S}_1$ такое, что если f — несущественное отображение топологического пространства E в $\mathbf{S}_1$, то всякое непрерывное отображение f' пространства E в $\mathbf{S}_1$ такое, что $(f(x), f'(x)) \in U$ при любом $x \in E$, тоже несущественно.

8) Показать, что не существует непрерывного отображения f круга $\mathbf{B}_2$ на $\mathbf{S}_1$, которое бы совпадало на $\mathbf{S}_1$ с тождественным отображением. [Используя упражнение 7, показать, что сужение f на окружность с центром 0 и радиусом $r \leqslant 1$ было бы всегда несущественным отображением этой окружности в $\mathbf{S}_1$, и получить отсюда противоречие при $r = 1$.]

9) Пусть E — топологическое пространство, содержащее более одной точки. Показать, что существует непрерывное отображение f окружности $\mathbf{S}_1$ в произведение $F = E \times \mathbf{S}_1$, удовлетворяющее условию $f(\mathbf{S}_1) \neq F$ и не допускающее продолжения до непрерывного отображения круга $\mathbf{B}_2$ в F. [Использовать упражнение 8.] Вывести отсюда, что $\mathbf{S}_n$, $\mathbf{R}^n$ и $\mathbf{B}_n$ при $n > 1$ не гомеоморфны никакому пространству вида $E \times \mathbf{S}_1$, где E — любое топологическое пространство. [См. упражнение 3.] В частности, $\mathbf{S}_n$ при $n > 1$ не гомеоморфно $(\mathbf{S}_1)^n$, а $\mathbf{B}_n$ не гомеоморфно $(\mathbf{S}_1)^n$ ни при каком n.

Показать также, что $\mathbf{R}^2$ не гомеоморфно дополнению к точке в $\mathbf{R}^2$ и что $\mathbf{S}_2$ не гомеоморфно $\mathbf{B}_2$. [В противном случае $\mathbf{R}^2$ было бы гомеоморфно произведению окружности $\mathbf{S}_1$ на интервал $]0, 1[$.]

10) Обозначим через $H_{n,\,p,\,q}$ (где $p + q \leqslant n$) «квадрику», определяемую в $\mathbf{R}^n$ уравнением $x_1^2 + \ldots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \ldots - x_{p+q}^2 = 1$. Показать, что $H_{n,\,p,\,q}$ гомеоморфно произведению $\mathbf{S}_{p-1} \times \mathbf{R}^{n-p}$.

*) В последующем будет дано общее определение несущественного отображения топологического пространства в произвольное топологическое пространство и будет показано, что для отображения в $\mathbf{S}_1$ это определение равносильно только что данному.

11) Пусть $C_{n,p}$ — «конус второго порядка», определяемый в $\mathbf{R}^n$ уравнением

$$x_1^2+\ldots+x_p^2-x_{p+1}^2-\ldots-x_n^2=0 \qquad (1\leqslant p\leqslant n-1).$$

Показать, что дополнение к точке 0 в $C_{n,p}$ гомеоморфно произведению $\mathbf{S}_{p-1}\times\mathbf{S}_{n-p-1}\times\mathbf{R}$.

*12) Множество $E\subset\mathbf{R}^n$, содержащее 0, называют *звездным* (относительно точки 0), если $tx\in E$, каковы бы ни были $x\in E$ и $t\in[0, 1]$. Пересечение множества E с замкнутой полупрямой, выходящей из точки 0, есть либо вся эта полупрямая, либо отрезок с одним из концов в этой точке. *Скорлупой* множества E называется множество K, образованное концами этих отрезков, отличными от точки 0, и точкой 0, если к ней сводится пересечение некоторой полупрямой с E. Ниже предполагается, что $0\notin K$.

а) Показать, что скорлупа множества E содержится в его границе; дать пример, в котором эти два множества различны.

б) Показать, что если скорлупа K множества E компактна, то существует гомеоморфизм $\mathbf{R}^n$ на себя, отображающий K на $\mathbf{S}_{n-1}$, $\overline{E}$ на $\mathbf{B}_n$ и внутренность E на внутренность $\mathbf{B}_n$. [Сопоставить каждой точке $x\in K$ ее центральную проекцию на $\mathbf{S}_{n-1}$ и затем продолжить это отображение на всё $\mathbf{R}^n$.] Вывести отсюда, что граница множества E совпадает с его скорлупой K, а внутренность E — с множеством точек tx, где x пробегает K, а t — интервал $[0, 1[\ \subset\mathbf{R}$.

в) Если E неограниченно и его граница совпадает с его скорлупой K, то внутренность E гомеоморфна пространству $\mathbf{R}^n$, а K — открытому подмножеству сферы $\mathbf{S}_{n-1}$. [Показать, что образ E при гомеоморфизме $x\mapsto\dfrac{x}{1+\|x\|}$ удовлетворяет условиям пункта б).]

г) Дать пример неограниченного звездного множества E, скорлупа которого замкнута, но не совпадает с границей множества.

13) Показать, что в пространстве $\mathbf{S}_n$ $(n>1)$ граница непустого открытого множества, внешность которого не пуста, имеет мощность континуума. [Использовать предложение 4.]

§ 3. Вещественные проективные пространства

В настоящем параграфе мы будем постоянно пользоваться понятиями и результатами, относящимися к *факторпространствам* (гл. I, § 3), и особенно следующими двумя свойствами, которые для удобства сформулируем в виде лемм.

Пусть E — топологическое пространство, R — отношение эквивалентности в E, $A\subset E$, R_A — отношение эквивалентности, индуцируемое в A отношением R; пусть, наконец, f — каноническое отображение H на E/R. В этих обозначениях имеем:

Лемма 1. *Если всякое открытое* (соотв. *замкнутое*) *множество в* A, *насыщенное по отношению* R_A, *является следом на* A *некоторого открытого* (соотв. *замкнутого*) *множества из* E, *насыщенного по отношению* R, *то факторпространство* A/R_A *гомеоморфно подпространству* $f(A)$ *пространства* E/R. *В частности, это имеет место, если* A *открыто или замкнуто в* E *и насыщено по отношению* R.

Это вытекает из предложения 10 § 3 главы I.

Лемма 2. *Если существует непрерывное отображение* g *пространства* E *на* A *такое, что* $g(x)$ *при любом* $x \in E$ *принадлежит классу эквивалентности элемента* x, *то факторпространство* A/R_A *гомеоморфно* E/R.

Это — не что иное, как следствие 2 предложения 10 § 3 главы I.

1. Топология вещественных проективных пространств

Напомним следующие понятия, определенные в Алгебре (Алг., гл. II, 2-е изд., Приложение III; 3-е изд., § 9, n° 5). Пусть дано тело K (коммутативное или нет); множество всех *прямых*, проходящих через 0 (одномерных векторных подпространств), левого векторного пространства K_s^{n+1} над телом K называется *n-мерным левым проективным пространством над телом* K и обозначается $\mathbf{P}_n(K)$.

Если каждой прямой пространства K_s^{n+1}, проходящей через 0, сопоставить ту же прямую, *лишенную начала*, то этим определится биекция $\mathbf{P}_n(K)$ на *фактормножество* множества K_{n+1}^* (дополнительного к $\{0\}$ в K_s^{n+1}) по следующему отношению эквивалентности $\Delta_n(K)$ между векторами $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ из K_{n+1}^*: «в K существует $t \neq 0$ такое, что $\boldsymbol{y} = t\boldsymbol{x}$». Мы будем в дальнейшем *отождествлять* $\mathbf{P}_n(K)$ с этим фактормножеством. В теории проективных пространств в качестве множества индексов координат точки пространства K_s^{n+1} берется интервал $[0, n] \subset \mathbf{N}$. Координаты x_i $(0 \leqslant i \leqslant n)$ любой точки из K_{n+1}^*, каноническим образом которой является точка $x \in \mathbf{P}_n(K)$, образуют так называемую *систему однородных координат* точки x (Алг., гл. II, 3-е изд., § 9, n° 6).

p-мерным проективным линейным многообразием в пространстве $\mathbf{P}_n(K)$ для каждого целого p такого, что $-1 \leqslant p \leqslant n$,

называют канонический образ в $\mathbf{P}_n(K)$ $(p+1)$-мерного векторного подпространства (без начала) пространства K_s^{n+1}. Система p точек из $\mathbf{P}_n(K)$ называется *свободной*, если она состоит из канонических образов p точек, принадлежащих K_{n+1}^* и образующих *свободную* систему в векторном пространстве K_s^{n+1}; проективное линейное многообразие в $\mathbf{P}_n(K)$, порожденное свободной системой $p+1$ точек (т. е. наименьшее проективное линейное многообразие, содержащее эти $p+1$ точек), p-мерно.

Если K — поле $\mathbf{R}$ вещественных чисел, то соответствующие проективные пространства можно наделить *топологиями*, которые мы и подвергнем изучению.

Определение 1. *n-мерным вещественным проективным пространством называют проективное пространство* $\mathbf{P}_n(\mathbf{R})$, *наделенное фактортопологией топологии пространства* $\mathbf{R}_{n+1}^*$ *по отношению эквивалентности* $\Delta_n(\mathbf{R})$.

Проективное пространство $\mathbf{P}_1(\mathbf{R})$ называется *вещественной проективной прямой*, а проективное пространство $\mathbf{P}_2(\mathbf{R})$ — *вещественной проективной плоскостью*.

Там, где не сможет возникнуть никаких недоразумений, мы вместо $\mathbf{P}_n(\mathbf{R})$ и $\Delta_n(\mathbf{R})$ будем писать $\mathbf{P}_n$ и Δ_n.

Предложение 1. *Проективное пространство* $\mathbf{P}_n$ *отделимо.*

Покажем сначала, что отношение Δ_n *открыто* (гл. I, § 5, n° 2). Пусть A — открытое множество в $\mathbf{R}_{n+1}^*$; чтобы насытить A по отношению Δ_n, следует образовать объединение гомотетичных образов tA множества A, где t пробегает множество всех вещественных чисел $\neq 0$; так как каждое из этих множеств открыто, то открыто и их объединение.

По предложению 8 § 8 главы I, предложение 1 будет доказано, если мы докажем, что множество $M \subset \mathbf{R}_{n+1}^* \times \mathbf{R}_{n+1}^*$, определяемое отношением Δ_n, *замкнуто*. Но пусть $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \mathbf{R}_{n+1}^* \times \mathbf{R}_{n+1}^*$ есть точка прикосновения множества M. Если $\boldsymbol{x} = (x_i)$, то существует координата $x_i \neq 0$; следовательно, существует окрестность V точки $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ такая, что, какова бы ни была точка $(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}') \in M \cap V$, координата x_i' с номером i точки $\boldsymbol{x}'$ будет отлична от 0; когда $(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}')$ стремится к $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, оставаясь в M, $y_i' x_i'^{-1}$ стремится к $t = y_i x_i^{-1}$, и так как $\boldsymbol{y}' = (y_i' x_i'^{-1})\boldsymbol{x}'$, то, переходя к пределу, заключаем, что $\boldsymbol{y} = t\boldsymbol{x}$, чем и доказано, что $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in M$.

Предложение 2. *Проективное пространство* $\mathbf{P}_n$ *есть связное компактное пространство, гомеоморфное факторпространству сферы* $\mathbf{S}_n$ *по отношению эквивалентности, индуцируемому в* $\mathbf{S}_n$ *отношением* Δ_n.

Пусть Δ'_n — отношение эквивалентности, индуцируемое в $\mathbf{S}_n$ отношением Δ_n (так что классами эквивалентности по Δ'_n служат пары *диаметрально противоположных* точек сферы $\mathbf{S}_n$). Так как отображение $x \mapsto \frac{x}{\|x\|}$ пространства $\mathbf{R}^*_{n+1}$ на $\mathbf{S}_n$ непрерывно, то (лемма 2) $\mathbf{P}_n$ гомеоморфно $\mathbf{S}_n/\Delta'_n$. Но сфера $\mathbf{S}_n$ компактна и связна, а потому и всякое ее отделимое факторпространство компактно и связно (гл. I, § 9, следствие 1 теоремы 2 и § 11, предложение 7).

Предложение 3. *При* $n \geqslant 0$ *проективное пространство* $\mathbf{P}_n$ *гомеоморфно факторпространству шара* $\mathbf{B}_n$, *полученному путем отождествления каждой точки сферы* $\mathbf{S}_{n-1}$ *с диаметрально противоположной точкой.*

Пусть H — замкнутая полусфера сферы $\mathbf{S}_n$, определяемая неравенством $x_0 \leqslant 0$. Пространство $\mathbf{P}_n$, гомеоморфное факторпространству пространства $\mathbf{S}_n$ по отношению Δ'_n (предложение 2), гомеоморфно также факторпространству части H сферы $\mathbf{S}_n$ по отношению Δ''_n, индуцируемому в H отношением Δ'_n. В самом деле, каждый класс эквивалентности по отношению Δ'_n пересекается с H по крайней мере в одной точке, а потому достаточно (лемма 1) проверить, что при насыщении по Δ'_n множества $U \subset H$, открытого в H и насыщенного по Δ''_n, получается открытое множество V в $\mathbf{S}_n$. Но если $\boldsymbol{a} = (a_i) \in U$ и $a_0 < 0$, то существует окрестность W точки $\boldsymbol{a}$ *в* $\mathbf{S}_n$, содержащаяся в U; объединение W и $-W$ будет окрестностью $\boldsymbol{a}$, насыщенной по отношению Δ'_n и содержащейся в V. Если, напротив, $a_0 = 0$, то $-\boldsymbol{a} \in U$ и существует $r > 0$ такое, что множество всех точек $x \in H$, удовлетворяющих одному из неравенств $\|x - \boldsymbol{a}\| < r$, $\|x + \boldsymbol{a}\| < r$, содержится в U; множество всех точек $x \in \mathbf{S}_n$, удовлетворяющих тому или другому из этих неравенств, будет окрестностью точки $\boldsymbol{a}$, насыщенной по отношению Δ'_n и содержащейся в V.

Заметим, что факторпространство H/Δ''_n получается путем отождествления в H каждой точки пересечения $\mathbf{S}_{n-1}$ полусферы H и гиперплоскости $x_0 = 0$ с диаметрально противоположной

точкой. Для завершения доказательства достаточно заметить, что стереографическая проекция с центром e_0 (§ 2, n° 4) является гомеоморфизмом H на $\mathbf{B}_n$, оставляющим инвариантными точки сферы $\mathbf{S}_{n-1}$.

2. *Проективные линейные многообразия*

Напомним (Алг., гл. II, 2-е изд., Приложение III; 3-е изд., § 9, n° 10), что всякое инъективное линейное отображение f пространства $\mathbf{R}^{n+1}$ в $\mathbf{R}^{m+1}$ ($m \geqslant n$) определяет путем сужения на $\mathbf{R}^*_{n+1}$ с последующей факторизацией по отношениям Δ_n и Δ_m (Теор. мн., Сводка результ., § 5, n° 8) инъективное отображение g пространства $\mathbf{P}_n$ в $\mathbf{P}_m$, называемое *проективным линейным отображением.* Пусть φ и ψ — канонические отображения $\mathbf{R}^*_{n+1}$ на $\mathbf{P}_n$ и $\mathbf{R}^*_{m+1}$ на $\mathbf{P}_m$ соответственно; тогда $g \circ \varphi = \psi \circ f$, что доказывает *непрерывность* g на $\mathbf{P}_n$ (гл. I, § 3, следствие предложения 6). В частности, всякое *проективное линейное преобразование* пространства $\mathbf{P}_n$ (т. е. проективное линейное отображение $\mathbf{P}_n$ *на* себя) есть *гомеоморфизм* $\mathbf{P}_n$ на себя.

Напомним также, что для любых двух p-мерных проективных линейных многообразий V, $V' \subset \mathbf{P}_n$ существует проективное линейное преобразование пространства $\mathbf{P}_n$, переводящее V в V'. В частности, при $p \geqslant 0$ существует проективное линейное преобразование, переводящее V в *координатное* p-мерное проективное линейное многообразие V' пространства $\mathbf{P}_n$, т. е. в канонический образ $(p+1)$-мерного координатного многообразия W' (без точки 0) пространства $\mathbf{R}^{n+1}$. При отождествлении W' с $\mathbf{R}^*_{p+1}$ отношение, индуцируемое в W' отношением Δ_n, будет не чем иным, как Δ_p; поскольку W' замкнуто и насыщено по отношению Δ_n, лемма 1 показывает, что V' гомеоморфно $\mathbf{P}_p$ и замкнуто в $\mathbf{P}_n$; при этом, если $p < n$, дополнение к V' в $\mathbf{P}_n$ всюду плотно (§ 1, следствие предложения 3). Таким образом:

Предложение 4. *Всякое p-мерное проективное линейное многообразие проективного пространства $\mathbf{P}_n$ замкнуто в $\mathbf{P}_n$ и гомеоморфно $\mathbf{P}_p$; если $p < n$, то его дополнение всюду плотно.*

Исходя из этого результата, *одномерное* (соотв. *двумерное*) проективное линейное многообразие в проективном пространстве

над произвольным телом именуют *проективной прямой* (соотв. *проективной плоскостью*) (Алг., гл. II, 2-е изд., Приложение III; 3-е изд., § 9, n° 7). Напомним также, что (n — 1)-мерное проективное линейное многообразие в $\mathbf{P}_n$ называют *проективной гиперплоскостью*; всякая проективная гиперплоскость совпадает с множеством точек, однородные координаты которых удовлетворяют соотношению вида $\sum_{i=0}^{n} a_i x_i = 0$, где не все a_i равны нулю («уравнение» гиперплоскости).

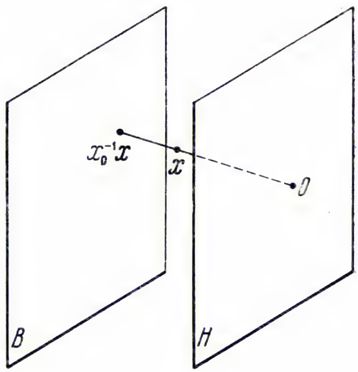

Рис. 5.

Предложение 5. *В проективном пространстве* $\mathbf{P}_n$ ($n \geqslant 0$) *дополнение к проективной гиперплоскости* H *гомеоморфно* $\mathbf{R}^n$.

Посредством проективного линейного преобразования дело сводится к тому случаю, когда H есть гиперплоскость, заданная уравнением $x_0 = 0$. Множество A тех точек $x = (x_i) \in \mathbf{R}^*_{n+1}$, для которых $x_0 \neq 0$, открыто и насыщено по отношению Δ_n; следовательно, его канонический образ C в $\mathbf{P}_n$, являющийся дополнением к H в $\mathbf{P}_n$, гомеоморфен фактормножеству множества A по отношению эквивалентности Θ, индуцированному в A отношением Δ_n (лемма 1). Пусть B — гиперплоскость в $\mathbf{R}^{n+1}$, определяемая уравнением $x_0 = 1$; сопоставим каждой точке $x \in A$ точку $x_0^{-1}x$, в которой прямая, проходящая через 0 и x, пересекает B (рис. 5); этим определится непрерывное отображение g множества A на B такое, что $g(x)$ будет единственной точкой из B, эквивалентной x по отношению Θ; отсюда следует, что B гомеоморфно A/Θ (лемма 2), а значит, и C; поскольку B гомеоморфно $\mathbf{R}^n$, предложение доказано.

Следствие. *Всякая точка пространства* $\mathbf{P}_n$ *обладает открытой окрестностью, гомеоморфной* $\mathbf{R}^n$.

Отсюда, в частности, следует, что вещественные проективные пространства *локально связны* (что вытекает также из предложения 12 § 11 главы I).

3. *Погружение числового пространства в проективное пространство*

Предложение 5 показывает, что для каждой заданной проективной гиперплоскости H в $\mathbf{P}_n$ $(n \geqslant 0)$ существует гомеоморфизм пространства $\mathbf{R}^n$ на ее дополнение $\complement H$. Как только H выбрана, часто бывает удобно *отождествлять* пространство $\mathbf{R}^n$ с $\complement H$ посредством гомеоморфизма, определенного в предложении 5; проективную гиперплоскость H, а также принадлежащие ей точки и множества называют тогда «бесконечно удаленными». Чаще всего в качестве H берут «координатную» гиперплоскость, определяемую уравнением $x_0 = 0$; тогда точка $\boldsymbol{z} = (z_i) \in \mathbf{R}^n$ отождествляется с точкой пространства $\mathbf{P}_n$, имеющей однородные координаты $1, z_1, z_2, \ldots, z_n$.

Как только такое отождествление сделано, всякое p-мерное *аффинное линейное* многообразие V пространства $\mathbf{R}^n$ имеет *замыканием* в $\mathbf{P}_n$ p-мерное *проективное линейное* многообразие, не содержащееся в бесконечно удаленной гиперплоскости и совпадающее с проективным линейным многообразием, *порождаемым* V. Обратно, всякое p-мерное проективное линейное многообразие, не содержащееся в бесконечно удаленной гиперплоскости, имеет своим следом на $\mathbf{R}^n$ p-мерное аффинное линейное многообразие, замыканием которого оно является.

В частном случае, когда $n = 1$, бесконечно удаленной гиперплоскостью является *точка*; поскольку $\mathbf{P}_1$ компактно, из теоремы Александрова (гл. I, § 9, теорема 4) следует, что $\mathbf{P}_1$ гомеоморфно компактному пространству $\widetilde{\mathbf{R}}$, полученному путем присоединения к локально компактному пространству $\mathbf{R}$ «бесконечно удаленной» точки. На основании предложения 4 § 2 видим также, что *вещественная проективная прямая* $\mathbf{P}_1(\mathbf{R})$ *гомеоморфна окружности* $\mathbf{S}_1$ *и тору* $\mathbf{T}$.

Напротив, при $n > 1$ проективное пространство $\mathbf{P}_n(\mathbf{R})$ не гомеоморфно $\mathbf{S}_n$, как мы это позже увидим (упражнение 4).

«Бесконечно удаленная точка» пространства $\widetilde{\mathbf{R}}$ обозначается символом ∞, *без знака*. Важно отличать пространство $\widetilde{\mathbf{R}}$, в которое таким образом погружена числовая прямая, от расширенной прямой $\overline{\mathbf{R}}$, определенной в § 4 главы IV и обладающей *двумя*

«бесконечно удаленными точками»; заметим, что $\widetilde{\mathbf{R}}$ гомеоморфно факторпространству пространства $\overline{\mathbf{R}}$, полученному путем *отождествления* точек $+\infty$ и $-\infty$.

4. *Применение к продолжению числовых функций*

Поскольку $\mathbf{R}$ может рассматриваться как часть $\widetilde{\mathbf{R}}$, всякое отображение множества E в $\mathbf{R}$ (числовая функция) может рассматриваться как отображение E в $\widetilde{\mathbf{R}}$; в частности, когда E — подмножество топологического пространства F, а f — отображение E в $\mathbf{R}$, может случиться, что для некоторых точек замыкания $\overline{E}$ множества E функция $f(x)$ стремится к пределу ∞, когда x стремится к этим точкам, оставаясь в E; тем самым функция f продолжается по непрерывности путем придания ей в этих точках значения ∞ (гл. I, § 8, теорема 1).

Рассмотрим, в частности, случай, когда E есть подмножество пространства $\mathbf{R}^n$, причем $\mathbf{R}^n$ само считается погруженным в проективное пространство $\mathbf{P}_n$; предполагая, что бесконечно удаленной гиперплоскостью служит $x_0 = 0$, мы можем всякую числовую функцию, определенную на E, отождествить с отображением

$$(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n) \longmapsto f\left(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}, \ldots, \frac{x_n}{x_0}\right)$$

множества E в $\widetilde{\mathbf{R}}$; если применить вышесказанное, то может оказаться, что продолжение этой функции по непрерывности возможно не только на точки прикосновения множества E в $\mathbf{R}^n$, но также и на некоторые «бесконечно удаленные» точки пространства $\mathbf{P}_n$, служащие точками прикосновения для E в $\mathbf{P}_n$.

Покажем, например, что таким образом вновь получается продолжение по непрерывности на всё $\widetilde{\mathbf{R}}$ *рациональной функции* одной вещественной переменной, уже определенное в Алгебре (Алг., гл. II, 2-е изд., Приложение III; 3-е изд., § 9, n° 9). Отождествим $\widetilde{\mathbf{R}}$ и $\mathbf{P}_1$ путем отождествления всякого вещественного числа $x \in \mathbf{R}$ с точкой, имеющей однородные координаты $(1, x)$, а точки ∞ — с точкой, имеющей однородные координаты $(0, 1)$. Пусть $\frac{u(x)}{v(x)}$ — рациональная функция, где u и v — взаимно простые полиномы, степени которых равны соответственно m и n; если предположить, например, $m \leqslant n$ и положить $u_1(x, y) = x^n u\left(\frac{y}{x}\right)$,

$v_1(x, y) = x^n v\left(\frac{y}{x}\right)$, то рациональную функцию $\frac{u}{v}$ можно будет рассматривать как сужение отображения $(x, y) \mapsto (v_1(x, y), u_1(x, y))$ на множество тех вещественных чисел, в которых полином $v(x)$ отличен от нуля. Другими словами, функция $\frac{u}{v}$ продолжается по непрерывности путем придания ей в точках $x \in \mathbf{R}$, где $v(x) = 0$, значения ∞, а в точке ∞ — значения 0, если $m < n$, значения ∞, если $m > n$, и значения, равного отношению коэффициентов при членах степени x^n, если $m = n$.

В частности, функция $\frac{1}{x}$ продолжается на точку 0 путем придания в ней значения ∞ и на точку ∞ путем придания в ней значения 0; эта продолженная функция является, очевидно, *гомеоморфизмом* $\widetilde{\mathbf{R}}$ на себя. То же верно для *дробно-линейной функции* $\frac{ax+b}{cx+d}$, где $ad - bc \neq 0$.

Точно так же функция x^n, где n — целое > 0, продолжается на точку ∞ путем придания ей значения ∞.

Напротив, рациональную функцию двух вещественных переменных вообще нельзя продолжить по непрерывности ни на пространство $\mathbf{P}_1 \times \mathbf{P}_1$, ни на пространство $\mathbf{P}_2$ (см. упражнение 5).

5. *Пространства проективных линейных многообразий*

Пусть K — заданное тело. Множество $\mathbf{P}_{n,p}(K)$ всех *p-мерных* ($p \geqslant 0$) *проективных линейных многообразий* левого проективного пространства $\mathbf{P}_n(K)$, очевидно, находится во взаимно однозначном соответствии с множеством всех $(p+1)$-мерных векторных подпространств левого векторного пространства K_s^{n+1}. Обозначим через $L_{n+1,\,p+1}(K)$ множество всех *свободных систем* $(x_k)_{1 \leq k \leq p+1}$ по $p+1$ векторов пространства K_s^{n+1}; множество $\mathbf{P}_{n,\,p}(K)$ будет находиться также во взаимно однозначном соответствии с фактормножеством множества $L_{n+1,\,p+1}(K)$ по следующему отношению эквивалентности $\Delta_{n,p}(K)$: «(x_k) и (y_k) порождают одно и то же $(p+1)$-мерное векторное подпространство пространства K_s^{n+1}». Мы будем в дальнейшем *отождествлять* $\mathbf{P}_{n,\,p}(K)$ с этим фактормножеством. С другой стороны, если каждой свободной системе (x_k) из $p+1$ векторов пространства

K_s^{n+1} отнести *матрицу* X из $p+1$ строк и $n+1$ столбцов, k-й строкой которой служит x_k $(1 \leqslant k \leqslant p+1)$, то этим определится взаимно однозначное соответствие между $L_{n+1,\,p+1}(K)$ и множеством всех матриц *ранга* $p+1$, имеющих $p+1$ строк и $n+1$ столбцов; мы будем *отождествлять* $L_{n+1,\,p+1}(K)$ с этим множеством матриц; отношение $\Delta_{n,\,p}(K)$ между матрицами X, Y будет таково: «существует обратимая квадратная матрица T $(p+1)$-го порядка такая, что $Y = TX$».

В дальнейшем мы будем предполагать, что K есть поле $\mathbf{R}$, и во введенных нами обозначениях будем опускать указание этого поля. В $\mathbf{P}_{n,\,p}$ можно определить топологию способом, обобщающим введение топологии в вещественных проективных пространствах. В самом деле, $L_{n+1,\,p+1}$ содержится в пространстве $\mathbf{M}_{p+1,\,n+1}$ всех матриц с вещественными элементами, имеющих $p+1$ строк и $n+1$ столбцов; и мы наделим $L_{n+1,\,p+1}$ топологией, индуцируемой топологией этого пространства матриц (§ 1, n° 6).

Определение 2. *Пространством p-мерных $(p \geqslant 0)$ проективных линейных многообразий проективного пространства $\mathbf{P}_n$ называется факторпространство $\mathbf{P}_{n,\,p}$ топологического пространства $L_{n+1,\,p+1}$ по отношению эквивалентности $\Delta_{n,\,p}$.*

Мы будем пользоваться следующими обозначениями. Пусть X — заданная матрица с $p+1$ строками и $n+1$ столбцами; для каждой строго возрастающей последовательности $\sigma = (i_1, i_2, \ldots, i_{p+1})$, образованной $p+1$ индексами из интервала $[0, n] \subset \mathbf{N}$, мы будем обозначать через X_σ квадратную подматрицу матрицы X, образованную столбцами с номерами $i_1, i_2, \ldots, i_{p+1}$. Через A_σ мы будем обозначать подмножество множества $L_{n+1,\,p+1}$, образованное теми матрицами X, для которых матрица X_σ обратима. В силу предложения 6 § 1 A_σ есть *всюду плотное открытое* подмножество пространства $\mathbf{M}_{p+1,\,n+1}$ и функция $X \mapsto X_\sigma^{-1}$ *непрерывна* на A_σ.

Множество A_σ допускает следующую геометрическую интерпретацию: пусть E_σ — векторное подпространство пространства $\mathbf{R}^{n+1}$, порожденное теми векторами e_i канонического базиса, индексы которых принадлежат σ, и E'_σ — дополнительное подпространство, порожденное теми e_i, индексы которых не принадлежат σ; принадлеж-

ность матрицы X множеству A_σ означает, что проекции на E_σ ее $p+1$ строк x_k образуют свободную систему, или еще что векторное подпространство, порожденное векторами x_k, является *дополнением* к E'_σ (или что его пересечение с E'_σ сводится к точке 0).

Предложение 6. *Пространство* $\mathbf{P}_{n,p}$ *отделимо.*

Прежде всего заметим, что отношение $\Delta_{n,p}$ *открыто*; в самом деле, если U — открытое множество в $L_{n+1,\,p+1}$, то для насыщения его по отношению $\Delta_{n,p}$ нужно взять объединение образов U при отображениях $X \mapsto TX$, где T пробегает множество всех обратимых квадратных матриц порядка $p+1$; так как каждое из этих отображений взаимно непрерывно, то все эти образы являются открытыми множествами, а значит, открыто и их объединение. По предложению 2 § 8 главы I рассматриваемое предложение будет установлено, если мы докажем *замкнутость* множества N, определяемого отношением $\Delta_{n,p}$ в произведении $L_{n+1,\,p+1} \times L_{n+1,\,p+1}$. Пусть (X, Y) — пара матриц, являющаяся точкой прикосновения для N, и σ — последовательность индексов такая, что матрица X_σ обратима; поскольку A_σ открыто, существует окрестность V точки (X, Y) такая, что для любой пары $(X', Y') \in N \cap V$ матрица X'_σ обратима; следовательно, когда (X', Y') стремится к (X, Y), оставаясь в N, матрица $Y'_\sigma X'^{-1}_\sigma$ стремится к $T = Y_\sigma X_\sigma^{-1}$; так как $Y' = (Y'_\sigma X'^{-1}_\sigma)X'$, то, переходя к пределу, получаем $Y = TX$, и предложение доказано.

Предложение 7. *Пространство* $\mathbf{P}_{n,p}$ *компактно.*

Мы покажем, что существует компактное подпространство пространства $L_{n+1,p+1}$ такое, что всякий класс эквивалентности по $\Delta_{n,p}$ пересекает это подпространство по крайней мере в одной точке; тогда и $\mathbf{P}_{n,p}$, являясь образом этого подпространства при каноническом отображении $L_{n+1,p+1}$ на $\mathbf{P}_{n,p}$, будет компактно (гл. I, § 9, теорема 2).

Пусть $V_{n+1,p+1}$ — подпространство пространства $L_{n+1,p+1}$, образованное системами (x_k), состоящими из $p+1$ векторов, образующих *ортонормальный евклидов базис* порождаемого ими векторного подпространства (Алг., гл. IX, § 6, n° 1), т. е. такими системами, что $(x_h \mid x_k) = 0$ при $h \neq k$ и $(x_h \mid x_h) = 1$ $(1 \leqslant h \leqslant p+1)$. Как известно (Алг., гл. IX, § 7, n° 1), всякое $(p+1)$-мерное векторное подпространство пространства $\mathbf{R}^{n+1}$

обладает таким базисом, и, следовательно, всякий смежный класс $\mathrm{mod}\ \Delta_{n,p}$ пересекается с $V_{n+1,p+1}$. С другой стороны, матрицы $X=(x_{ij})\in V_{n+1,p+1}$ определяются соотношениями

$$\sum_{j=0}^{n} x_{ij}^2 = 1, \quad \text{если} \quad 1\leqslant i\leqslant p+1,$$

$$\sum_{j=0}^{n} x_{ij}x_{kj} = 0, \quad \text{если} \quad i\neq k.$$

Они образуют поэтому *замкнутое* множество в $\mathbf{M}_{p+1,n+1}$, и так как из этих соотношений вытекает, что $|x_{ij}|\leqslant 1$ для любой пары индексов (i, j), то это множество *ограниченно* и, следовательно, *компактно*.

Предложение 8. $\mathbf{P}_{n,p}$ *есть связное локально связное пространство, каждая точка которого обладает открытой окрестностью, гомеоморфной* $\mathbf{R}^{(p+1)(n-p)}$.

Для каждой (строго возрастающей) последовательности σ индексов множество A_σ открыто в $L_{n+1,p+1}$ и насыщено по $\Delta_{n,p}$; поэтому его канонический образ C_σ в $\mathbf{P}_{n,p}$ является открытым множеством, гомеоморфным фактормножеству множества A_σ по отношению эквивалентности Θ_σ, индуцируемому в A_σ отношением $\Delta_{n,p}$ (лемма 1).

Пусть B_σ — подмножество множества A_σ, состоящее из тех матриц X, для которых X_σ — *единичная матрица* $(p+1)$-го порядка; тогда элементы матрицы X, не входящие в X_σ, *произвольны* и, следовательно, B_σ гомеоморфно пространству $\mathbf{R}^{(p+1)(n-p)}$. Сопоставим каждой матрице $X\in A_\sigma$ матрицу $Y=X_\sigma^{-1}X$, принадлежащую B_σ; этим определится непрерывное отображение g множества A_σ на B_σ такое, что $g(X)$ будет единственной матрицей из B_σ, эквивалентной X $\mathrm{mod}\ \Theta_\sigma$; отсюда вытекает, что B_σ гомеоморфно A_σ/Θ_σ (лемма 2), а следовательно, и C_σ.

Тем самым множество C_σ связно; так как A_σ всюду плотно в $L_{n+1,p+1}$, то C_σ всюду плотно в $\mathbf{P}_{n,p}$, откуда следует, что $\mathbf{P}_{n,p}$ тоже связно (гл. I, § 11, предложение 1). С другой стороны, всякая точка из $\mathbf{P}_{n,p}$ принадлежит множеству C_σ по крайней мере для одной последовательности σ индексов и, следовательно, обладает открытой окрестностью, гомеоморфной $\mathbf{R}^{(p+1)(n-p)}$.

Матрицу $Y = g(X)$ можно интерпретировать еще следующим образом: предположим для простоты, что последовательность σ образована $p+1$ номерами $n-p$, $n-p+1, \ldots, n$, и обозначим через a_{ij} $(1 \leqslant i \leqslant p+1,\ 0 \leqslant j \leqslant n-p-1)$ элементы первых $n-p$ столбцов матрицы Y; тогда векторное подпространство пространства $\mathbf{R}^{n+1}$, порожденное строками матрицы X, есть не что иное, как подпространство, определяемое уравнениями

$$x_j = \sum_{i=1}^{p+1} a_{ij} x_{n-p+i-1} \quad (0 \leqslant j \leqslant n-p-1).$$

6. *Грассманианы*

Пусть K — заданное *коммутативное* тело. Для каждой матрицы $X \in L_{n+1,\,p+1}(K)$ обозначим через $c_\sigma(X)$ определитель матрицы X_σ; таким образом, каждой матрице $X \in L_{n+1,\,p+1}(K)$ будет соответствовать $h = \binom{n+1}{p+1}$ определителей, из которых не все равны нулю (составляющие внешнего произведения $p+1$ строк матрицы X). Если сопоставить матрице X точку проективного пространства $\mathbf{P}_{h-1}(K)$ с однородными координатами $c_\sigma(X)$, то этим будет определено отображение $L_{n+1,\,p+1}(K)$ в $\mathbf{P}_{h-1}(K)$, согласующееся с отношением $\Delta_{n,\,p}(K)$; путем факторизации отсюда получится отображение f пространства $\mathbf{P}_{n,\,p}(K)$ в $\mathbf{P}_{h-1}(K)$; образ $G_{n,\,p}(K)$ пространства $\mathbf{P}_{n,\,p}(K)$ при этом отображении называется *грассманианом* с индексами n, p (Алг., гл. III, 3-е изд., § 8, n° 12). Напомним также, что отображение f *инъективно*, ибо если X — матрица, для которой X_σ обратимо, то матрица $Y = X_\sigma^{-1}X$ из B_σ, соответствующая классу матрицы $X \bmod \Delta_{n,\,p}(K)$, есть не что иное, как матрица $\left(\frac{d_{ij}}{c_\sigma(X)}\right)$ $(1 \leqslant i \leqslant p+1,\ 0 \leqslant j \leqslant n)$, где d_{ij} означает определитель матрицы, получаемый путем замены i-го столбца в X_σ j-м столбцом матрицы X (откуда следует, что d_{ij} равно, с точностью до знака, одному из $c_\tau(X)$).

В случае, когда K есть поле $\mathbf{R}$, указанное отображение f, очевидно, *непрерывно*; обратное к нему отображение g тоже непрерывно; в самом деле, матрица, принадлежащая B_σ, имеет элементами рациональные функции однородных координат точки соответствующего ей грассманиана; так как $f(B_\sigma) = B'_\sigma$ есть множество точек из $G_{n,\,p}$, у которых однородная координата

с индексом σ отлична от 0, то это множество открыто относительно $G_{n,p}$; тем самым g непрерывно во всех точках из B'_σ, а так как всякая точка из $G_{n,p}$ принадлежит множеству B'_σ по крайней мере для одного σ, то g непрерывно во всех точках. Таким образом:

Предложение 9. *Грассманиан $G_{n,p}$ гомеоморфен пространству $\mathbf{P}_{n,p}$.*

Напомним, наконец, что грассманианы $G_{n,p}(K)$ и $G_{n,n-p-1}(K)$ являются подмножествами одного и того же проективного пространства $\mathbf{P}_{h-1}(K)$ и получаются друг из друга посредством проективного линейного преобразования (Алг., гл. III, 3-е изд., § 8, n° 12); отсюда следует, что $G_{n,p}$ и $G_{n,n-p-1}$ *гомеоморфны.*

Упражнения

1) Рассмотрим отображение f сферы $\mathbf{S}_2$ в $\mathbf{R}^4$, сопоставляющее каждой точке $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{S}_2$ такую точку $y=(y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathbf{R}^4$, что

$$y_1 = x_1^2 - x_2^2, \quad y_2 = x_1x_2, \quad y_3 = x_1x_3, \quad y_4 = x_2x_3.$$

Эта функция имеет одинаковые значения в любых двух диаметрально противоположных точках сферы $\mathbf{S}_2$; показать, что при факторизации она дает гомеоморфизм пространства $\mathbf{P}_2$ на некоторое подпространство в $\mathbf{R}^4$. Показать также, что отображение g сферы $\mathbf{S}_3$ в $\mathbf{R}^6$, относящее точке (x_1, x_2, x_3, x_4) такую точку $(y_j)_{1\leqslant j\leqslant 6}$, что

$$y_1 = x_1^2 - x_2^2, \quad y_2 = x_1x_2, \quad y_3 = x_1x_3 + x_2x_4,$$
$$y_4 = x_3^2 - x_4^2, \quad y_5 = x_3x_4, \quad y_6 = x_1x_4 - x_2x_3,$$

определяет факторизацией гомеоморфизм $\mathbf{P}_3$ в $\mathbf{R}^6$.

2) Отождествляя проективное пространство $\mathbf{P}_n$ с факторпространством шара $\mathbf{B}_n$, определенным в предложении 3, обозначим через φ каноническое отображение $\mathbf{B}_n$ на $\mathbf{P}_n$. Непрерывное отображение f топологического пространства E в $\mathbf{P}_n$ называется *несущественным*, если существует непрерывное отображение g пространства E в $\mathbf{B}_n$ такое, что $f = \varphi \circ g$, и *существенным* — в противном случае (см. упражнение 6 § 2). Показать, что существует окружение U равномерной структуры пространства $\mathbf{P}_n$ такое, что если f — несущественное отображение топологического пространства E в $\mathbf{P}_n$, то всякое непрерывное отображение f' пространства E в $\mathbf{P}_n$ такое, что $(f(x), f'(x)) \in U$ для каждого $x \in E$, тоже несущественно.

3) Существенное (упражнение 2) непрерывное отображение $\mathbf{S}_1$ в $\mathbf{P}_n$ невозможно продолжить до непрерывного отображения $\mathbf{B}_2$ в $\mathbf{P}_n$ (см. упражнение 8 § 2).

4) Если $n > 1$, то существует существенное отображение f окружности $\mathbf{S}_1$ в $\mathbf{P}_n$ такое, что $f(\mathbf{S}_1) \neq \mathbf{P}_n$. [Взять за $f(\mathbf{S}_1)$ образ диаметра шара $\mathbf{B}_n$ при отображении φ; этот образ есть проективная прямая.] Вывести отсюда, что при $n > 1$ пространство $\mathbf{P}_n$ не гомеоморфно ни $\mathbf{S}_n$, ни $\mathbf{B}_n$. [Использовать предыдущее упражнение 3 и упражнение 3 § 2.]

5) Считая $\mathbf{R}^2$ погруженным в $\widetilde{\mathbf{R}} \times \widetilde{\mathbf{R}}$, а $\mathbf{R}$ — в $\widetilde{\mathbf{R}}$, показать, что отображение $(x, y) \longmapsto x+y$ пространства $\mathbf{R}^2$ в $\mathbf{R}$ может быть продолжено по непрерывности на точки (∞, a) и (a, ∞) из $\widetilde{\mathbf{R}} \times \widetilde{\mathbf{R}}$ для всех конечных значений a; оно не может быть продолжено по непрерывности на точку (∞, ∞). Если считать $\mathbf{R}^2$ погруженным в $\mathbf{P}_2$ (а $\mathbf{R}$ по-прежнему погруженным в $\widetilde{\mathbf{R}}$), то $x+y$ может быть продолжено по непрерывности на все точки бесконечно удаленной прямой, отличные от точки с однородными координатами $(1, -1, 0)$.

Сформулировать и доказать аналогичные свойства для произведения xy.

6) Пусть $\mathfrak{F}$ — множество всех замкнутых подмножеств пространства $\mathbf{P}_n$ $(n \geqslant 0)$, наделенное равномерной структурой, получаемой из равномерной структуры пространства $\mathbf{P}_n$ по способу упражнения 6б § 2 главы II. Показать, что в $\mathfrak{F}$ множество $\mathbf{P}_{n, p}$ всех p-мерных $(p \geqslant 0)$ проективных линейных многообразий пространства $\mathbf{P}_n$ замкнуто и что топология, индуцируемая в $\mathbf{P}_{n, p}$ топологией пространства $\mathfrak{F}$, совпадает с топологией, введенной в определении 2. [Для определения окружений равномерной структуры пространства $\mathbf{P}_n$ можно рассматривать $\mathbf{P}_n$ как факторпространство сферы $\mathbf{S}_n$ (предложение 2) и брать конечные покрытия $\mathbf{S}_n$ шарами, радиусы которых стремятся к 0.]

7) а) Показать, что (в обозначениях n° 5) пространство $L_{n, p}$ гомеоморфно произведению $V_{n, p} \times \mathbf{R}^{\frac{p(p+1)}{2}}$. Заметим (Алг., гл. IX, § 6, предложение 1), что всякая матрица $X \in L_{n, p}$ может быть однозначно представлена в виде UY, где $Y \in V_{n, p}$ и $U = (u_{ij})$ таково, что $u_{ij} = 0$ при $i < j$ и $u_{ii} > 0$ $(1 \leqslant i \leqslant p)$. Положим $Y = f(X)$.

б) Показать, что (в обозначениях предложения 8) f есть гомеоморфизм B_σ на $f(B_\sigma)$. [Заметить, что $X \longmapsto f(\overset{-1}{X_\sigma} X)$ есть непрерывное отображение A_σ на $f(B_\sigma)$ и что $f(\overset{-1}{X_\sigma} X)$ принадлежит тому же классу mod $\Delta_{n, p}$, что и X; применить затем лемму 2.] Вывести отсюда, что пересечение D_σ множества A_σ с $V_{n, p}$ гомеоморфно произведению пространств $V_{p, p}$ и $\mathbf{R}^{p(n-p)}$. [Всякая матрица, принадлежащая D_σ, однозначно представима в виде произведения матрицы из $V_{p, p}$ и матрицы из $f(B_\sigma)$.]

8) Пусть g — отображение, сопоставляющее каждой матрице $X \in L_{n, p}$ матрицу X', образованную из q первых строк матрицы X $(q < p)$. Показать, что сужение отображения g на $V_{n, p}$ есть откры-

тое непрерывное отображение $V_{n,p}$ на $V_{n,q}$. [Воспользоваться упражнением 7а, заметив, что если $X = UY$, то $g(X) = U'g(Y)$, где U' — матрица, получаемая удалением из U строк и столбцов с номерами $> q$; с другой стороны, учесть, что f — открытое отображение.] Вывести отсюда, что факторпространство $V_{n,p}/\Omega$, где Ω — отношение эквивалентности $g(X) = g(Y)$ между матрицами из $V_{n,p}$, гомеоморфно $V_{n,p}$.

9) Используя предыдущее упражнение 8 и предложение 7 § 11 главы I, показать, что $V_{n,p}$ при $p < n$ связно.

10) Пусть в проективном пространстве $\mathbf{P}_n$ дана «квадрика» $H_{n,p}$, определяемая уравнением

$$x_0^2 + x_1^2 + \ldots + x_{p-1}^2 - x_p^2 - \ldots - x_n^2 = 0 \qquad (1 \leqslant p \leqslant n).$$

Показать, что $H_{n,1}$ и $H_{n,n}$ гомеоморфны $\mathbf{S}_{n-1}$; если $2 \leqslant p \leqslant n-1$, то $H_{n,p}$ гомеоморфно пространству, полученному путем отождествления каждой точки произведения $\mathbf{S}_{p-1} \times \mathbf{S}_{n-p}$ (рассматриваемого как подпространство пространства $\mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^{n-p+1}$) с диаметрально противоположной точкой. Всякая точка из $H_{n,p}$ имеет открытую окрестность, гомеоморфную $\mathbf{R}^{n-1}$.

Показать, что $H_{3,2}$ гомеоморфно $\mathbf{S}_1 \times \mathbf{S}_1$. [Отождествить $\mathbf{S}_1 \times \mathbf{S}_1$ с $\mathbf{T} \times \mathbf{T}$, отождествляя пару диаметрально противоположных точек из $\mathbf{S}_1 \times \mathbf{S}_1$ с парой точек (u, v) и $\left(u + \frac{1}{2},\ v + \frac{1}{2}\right)$ из $\mathbf{T} \times \mathbf{T}$; затем рассмотреть отображение $(u, v) \longmapsto (u + v,\ u - v)$ произведения $\mathbf{T} \times \mathbf{T}$ в себя.]

11) Пусть $C_{n,p}$ — «конус второго порядка» в проективном пространстве $\mathbf{P}_n$, определяемый уравнением

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \ldots - x_n^2 = 0 \qquad (1 \leqslant p \leqslant n-1).$$

Показать, что дополнение к $\{0\}$ в $C_{n,p}$ гомеоморфно $\mathbf{R} \times H_{n-1,p}$ (в обозначениях упражнения 10).

ИСТОРИЧЕСКИЙ ОЧЕРК

К ГЛАВЕ VI

(Римские цифры относятся к библиографии, помещенной в конце настоящего очерка.)

Мы уже имели случай говорить о том, как развитие аналитической геометрии на плоскости и в пространстве привело математиков к введению понятия n-мерного пространства, которое дало им геометрический язык, чрезвычайно удобный для краткого и простого выражения алгебраических теорем, относящихся к уравнениям с любым числом неизвестных, и в особенности общих результатов линейной алгебры (см. Исторические очерки к главам II — III и IX Алгебры). Но хотя к середине XIX века этот язык для многих геометров стал обычным, он оставался чисто условным, и отсутствие «интуитивного» представления пространств с числом измерений бо́льшим трех, казалось, препятствовало проведению для них рассуждений «по непрерывности», допускавшихся на плоскости и в пространстве исключительно на основе «интуиции». Риман первый в своих исследованиях по *Анализу положения* и основаниям геометрии отважился рассуждать так по аналогии со случаем трехмерного пространства (см. Исторический очерк к главе I) *); вслед за ним многие математики стали использовать с большим успехом такого рода рассуждения, особенно в теории алгебраических функций нескольких комплексных переменных. Но поскольку средства контроля пространственной интуиции были тогда весьма ограниченны, можно было с полным основанием относиться скептически к доказательной силе подобных рассуждений и допускать их лишь на правах чисто эвристического средства, делающего справедливость некоторых теорем весьма правдоподобной. Вот почему А. Пуанкаре в своем мемуаре 1887 г. о вычетах двойных интегралов функций двух комплексных переменных избегает, насколько он может, обращения к интуиции четырехмерного пространства: «*Поскольку этот гипергеометрический язык внушает еще отвращение многим серьезным умам,* —

---

*) См. также работы L. Schläfli, относящиеся к тому же времени, но опубликованные лишь в XX веке (Gesammelte mathematische Abhandlungen, т. I, Basel (Birkhäuser), 1950, стр. 169—387).

говорит он,— *я буду пользоваться им редко*»; «ухищрения», к которым он прибег для этого, позволили ему свести дело к топологическим рассуждениям в трехмерном пространстве, где он уже не колеблясь опирается на интуицию ((I), т. III, стр. 443 и след.).

Впрочем, открытия Кантора и особенно знаменитая теорема, устанавливающая равномощность $\mathbf{R}$ и $\mathbf{R}^n$ (которая, казалось, ставит под вопрос даже понятие размерности *)), показали, что для подведения надежной базы под рассуждения в геометрии и топологии необходимо полностью освободить их от всякого обращения к интуиции. Мы уже говорили (см. Исторический очерк к главе I), что эта потребность породила современную концепцию общей топологии; но еще до создания этой последней началось строгое изучение топологии числовых пространств и наиболее непосредственных их обобщений («n-мерных многообразий») методами, относящимися главным образом к той ветви топологии, которую называют «Комбинаторной топологией» или, лучше, «Алгебраической топологией». Этой теории будет посвящена специальная книга настоящего трактата, и там читатель найдет сведения об исторических этапах ее развития; в настоящей главе мы ограничились установлением наиболее элементарных топологических свойств числовых и проективных пространств, которые исторически послужили отправным пунктом для методов алгебраической топологии.

*) Интересно отметить, что, ознакомясь с этим результатом, Дедекинд понял причину его видимой парадоксальности и сообщил Кантору, что, по-видимому, можно было бы доказать невозможность *взаимно однозначного и взаимно непрерывного* соответствия между $\mathbf{R}^m$ и $\mathbf{R}^n$ при $m \neq n$ (II).

БИБЛИОГРАФИЯ

(I) H. Poincaré, Œuvres, т. III, Paris (Gauthier-Villars), 1934 (= Acta Mathematica, т. IX (1887), стр. 321).

(II) G. Cantor, R. Dedekind, Briefwechsel, Actual. Scient. et Ind., n° 518, Paris (Hermann), 1937.

ГЛАВА VII

АДДИТИВНЫЕ ГРУППЫ $\mathbf{R}^n$

§ 1. Подгруппы и факторгруппы группы $\mathbf{R}^n$

Введем прежде всего следующее соглашение: пусть G — топологическая группа, а G^n при любом целом $n > 0$ означает, как в главе III (§ 2), произведение n групп, равных G; в настоящем параграфе мы распространим это определение на случай $n = 0$, условившись обозначать через G^0 группу, сводящуюся к нейтральному элементу. Какова бы ни была группа H, $G^0 \times H$ будет отождествляться с H.

В этом параграфе мы будем рассматривать в множестве $\mathbf{R}^n$, с одной стороны, его структуру (аддитивной) *топологической группы*, с другой стороны, его структуру *векторного пространства* относительно поля $\mathbf{R}$ (гл. VI, § 1, n° 3). Вместе с заданным множеством $A \subset \mathbf{R}^n$ мы будем рассматривать как порождаемую им *подгруппу* группы $\mathbf{R}^n$ (множество всевозможных линейных комбинаций точек из A с *целыми* коэффициентами), так и порождаемое им *векторное подпространство* пространства $\mathbf{R}^n$ (множество всевозможных линейных комбинаций точек из A с *вещественными* коэффициентами); не следует смешивать эти два понятия. В соответствии с определениями, данными в Алгебре (Алг., гл. II, 3-е изд., § 7, n° 2), мы будем называть *рангом* множества A *размерность* порождаемого им векторного подпространства V; таким образом, сказать, что A имеет ранг p, все равно что сказать, что существуют p точек $x_i \in A$, образующих *свободную систему* относительно поля $\mathbf{R}$ (т. е. такую, что соотношение $\sum_i t_i x_i = 0$, где t_i — *вещественные* числа, влечет $t_i = 0$ для всех i) и

составляющих *базис* пространства V (что означает, что всякая точка из V является линейной комбинацией точек x_i с вещественными коэффициентами).

В последующем будет рассматриваться также понятие системы точек пространства $\mathbf{R}^n$, *свободной относительно поля* $\mathbf{Q}$ *рациональных чисел*; такая система является конечным множеством $(x_i) \in \mathbf{R}^n$, для которого соотношение $\sum_i r_i x_i = 0$, где r_i — *рациональные* (или, что сводится к тому же, *целые*) числа, влечет $r_i = 0$ для всех i. Не следует смешивать это понятие с понятием системы, свободной относительно $\mathbf{R}$; всякая система, свободная относительно $\mathbf{R}$, свободна и относительно $\mathbf{Q}$, но обратное неверно; например, числа 1 и $\sqrt{2}$ образуют в $\mathbf{R}$ систему, свободную относительно $\mathbf{Q}$, но не свободную относительно $\mathbf{R}$; говоря *свободная система*, мы всегда будем иметь в виду систему, свободную *относительно* $\mathbf{R}$. Следует, таким образом, тщательно различать в $\mathbf{R}^n$ структуру векторного пространства *относительно* $\mathbf{R}$ от структуры векторного пространства *относительно* $\mathbf{Q}$; в частности, векторным подпространством *относительно* $\mathbf{Q}$, порождаемым множеством $A \subset \mathbf{R}^n$, является множество U всевозможных линейных комбинаций точек из A с *рациональными* коэффициентами; оно содержится в векторном подпространстве V (относительно $\mathbf{R}$), порождаемом множеством A, но, вообще говоря, не совпадает с ним. Размерность U (*относительно* $\mathbf{Q}$) называется *рациональным рангом* множества A; он *по меньшей мере равен рангу* множества A, определенному выше (размерности V относительно $\mathbf{R}$); он может быть *бесконечным*, если A — бесконечное множество, тогда как ранг непустого множества в $\mathbf{R}^n$ всегда $\leqslant n$; в частности, рациональный ранг *несчетного* множества из $\mathbf{R}^n$ всегда бесконечен, ибо векторное пространство конечной размерности над полем $\mathbf{Q}$ счетно.

В настоящем параграфе мы прежде всего выясним структуру *замкнутых подгрупп* аддитивной группы $\mathbf{R}^n$.

1. *Дискретные подгруппы группы* $\mathbf{R}^n$

Как мы видели (гл. V, § 1, предложение 1), единственными замкнутыми подгруппами в $\mathbf{R}$, отличными от $\mathbf{R}$, являются *дискретные* подгруппы группы $\mathbf{R}$, порождаемые *одним* элементом. Мы начнем с изучения *дискретных* подгрупп в $\mathbf{R}^n$.

Прежде всего, подгруппа группы $\mathbf{R}^n$, порождаемая p векторами ($p \leqslant n$) канонического базиса (гл. VI, § 1, n° 3) пространства $\mathbf{R}^n$, есть дискретная группа, изоморфная произведению $\mathbf{Z}^p$

p групп, совпадающих с $\mathbf{Z}$. Более общим образом, пусть G — подгруппа, порождаемая p точками $\boldsymbol{a}_i$ $(1 \leqslant i \leqslant p)$, образующими *свободную* систему; существует биективное линейное отображение $\mathbf{R}^n$ на себя, преобразующее $\boldsymbol{a}_i$ в $\boldsymbol{e}_i$ $(1 \leqslant i \leqslant p)$; поскольку такое отображение является автоморфизмом топологической группы $\mathbf{R}^n$, G есть топологическая группа, изоморфная подгруппе, порождаемой точками $\boldsymbol{e}_i$ $(1 \leqslant i \leqslant p)$, т. е., следовательно, *дискретная* подгруппа ранга p, изоморфная $\mathbf{Z}^p$.

Строение группы $\mathbf{Z}^p$, а следовательно, и группы G было изучено в Алгебре (Алг., гл. VII, §§ 3 и 4); напомним основные результаты этого изучения. *Базисы* группы G относительно кольца $\mathbf{Z}$ — это системы p точек $\boldsymbol{b}_i = \sum_{j=1}^{p} r_{ij}\boldsymbol{a}_j$, где r_{ij} — целые такие, что определитель $\det(r_{ij})$ равен $+1$ или -1. Всякая *подгруппа* H группы G дискретна и имеет ранг $q \leqslant p$; при этом для заданной подгруппы H ранга q существуют свободная система p точек $\boldsymbol{b}_i$ $(1 \leqslant i \leqslant p)$, порождающая G, и система q точек $\boldsymbol{c}_i$ $(1 \leqslant i \leqslant q)$, порождающая H, такие, что $\boldsymbol{c}_i = e_i\boldsymbol{b}_i$ $(1 \leqslant i \leqslant q)$, где e_i — целые числа (*инвариантные множители* H относительно G), причем $e_{i+1} \equiv 0 \pmod{e_i}$ $(1 \leqslant i \leqslant q-1)$. Факторгруппа G/H есть дискретная группа, изоморфная произведению $\mathbf{Z}^{p-q} \times F$, где F — *конечная* коммутативная группа, являющаяся прямым произведением q циклических подгрупп соответственно порядков $e_1, e_2, \ldots, e_q$.

Мы покажем теперь, что рассмотренные нами дискретные подгруппы группы $\mathbf{R}^n$ являются ее *единственными* дискретными подгруппами.

Предложение 1. *Пусть G — дискретная подгруппа ранга p группы $\mathbf{R}^n$, $(\boldsymbol{a}_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ — свободная система p точек группы G и P — замкнутый параллелепипед с центром 0, построенный на векторах $\boldsymbol{a}_i$* (гл. VI, § 1, n° 3); *тогда $G \cap P$ — конечное множество, порождающее G, и всякая точка из G является линейной комбинацией векторов $\boldsymbol{a}_i$ с рациональными коэффициентами.*

В самом деле, $G \cap P$ компактно и дискретно, а потому *конечно*. Пусть x — произвольная точка из G; она равна некоторой линейной комбинации $\sum_{i=1}^{p} t_i\boldsymbol{a}_i$ векторов $\boldsymbol{a}_i$ с вещественными

коэффициентами. Для каждого целого $m>0$ рассмотрим точку $z_m = mx - \sum_{i=1}^{p} [mt_i]\, a_i = \sum_{i=1}^{p} (mt_i - [mt_i])\, a_i$ *); она принадлежит G, и так как $0 \leqslant mt_i - [mt_i] < 1$, то она содержится в P. Отсюда прежде всего вытекает, что $x = z_1 + \sum_{i=1}^{p} [t_i]\, a_i$, так что G порождается множеством $G \cap P$. С другой стороны, так как $G \cap P$ конечно, то существуют два различных целых числа h, k такие, что $z_h = z_k$, а отсюда следует, что $(h-k)t_i = [ht_i] - [kt_i]$ $(1 \leqslant i \leqslant p)$, и тем самым t_i рациональны.

Следствие. *Пусть $(a_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ — свободная система p точек группы $\mathbf{R}^n$ и $b = \sum_{i=1}^{p} t_i a_i$ — их линейная комбинация с вещественными коэффициентами. Для того чтобы подгруппа G группы $\mathbf{R}^n$, порожденная $p+1$ точками a_i $(1 \leqslant i \leqslant p)$ и b, была дискретной, необходимо и достаточно, чтобы числа t_i были рациональны.*

Предложение 1 показывает, что условие необходимо. Оно достаточно, ибо при его выполнении можно написать $t_i = \frac{m_i}{d}$, где d и m_i — целые $(1 \leqslant i \leqslant p)$, так что b оказывается линейной комбинацией p точек $\frac{1}{d} a_i$ с целыми коэффициентами, откуда вытекает, что G есть подгруппа дискретной группы, порождаемой этими точками, и, следовательно, сама дискретна.

Результат предложения 1 можно выразить еще следующим образом: если q точек x_i $(1 \leqslant i \leqslant q)$ *дискретной* подгруппы G группы $\mathbf{R}^n$ образуют систему, *линейно зависимую относительно* $\mathbf{R}$, то они образуют также систему, *линейно зависимую относительно* $\mathbf{Q}$. Отсюда сразу следует, что *рациональный ранг* дискретной подгруппы группы $\mathbf{R}^n$ равен ее *рангу*.

Применение следствия предложения 1 к случаю, когда векторами a_i являются n векторов e_i канонического базиса, приводит к следующему предложению:

---

*) Напомним (гл. IV, § 8, n° 2), что, каково бы ни было вещественное число x, $[x]$ означает его *целую часть*, т. е. наибольшее целое рациональное число, которое $\leqslant x$.

Предложение 2 (Кронекер). *Пусть $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ — n вещественных чисел. Для того чтобы при любом $\varepsilon > 0$ существовали целые q и p_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ такие, что*

$$|q\theta_i - p_i| \leqslant \varepsilon \quad (1 \leqslant i \leqslant n),$$

причем по крайней мере одна из левых частей этих неравенств отличалась от нуля, необходимо и достаточно, чтобы по крайней мере одно из чисел θ_i было иррационально.

Теорема 1. *Всякая дискретная подгруппа G ранга p группы $\mathbf{R}^n$ порождается свободной системой p точек.*

В силу отмеченных выше свойств групп, изоморфных $\mathbf{Z}^p$, достаточно показать, что G есть *подгруппа* дискретной группы, порождаемой свободной системой p точек. Но так как G — подгруппа ранга p, то в ней имеется свободная система p точек a_i $(1 \leqslant i \leqslant p)$ такая, что всякий элемент $x \in G$ есть их линейная комбинация $\sum_{i=1}^{p} t_i a_i$ с вещественными коэффициентами; так как G дискретна, то предложение 1 показывает, что t_i *рациональны*. При этом, как показывает предложение 1, G порождается *конечным* числом точек; поскольку последние являются линейными комбинациями точек a_i с рациональными коэффициентами, существует целое d такое, что они являются линейными комбинациями p точек $\frac{1}{d} a_i = a'_i$ с *целыми* коэффициентами; следовательно, G есть подгруппа группы, порождаемой точками a'_i.

Теорему 1 можно доказать без привлечения теории инвариантных множителей (см. упражнение 1).

Дискретные подгруппы ранга n группы $\mathbf{R}^n$ называются также *сетями* в $\mathbf{R}^n$ (см. Коммутат. алг., гл. VII, § 4).

2. *Замкнутые подгруппы группы* $\mathbf{R}^n$

Мы уже знаем два вида замкнутых подгрупп группы $\mathbf{R}^n$: с одной стороны — *векторные подпространства* пространства $\mathbf{R}^n$, изоморфные группам $\mathbf{R}^p$ $(p \leqslant n)$ (гл. VI, § 1, предложение 2), с другой стороны — *дискретные* подгруппы (гл. III, § 2, предложение 5), которые, как мы видели, изоморфны группам $\mathbf{Z}^q$ $(q \leqslant n)$. Сейчас мы перейдем к выяснению строения *произвольной*

замкнутой подгруппы группы $\mathbf{R}^n$ и покажем, что такая подгруппа изоморфна *произведению* вида $\mathbf{R}^p \times \mathbf{Z}^q$ $(0 \leqslant p + q \leqslant n)$.

Для этого нам понадобится следующее предложение:

Предложение 3. *Всякая недискретная замкнутая подгруппа G группы $\mathbf{R}^n$ содержит прямую, проходящую через* 0.

В самом деле, пусть $(x_p)_{p \in \mathbf{N}}$ — бесконечная последовательность точек из G таких, что $x_p \neq 0$ и $\lim\limits_{p \to \infty} x_p = 0$; такая последовательность существует по предположению. Пусть P — открытый куб с центром в точке 0, содержащий все x_p. Обозначим через k_p наибольшее из целых чисел $h > 0$, для которых $hx_p \in P$ (поскольку P — ограниченный кирпич и $x_p \neq 0$, существование числа k_p вытекает из аксиомы Архимеда). Точки $k_p x_p$ принадлежат компактному множеству $\overline{P}$, так что последовательность $(k_p x_p)_{p \in \mathbf{N}}$ имеет предельную точку $a \in \overline{P}$. Но если $\| k_p x_p - a \| \leqslant \varepsilon$, то $\| (k_p + 1) x_p - a \| \leqslant \varepsilon + \| x_p \|$, и так как $\lim\limits_{p \to \infty} x_p = 0$, то a служит также предельной точкой последовательности $((k_p + 1) x_p)$, точки которой, по определению чисел k_p, принадлежат замкнутому множеству $\complement P$; тем самым $a \in \overline{P} \cap \complement P$ (границе P; рис. 6), откуда следует, что $a \neq 0$; при этом, поскольку G — замкнутая подгруппа, $a \in G$. Пусть теперь t — произвольное вещественное число; так как $| tk_p - [tk_p] | < 1$, то из $\| k_p x_p - a \| \leqslant \varepsilon$ следует $\| [tk_p] x_p - ta \| \leqslant | t | \varepsilon + \| x_p \|$, и, поскольку $\lim\limits_{p \to \infty} x_p = 0$, ta есть предельная точка последовательности $([tk_p] x_p)$; так как точки этой последовательности принадлежат G, то $ta \in G$, поскольку G — замкнутая подгруппа. Тем самым предложение доказано.

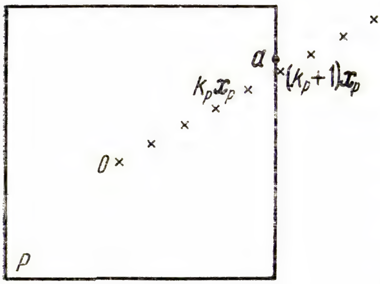

Рис. 6.

Теорема 2. *Пусть G — замкнутая подгруппа ранга r $(0 \leqslant r \leqslant n)$ группы $\mathbf{R}^n$. Существует наибольшее векторное подпространство V, содержащееся в G; для всякого векторного под-*

пространства W, дополнительного к V, $W \cap G$ дискретно, и G есть прямая сумма подгрупп V и $W \cap G$.

Прежде всего, существование V следует из того, что объединение прямых, содержащихся в G и проходящих через 0, является векторным подпространством: в самом деле, векторное подпространство, порождаемое объединением этих прямых, совпадает с подгруппой, порожденной этим объединением. Группа G есть *прямая сумма* V и $W \cap G$. В самом деле, для любого $x \in G$ имеем $x = y + z$, где $y \in V$, $z \in W$, и так как $V \subset G$, то $z = x - y \in G$, так что $z \in W \cap G$. Остается доказать, что $W \cap G$ *дискретно*; это вытекает из предложения 3, ибо $W \cap G$ есть замкнутая подгруппа, не содержащая ни одной прямой в силу самого определения подпространства V.

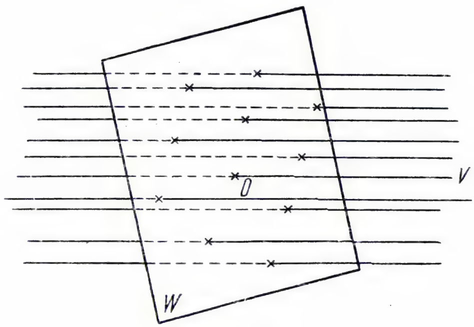

Рис. 7.

Если $G \neq V$, то образно можно сказать, что G есть объединение счетно-бесконечного множества линейных многообразий, *параллельных* V, проходящих через точки дискретной группы $W \cap G$ (рис. 7).

Если p — размерность векторного подпространства V, то $p \leqslant r$, и $W \cap G$ есть дискретная подгруппа ранга $r - p$.

Следствие 1. *В $\mathbf{R}^n$ существует базис $(a_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ такой, что $a_i \in G$ $(1 \leqslant i \leqslant r)$, $a_i \in V$ $(1 \leqslant i \leqslant p)$ и G совпадает с множеством точек $\sum_{i=1}^{p} t_i a_i + \sum_{j=p+1}^{r} n_j a_j$, где t_i принимают всевозможные вещественные значения, а n_j — всевозможные целые значения.*

Это вытекает из теоремы 2 и теоремы 1, примененной к дискретной группе $W \cap G$.

Следствие 2. *Существует автоморфизм группы $\mathbf{R}^n$, отображающий G на группу G', изоморфную прямой сумме $\mathbf{R}^p \times \mathbf{Z}^{r-p}$*

векторного подпространства, порождаемого векторами $e_1, e_2, \ldots$ $\ldots, e_p$, *и* (дискретной) *аддитивной подгруппы, порождаемой векторами* $e_{p+1}, e_{p+2}, \ldots, e_r$.

Это непосредственно вытекает из следствия 1.

Следствие 2 теоремы 2 показывает, что замкнутая подгруппа G группы $\mathbf{R}^n$ вполне определена, с точностью до изоморфизма, заданием двух целых чисел $\geqslant 0$: ее *ранга*, который мы будем обозначать $r(G)$, и размерности наибольшего векторного подпространства, содержащегося в G; последнее число мы будем обозначать $d(G)$ и называть *размерностью* подгруппы G. Единственными условиями, которым должны удовлетворять эти два целых числа, являются неравенства $0 \leqslant d(G) \leqslant r(G) \leqslant n$.

3. *Ассоциированные подгруппы*

Пусть G — произвольная (замкнутая или незамкнутая) подгруппа группы $\mathbf{R}^n$. Рассмотрим множество G^* всех точек $u = (u_i) \in \mathbf{R}^n$, для которых число $(u \mid x) = \sum_{i=1}^{n} u_i x_i$ *целое, какова бы ни была* точка $x = (x_i) \in G$. Ясно, что G^* — *подгруппа* группы $\mathbf{R}^n$; ее называют подгруппой, *ассоциированной* с G *). Если G и H — подгруппы группы $\mathbf{R}^n$ такие, что $H \subset G$, то, очевидно, $G^* \subset H^*$.

Предложение 4. *Подгруппа* G^*, *ассоциированная с подгруппой* G *группы* $\mathbf{R}^n$, *замкнута и* $(\overline{G})^* = G^*$.

В самом деле, для каждого $x \in G$ положим $f_x(u) = (u \mid x)$; функция f_x, будучи линейной формой, непрерывна; так как G^* является пересечением множеств $\overset{-1}{f_x}(\mathbf{Z})$, где x пробегает G, а каж-

*) Это понятие является соответствующим группе $\mathbf{R}^n$ частным случаем одного общего понятия теории *двойственности* локально компактных коммутативных групп (см., например, A. W e i l, L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications, Actual. Scient. et Ind., n° 869, Paris, 1940, стр. 108—109 [русск. перевод: А. В е й л ь, Интегрирование в топологических группах и его применения, ИЛ, М. 1950, стр. 124]). Читатель подметит тесную аналогию между свойствами ассоциированных подгрупп в $\mathbf{R}^n$ и свойствами *ортогональных* векторных подпространств данного векторного пространства и сопряженного с ним пространства (см. Алг., гл. II, § 4; 3-е изд., § 7, n° 5, и Коммутат. алг., гл. VII, § 4).

дое из этих множеств замкнуто, то G^* замкнута. С другой стороны, если $\boldsymbol{u} \in G^*$, то $(\boldsymbol{u} \mid x) \in \mathbf{Z}$ для каждого $x \in G$, и, следовательно, в силу замкнутости $\mathbf{Z}$ в $\mathbf{R}$, $(\boldsymbol{u} \mid \boldsymbol{y}) \in \mathbf{Z}$ для любой точки прикосновения $\boldsymbol{y}$ подгруппы G; иначе говоря, $\boldsymbol{u} \in (\overline{G})^*$; но так как, с другой стороны, $(\overline{G})^* \subset G^*$, то $(\overline{G})^* = G^*$.

Изучим строение подгруппы G^* в случае, когда G *замкнута*. По следствию 1 теоремы 2 в $\mathbf{R}^n$ существует базис $(\boldsymbol{a}_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ такой, что G совпадает с множеством точек $\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{p} t_i \boldsymbol{a}_i + \sum_{j=p+1}^{p+q} n_j \boldsymbol{a}_j$, где t_i принимают всевозможные вещественные значения, а n_j — всевозможные целые значения. Для того чтобы $(\boldsymbol{u} \mid \boldsymbol{x})$ было целым для *всех* этих точек x, необходимо и достаточно, чтобы $(\boldsymbol{u} \mid \boldsymbol{a}_i) = 0$, когда $1 \leqslant i \leqslant p$, и $(\boldsymbol{u} \mid \boldsymbol{a}_i)$ было целым, когда $p + 1 \leqslant i \leqslant p + q$. Обозначим через $(\boldsymbol{a}'_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ базис в $\mathbf{R}^n$ такой, что $(\boldsymbol{a}'_i \mid \boldsymbol{a}_j) = 0$ при $i \neq j$ и $(\boldsymbol{a}'_i \mid \boldsymbol{a}_i) = 1$ для всех i (базис, «сопряженный» к $(\boldsymbol{a}_i)$; см. Алг., гл. II и IX; гл. II, 3-е изд., § 2, n° 6); положив $\boldsymbol{u} = \sum_{i=1}^{n} u_i \boldsymbol{a}'_i$, видим, что точки $\boldsymbol{u} \in G^*$ характеризуются следующими условиями: $u_i = 0$, когда $1 \leqslant i \leqslant p$, и u_i — целые, когда $p + 1 \leqslant i \leqslant p + q$; тем самым G^* есть прямая сумма векторного подпространства W, базис которого образуют точки $\boldsymbol{a}'_i$, для которых $p + q + 1 \leqslant i \leqslant n$, и дискретной подгруппы, порождаемой точками $\boldsymbol{a}'_i$, для которых $p + 1 \leqslant i \leqslant p + q$.

Иначе говоря:

Предложение 5. *Если G — замкнутая подгруппа группы $\mathbf{R}^n$, то $r(G^*) = n - d(G)$ и $d(G^*) = n - r(G)$.*

Применим те же рассуждения к G^*; замечая, что базисом, сопряженным к $(\boldsymbol{a}'_i)$, служит $(\boldsymbol{a}_i)$, получаем:

Предложение 6. *Для каждой подгруппы G группы $\mathbf{R}^n$ имеем $(G^*)^* = \overline{G}$.*

Следствие. *Для того чтобы точка x была точкой прикосновения подгруппы G группы $\mathbf{R}^n$, необходимо и достаточно, чтобы $(\boldsymbol{u} \mid \boldsymbol{x})$ было целым для всякого $\boldsymbol{u} \in \mathbf{R}^n$ такого, что $(\boldsymbol{u} \mid \boldsymbol{y})$ — целое при любом $\boldsymbol{y} \in G$.*

Применим эту характеризацию точек прикосновения подгруппы G к тому случаю, когда G порождается n векторами $\boldsymbol{e}_j$ канонического базиса ($1 \leqslant j \leqslant n$) и любым числом m точек $\boldsymbol{a}_i$ ($1 \leqslant i \leqslant m$) из $\mathbf{R}^n$. Сказать, что $(\boldsymbol{u} \mid \boldsymbol{e}_j)$ — целое, когда $1 \leqslant j \leqslant n$, все равно что сказать, что все n координат точки $\boldsymbol{u}$ — целые числа. Поэтому имеем:

Предложение 7 (Кронекер). *Пусть в $\mathbf{R}^n$ даны m точек $\boldsymbol{a}_i = (a_{ij})$ ($1 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant j \leqslant n$) и точка $\boldsymbol{b} = (b_j)$ ($1 \leqslant j \leqslant n$). Для того чтобы при любом $\varepsilon > 0$ существовали m целых чисел q_i ($1 \leqslant i \leqslant m$) и n целых чисел p_j ($1 \leqslant j \leqslant n$) таких, что*

$$|q_1 a_{1j} + q_2 a_{2j} + \ldots + q_m a_{mj} - p_j - b_j| \leqslant \varepsilon \quad (1 \leqslant j \leqslant n),$$

необходимо и достаточно, чтобы для каждой конечной последовательности (r_j) ($1 \leqslant j \leqslant n$) n целых чисел такой, что все m чисел $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} r_j$ ($1 \leqslant i \leqslant m$) — целые, число $\sum_{j=1}^{n} b_j r_j$ тоже было целым.

Следствие 1. *Для того чтобы для каждого $\boldsymbol{x} = (x_j)$ ($1 \leqslant j \leqslant n$) и каждого $\varepsilon > 0$ существовали m целых чисел q_i ($1 \leqslant i \leqslant m$) и n целых чисел p_j ($1 \leqslant j \leqslant n$) таких, что*

$$|q_1 a_{1j} + q_2 a_{2j} + \ldots + q_m a_{mj} - p_j - x_j| \leqslant \varepsilon \quad (1 \leqslant j \leqslant n),$$

необходимо и достаточно, чтобы не существовало ни одной конечной последовательности (r_j) n целых чисел, из которых не все равны нулю, для которой каждое из m чисел $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} r_j$ было бы целым.

В самом деле, если G всюду плотно, т. е. $\overline{G} = \mathbf{R}^n$, то G^* сводится к одному элементу 0, и обратно.

В частности, при ($m = 1$):

Следствие 2. *Пусть $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ n вещественных чисел. Для того чтобы при любых вещественных числах $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и $\varepsilon > 0$ существовали целое q и n целых p_j такие, что*

$$|q\theta_j - p_j - x_j| \leqslant \varepsilon \quad (1 \leqslant j \leqslant n),$$

необходимо и достаточно, чтобы не существовало ни одного соотношения вида $\sum_{j=1}^{n} r_j \theta_j = h$, где r_j — целые числа, не все равные

нулю, и h — целое (условие, которое означает, в частности, что все θ_j, так же как и отношения θ_j/θ_k при $j \neq k$, должны быть *иррациональны*).

Этот результат можно интерпретировать следующим образом: пусть x_q для каждого целого $q \in \mathbf{Z}$ — точка с координатами $q\theta_j - [q\theta_j]$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$; тогда следствие 2 дает необходимое и достаточное условие того, чтобы множество точек x_q было *плотно* в кубе, являющемся произведением интервалов $[0, 1]$ пространств-сомножителей пространства $\mathbf{R}^n$.

Предложение 8. *Каковы бы ни были замкнутые подгруппы* G_1, G_2 *группы* $\mathbf{R}^n$, $(G_1 + G_2)^* = G_1^* \cap G_2^*$ *и* $(G_1 \cap G_2)^* = \overline{G_1^* + G_2^*}$.

В самом деле, в силу равенства $(\boldsymbol{u} \mid \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{u} \mid \boldsymbol{x}) + (\boldsymbol{u} \mid \boldsymbol{y})$, для того чтобы $(\boldsymbol{u} \mid \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y})$ было целым при любых $\boldsymbol{x} \in G_1$ и $\boldsymbol{y} \in G_2$, необходимо и достаточно, чтобы $(\boldsymbol{u} \mid \boldsymbol{x})$ было целым при любом $\boldsymbol{x} \in G_1$, а $(\boldsymbol{u} \mid \boldsymbol{y})$ — при любом $\boldsymbol{y} \in G_2$; тем самым $(G_1 + G_2)^* = G_1^* \cap G_2^*$ для любой пары подгрупп G_1, G_2 группы $\mathbf{R}^n$. Если теперь предположить G_1 и G_2 замкнутыми, то в силу предложения 6 будем иметь $(G_1^* + G_2^*)^* = G_1 \cap G_2$, откуда, переходя к ассоциированным группам и снова применяя предложение 6, получим $(G_1 \cap G_2)^* = \overline{G_1^* + G_2^*}$.

Замечание. Пусть G_1, G_2 — *сети* в $\mathbf{R}^n$ (n° 1), причем $G_2 \subset G_1$; тогда (предложение 5) G_1^* и G_2^* — такие *сети* в $\mathbf{R}^n$, что $G_1^* \subset G_2^*$. Мы видели (n° 1), что существует целое $m > 0$, для которого $mG_1 \subset G_2$. Следовательно, для $\boldsymbol{x} \in G_1$ и $\boldsymbol{u} \in G_2^*$ имеем $m(\boldsymbol{u} \mid \boldsymbol{x}) \in \mathbf{Z}$, откуда $(\boldsymbol{u} \mid \boldsymbol{x}) \in \mathbf{Q}$. Кроме того, если $\boldsymbol{x} \in G_2$ и $\boldsymbol{u} \in G_2^*$ или если $\boldsymbol{x} \in G_1$ и $\boldsymbol{u} \in G_1^*$, то по определению $(\boldsymbol{u} \mid \boldsymbol{x}) \in \mathbf{Z}$. Отсюда, переходя к факторгруппам, заключаем, что $\mathbf{Z}$-билинейное отображение $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) \longmapsto (\boldsymbol{u} \mid \boldsymbol{x})$ произведения $G_1 \times G_2^*$ в $\mathbf{Q}$ определяет $\mathbf{Z}$-билинейное отображение B произведения $(G_1/G_2) \times (G_2^*/G_1^*)$ в $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$. С другой стороны ясно, что если $\overline{\boldsymbol{x}}_0 \in G_1/G_2$ (соотв. $\overline{\boldsymbol{u}}_0 \in G_2^*/G_1^*$) таково, что для *всякого* $\overline{\boldsymbol{u}} \in G_2^*/G_1^*$ (соотв. *всякого* $\overline{\boldsymbol{x}} \in G_1/G_2$) имеем $B(\overline{\boldsymbol{x}}_0, \overline{\boldsymbol{u}}) = 0$ (соотв. $B(\overline{\boldsymbol{x}}, \overline{\boldsymbol{u}}_0) = 0$), то необходимо $\overline{\boldsymbol{x}}_0 = 0$ (соотв. $\overline{\boldsymbol{u}}_0 = 0$). Отсюда следует существование такой $\mathbf{Z}$-линейной *биекции* h факторгруппы G_2^*/G_1^* на $D(G_1/G_2)$ (в обозначениях n° 8 § 4 главы VII Алгебры, 2-е изд.), что $\langle \overline{\boldsymbol{x}}, h(\overline{\boldsymbol{u}}) \rangle = B(\overline{\boldsymbol{x}}, \overline{\boldsymbol{u}})$ для $\overline{\boldsymbol{x}} \in G_1/G_2$ и $\overline{\boldsymbol{u}} \in G_2^*/G_1^*$ (там же); в частности, конечные группы G_1/G_2 и G_2^*/G_1^* *изоморфны*.

4. *Отделимые факторгруппы группы* $\mathbf{R}^n$

Всякая отделимая факторгруппа группы $\mathbf{R}^n$ имеет вид $\mathbf{R}^n/H$, где H — *замкнутая* подгруппа группы $\mathbf{R}^n$ (гл. III, § 2, предложение 18). По следствию 2 теоремы 2 существует автоморфизм f группы $\mathbf{R}^n$, преобразующий H в подгруппу H', являющуюся прямой суммой векторного подпространства, порождаемого p векторами e_i канонического базиса, и дискретной группы, порождаемой q векторами из оставшихся $n-p$ векторов e_i $(0 \leqslant p+q \leqslant n)$. При переходе к факторгруппам f дает изоморфизм $\mathbf{R}^n/H$ на $\mathbf{R}^n/H'$ (гл. III, § 2, n° 8, замечание 3); но $\mathbf{R}^n/H'$ изоморфна $\mathbf{R}^{n-p-q} \times \mathbf{T}^q$ (гл. III, § 2, следствие предложения 26); следовательно, имеем:

Предложение 9. *Всякая отделимая факторгруппа группы* $\mathbf{R}^n$ *изоморфна некоторому произведению* $\mathbf{R}^h \times \mathbf{T}^k$ $(0 \leqslant h+k \leqslant n)$.

Пространство $\mathbf{T}^n$ (и, допуская вольность речи, *топологическую группу* $\mathbf{T}^n$) называют *n-мерным тором*; согласно предложению 4 § 1 главы V это — компактное связное локально связное пространство.

Кроме того, $\mathbf{T}^n$ гомеоморфно факторпространству замкнутого куба $C \subset \mathbf{R}^n$ со стороной 1 по отношению эквивалентности «$x_i \equiv y_i$ (mod 1) при всех i» между точками $x = (x_i)$ и $y = (y_i)$ куба C. Говоря более наглядно, $\mathbf{T}^n$ получается из куба C «отождествлением противоположных граней».

Предложение 10. *Топологическая группа* $\mathbf{T}^n$ *локально изоморфна* $\mathbf{R}^n$.

В самом деле, $\mathbf{T}^n = (\mathbf{R}/\mathbf{Z})^n$ изоморфна $\mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n$ (гл. III, § 2, следствие предложения 26), а $\mathbf{Z}^n$ — дискретная подгруппа группы $\mathbf{R}^n$, и остается применить предложение 19 § 2 главы III.

Отсюда следует, что группы $\mathbf{R}^p \times \mathbf{T}^{n-p}$ $(0 \leqslant p \leqslant n)$ локально изоморфны $\mathbf{R}^n$; мы увидим в n° 2 § 2, что это — единственные *связные* группы, обладающие таким свойством.

5. *Подгруппы и факторгруппы группы* $\mathbf{T}^n$

Отождествим $\mathbf{T}^n$ с $\mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n$, и пусть φ — канонический гомоморфизм $\mathbf{R}^n$ на $\mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n$; всякая подгруппа группы $\mathbf{T}^n$ имеет вид $G = \varphi(H)$, где H — подгруппа группы $\mathbf{R}^n$, содержащая $\mathbf{Z}^n$

(Алг., гл. I, § 6, теорема 6), и изоморфна $H/\mathbf{Z}^n$ (гл. III, § 2, предложение 20); для того чтобы G была *замкнута* в $\mathbf{T}^n$, необходимо и достаточно, чтобы H была замкнута в $\mathbf{R}^n$ (гл. I, § 3, n° 4). Таким образом, отыскание замкнутых подгрупп группы $\mathbf{T}^n$ сводится к определению замкнутых подгрупп H группы $\mathbf{R}^n$, содержащих $\mathbf{Z}^n$; для этого мы используем предложение 6 и определим сначала подгруппу H^*, ассоциированную с такой подгруппой H. Так как $\mathbf{Z}^n$ ассоциирована сама с собой, то $H^* \subset \mathbf{Z}^n$; следовательно (n° 1), существуют базис $(\boldsymbol{a}_i)$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ в $\mathbf{R}^n$, порождающий $\mathbf{Z}^n$, и базис в H^* (относительно кольца Z), состоящий из p точек $\boldsymbol{b}_i$ $(1 \leqslant i \leqslant p)$ таких, что $\boldsymbol{b}_i = e_i\boldsymbol{a}_i$ $(1 \leqslant i \leqslant p)$, где e_i — целые числа, удовлетворяющие условиям $e_{i+1} \equiv 0 \pmod{e_i}$ $(1 \leqslant i \leqslant p-1)$. Пусть $(\boldsymbol{a}'_i)$ — базис, сопряженный к $(\boldsymbol{a}_i)$; для того чтобы $\boldsymbol{u} = \sum_{i=1}^{n} u_i\boldsymbol{a}'_i$ принадлежало $(H^*)^* = H$, необходимо и достаточно, чтобы u_ie_i $(1 \leqslant i \leqslant p)$ были целыми числами; иначе говоря, H есть прямая сумма векторного подпространства V, порождаемого векторами $\boldsymbol{a}'_{p+1}, \ldots, \boldsymbol{a}'_n$, и дискретной подгруппы K, порождаемой p точками $\frac{1}{e_i}\boldsymbol{a}'_i$ $(1 \leqslant i \leqslant p)$; с другой стороны, $\mathbf{Z}^n$ есть прямая сумма $V \cap \mathbf{Z}^n$ и $K \cap \mathbf{Z}^n$, поскольку $\boldsymbol{a}'_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ порождают $\mathbf{Z}^n$. Поэтому факторгруппа $H/\mathbf{Z}^n$ изоморфна $(V/(V \cap \mathbf{Z}^n)) \times (K/(K \cap \mathbf{Z}^n))$ (гл. III, § 2, следствие предложения 26); здесь $V/(V \cap \mathbf{Z}^n)$ изоморфна $\mathbf{T}^{n-p}$, а $K/(K \cap \mathbf{Z}^n)$ — *конечная* группа, являющаяся прямой суммой p циклических групп соответственно порядков e_i $(1 \leqslant i \leqslant p)$ (см. n° 1).

В тех же обозначениях всякая отделимая факторгруппа группы $\mathbf{T}^n$ имеет вид $\mathbf{T}^n/\varphi(H)$ и изоморфна $\mathbf{R}^n/H$ (гл. III, § 2, следствие предложения 22), а $\mathbf{R}^n/H$ изоморфна W/K, где W — векторное подпространство, порождаемое подгруппой K (гл. III, § 2, следствие предложения 26), т. е. группе $\mathbf{T}^p$. Резюмируя, получаем:

Предложение 11. *Всякая замкнутая подгруппа группы $\mathbf{T}^n$ изоморфна группе вида $\mathbf{T}^h \times F$ $(0 \leqslant h \leqslant n)$, где F — конечная коммутативная группа такая, что наименьшее число циклических подгрупп, прямой суммой которых служит F, не превышает $n - h$. Всякая отделимая факторгруппа группы $\mathbf{T}^n$ изоморфна группе вида $\mathbf{T}^k$ $(0 \leqslant k \leqslant n)$.*

В частности, при $n = 1$:

Следствие. *Всякая замкнутая подгруппа группы* $\mathbf{T}$, *не совпадающая с* $\mathbf{T}$, *есть конечная циклическая группа. Всякая отделимая факторгруппа группы* $\mathbf{T}$, *не сводящаяся к нейтральному элементу, изоморфна* $\mathbf{T}$.

6. *Периодические функции*

Определение 1. *Функцию f, определенную на $\mathbf{R}^n$ и принимающую значения в произвольном множестве E, называют периодической, если в $\mathbf{R}^n$ существует точка $a \neq 0$ такая, что*

$$f(x + a) = f(x), \tag{1}$$

каково бы ни было $x \in \mathbf{R}^n$. Если f — периодическая функция, то всякую точку $a \in \mathbf{R}^n$, для которой (1) *есть тождество относительно x, называют периодом функции f.*

Множество G периодов периодической функции f является, очевидно, *подгруппой* аддитивной группы $\mathbf{R}^n$ (не сводящейся, по предположению, к 0). Если f — *непрерывное* периодическое отображение $\mathbf{R}^n$ в *отделимое* топологическое пространство E, то его группа периодов G *замкнута*. В самом деле, пусть G_x — множество всех точек $a \in \mathbf{R}^n$ таких, что $f(x + a) = f(x)$ для *данной точки* $x \in \mathbf{R}^n$; G есть пересечение множеств G_x, где x пробегает $\mathbf{R}^n$, а каждое G_x *замкнуто* (гл. I, § 8, предложение 2). Пусть тогда V — наибольшее векторное подпространство, содержащееся в G (теорема 2); функция f *постоянна* на всяком классе mod V и определяется своим сужением на векторное подпространство W, дополнительное к V. Иначе говоря (поскольку W есть топологическая группа, изоморфная некоторому $\mathbf{R}^p$), изучение непрерывных периодических функций на $\mathbf{R}^n$ сводится к изучению тех из этих функций f, группа G периодов которых *дискретна*; если это — группа ранга q, то f называется *q-периодической* функцией, а всякая свободная система q точек, порождающая G, называется *главной системой периодов* функции f.

Пусть (a_i) и (b_i) — две главные системы периодов функции f; как мы видели (n° 1), каждая из них получается из другой посредством линейного преобразования с целыми коэффициентами и определителем, равным $+1$ или -1.

Пусть φ — каноническое отображение $\mathbf{R}^n$ на $\mathbf{R}^n/G$; каждому отображению g группы $\mathbf{R}^n/G$ в множество E соответствует функция $\dot{g} = g \circ \varphi$, являющаяся периодическим отображением $\mathbf{R}^n$ в E с группой периодов, содержащей G; и обратно, всякое отображение $\mathbf{R}^n$ в E, обладающее группой периодов, содержащей G, имеет такой вид, поскольку оно *согласуется* с отношением $x \equiv y \pmod{G}$ (Теор. мн., Сводка результ., § 5, n° 7). Таким образом, установлено *биективное* отображение $g \mapsto \dot{g}$ множества всех отображений $\mathbf{R}^n/G$ в E на множество всех отображений $\mathbf{R}^n$ в E, обладающих группой периодов, содержащей G. Для того чтобы $\dot{g}$ было непрерывным (в случае, когда E — топологическое пространство), необходимо и достаточно, чтобы g было непрерывным (гл. I, § 3, предложение 6).

Упражнения

1) Пусть G — дискретная подгруппа ранга p группы $\mathbf{R}^n$ и $(\boldsymbol{a}_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ — свободная система p точек из G. Как установлено при доказательстве теоремы 1, G есть подгруппа группы, порождаемой p точками $\frac{1}{d}\boldsymbol{a}_i$, где d — надлежащим образом выбранное целое число. Показать, не используя теорему 1, что в G существует свободная система p точек $\boldsymbol{b}_i = \sum_{j=1}^{p} b_{ij}\boldsymbol{a}_j$ такая, что для любой другой свободной системы p точек $\boldsymbol{x}_i = \sum_{j=1}^{p} x_{ij}\boldsymbol{a}_j$ в G имеют место неравенства $|\det(x_{ij})| \geqslant |\det(b_{ij})| > 0$. Вывести отсюда доказательство теоремы 1, независимое от теории инвариантных множителей, установив, что $\boldsymbol{b}_i$ порождают G. [Рассуждать от противного: показать, что если бы для некоторой точки $\boldsymbol{z} = \sum_{i=1}^{p} z_i\boldsymbol{b}_i \in G$ какое-либо z_i не было целым, то в группе, порождаемой точками $\boldsymbol{z}$ и $\boldsymbol{b}_i$, существовала бы точка $\boldsymbol{u} = \sum_{i=1}^{p} u_i\boldsymbol{b}_i$ такая, что $0 < u_i < 1$ для некоторого i, и получить отсюда противоречие.]

2) Пусть G — дискретная подгруппа группы $\mathbf{R}^n$; если G есть прямая сумма подгрупп H и K, то пересечение порождаемых ими векторных подпространств сводится к 0 и ранг G равен, таким образом, сумме рангов H и K. [Заметить, что векторное подпространство пространства $\mathbf{R}^n$, порождаемое любой дискретной подгруппой G группы $\mathbf{R}^n$, канонически изоморфно $G \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R}$.]

3) Пусть G — дискретная подгруппа группы $\mathbf{R}^n$. Для того чтобы подгруппа H группы G была ее прямым сомножителем, необходимо и достаточно, чтобы H имела вид $V \cap G$, где V — некоторое векторное подпространство. [Для установления необходимости условия воспользоваться упражнением 2; чтобы показать его достаточность, заметить, что H является также пересечением G с векторным подпространством, порождаемым H, и воспользоваться следствием теоремы 1 § 4 главы VII Алгебры.]

4) Пусть H и K — дискретные подгруппы группы $\mathbf{R}^n$, сумма $H + K$ которых является замкнутой подгруппой. Показать, что тогда $H + K$ дискретна и $r(H) + r(K) = r(H \cap K) + r(H + K)$. [Пусть V — векторное подпространство, порождаемое пересечением $H \cap K$; используя упражнение 3, разложить H в прямую сумму $V \cap H$ и некоторой дискретной группы H_1, K — в прямую сумму $V \cap K$ и некоторой дискретной группы K_1, а затем показать, что сумма $H_1 + K_1$ — прямая, и воспользоваться упражнением 2.]

5) Пусть G и G' — замкнутые подгруппы группы $\mathbf{R}^n$ такие, что $G' \subset G$, а V и V' — наибольшие векторные подпространства, содержащиеся соответственно в G и G'. Показать, что существует дополнительное к V векторное подпространство W такое, что G является прямой суммой V и дискретной группы $K = W \cap G$, а G' — прямой суммой $V \cap G'$ и $K \cap G' = W \cap G'$. [Пусть U — подпространство, дополнительное к V'. Используя упражнение 3, заметить, что дискретная группа $U \cap G'$ есть прямая сумма $U \cap V \cap G'$ и некоторой дискретной группы K', и взять в качестве W некоторое векторное подпространство, содержащее K'.]

Вывести отсюда, что:

а) факторгруппа G/G' изоморфна группе вида $\mathbf{R}^p \times \mathbf{T}^q \times \mathbf{Z}^r \times F$, где F — конечная коммутативная группа;

б) всякая замкнутая подгруппа и всякая отделимая факторгруппа группы вида $\mathbf{R}^p \times \mathbf{T}^q \times \mathbf{Z}^r \times F$ (где F — конечная коммутативная группа) есть группа того же вида.

*6) Пусть H и K — замкнутые подгруппы группы $\mathbf{R}^n$, сумма $G = H + K$ которых тоже является замкнутой подгруппой.

а) Показать, что если V и W — наибольшие векторные подпространства, содержащиеся соответственно в H и K, то $V + W$ есть наибольшее векторное подпространство, содержащееся в G, и, следовательно, $d(H) + d(K) = d(H \cap K) + d(H + K)$. [Заметить, что рациональный ранг факторгруппы $G/(V + W)$ конечен и, следовательно, G не может содержать прямой, не содержащейся в $V + W$.]

б) Пусть U — дополнительное подпространство к $V + W$ такое, что G является прямой суммой $V + W$ и $M = G \cap U$, а $H \cap K$ — прямой суммой $(V + W) \cap (H \cap K)$ и $L = H \cap K \cap U$ (упражнение 5). Пусть H' (соотв. K') — подгруппа группы M, образованная

составляющими точек из H (соотв. K) в разложении G в прямую сумму $V + W$ и M; показать, что $M = H' + K'$ и $H' \cap K' = L$.

в) Показать, что если $H'' = H \cap (V + W)$ и $K'' = K \cap (V + W)$, то $r(H'') + r(K'') = r(H'' \cap K'') + r(H'' + K'')$. [Свести к случаю, когда $V \cap W = \{0\}$; показать, что тогда $H'' \cap K''$ есть прямая сумма $V \cap K''$ и $W \cap H''$.]

г) Показать, что $r(H) + r(K) = r(H \cap K) + r(H + K)$. [Использовать в) и упражнение 4, заметив, что $r(H) = r(H') + r(H'')$ и $r(K) = r(K') + r(K'')$.]

*7) Пусть G — замкнутая подгруппа группы $\mathbf{R}^n$. Для того чтобы G была прямой суммой своей замкнутой подгруппы H и некоторой другой замкнутой подгруппы K, необходимо и достаточно, чтобы H была пересечением G с некоторым векторным подпространством. [Для установления необходимости условия использовать упражнение 5; для установления достаточности применить надлежащим образом теорему 2 к G и H и использовать упражнение 3.]

8) а) Пусть H и K — замкнутые подгруппы группы $\mathbf{R}^n$. Показать, что если $r(H) + r(K) = r(H \cap K) + r(H + K)$, то подгруппа $H + K$ замкнута в $\mathbf{R}^n$. [С помощью упражнения 7 и сделанных предположений свести к случаю, когда векторные подпространства, порождаемые подгруппами H, K и $H \cap K$, *совпадают*; с помощью упражнения 5 показать, что наибольшее векторное подпространство V, содержащееся в H, совпадает с подпространством, порождаемым $V \cap K$, а наибольшее векторное подпространство W, содержащееся в K,— с подпространством, порождаемым $W \cap H$; наконец, пользуясь упражнением 7, разложить $H \cap K$ в прямую сумму $H \cap K \cap (V + W)$ и некоторой дискретной группы.]

б) Вывести из а) и упражнения 6, что если H и K — замкнутые подгруппы группы $\mathbf{R}^n$ такие, что $H + K$ есть замкнутая подгруппа, то сумма $H^* + K^*$ подгрупп, ассоциированных с H и K, тоже есть замкнутая подгруппа.

в) Вывести из б), что если H и K — замкнутые подгруппы группы $\mathbf{R}^n$ такие, что $d(H) + d(K) = d(H \cap K) + d(\overline{H + K})$, то подгруппа $H + K$ замкнута.

9) Пусть G — *не обязательно замкнутая* подгруппа ранга p группы $\mathbf{R}^n$ и V — наибольшее векторное подпространство, содержащееся в $\overline{G}$; показать, что если V—размерности $q \leqslant p$, то G есть прямая сумма $V \cap G$ и дискретной подгруппы ранга $p - q$, содержащейся в векторном подпространстве, дополнительном к V. [Заметить, что, каково бы ни было $x \in \overline{G}$, $(x + V) \cap G$ плотно относительно линейного многообразия $x + V$.]

10) Пусть a — вещественное число и n — целое > 0; рассмотрим числа $x_k = ka - [ka]$ $(1 \leqslant k \leqslant n+1)$ из интервала $[0, 1[$. Обозначая через I_h интервал $\left[\frac{h-1}{n}, \frac{h}{n}\right[$ $(1 \leqslant h \leqslant n)$, показать, что существуют

два различных индекса k, k' таких, что x_k и $x_{k'}$ принадлежат одному и тому же интервалу I_h (с надлежащим h). Вывести отсюда, что существуют два целых числа p, q таких, что $1 \leqslant p \leqslant n$ и $|pa - q| < \frac{1}{n}$.

11) Пусть $\boldsymbol{a}_i = (a_{ij})$ $(1 \leqslant i \leqslant m,\ 1 \leqslant j \leqslant n)$ m точек из $\mathbf{R}^n$ и q — целое > 0; для каждой точки $\boldsymbol{k} = (k_i)$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$ из $\mathbf{R}^m$, имеющей целые координаты, *не все равные нулю* и удовлетворяющие неравенствам $0 \leqslant k_i \leqslant q$, возьмем точку $\boldsymbol{x}_k = (x_{j,k})$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$ из $\mathbf{R}^n$ с координатами, принадлежащими $[0, 1[$, сравнимую по модулю $\mathbf{Z}^n$ с $\sum_{i=1}^{m} k_i \boldsymbol{a}_i$ (т. е. точку с координатами $x_{j,k} = \sum_{i=1}^{m} k_i a_{ij} - \left[\sum_{i=1}^{m} k_i a_{ij}\right]$).

Пусть p — наименьшее целое число такое, что $q + 1 \geqslant p^{\frac{n}{m}}$. Показать, что существуют две различные точки $\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{k}'$ такие, что обе точки $\boldsymbol{x}_k$, $\boldsymbol{x}_{k'}$ принадлежат одному и тому же кубу со стороной $\frac{1}{p}$. [Метод упражнения 10.] Вывести отсюда, что существуют m целых чисел p_i, из которых не все равны нулю, и n целых чисел r_j $(1 \leqslant j \leqslant n)$ таких, что $0 \leqslant p_i \leqslant q$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$ и

$$\left| \sum_{i=1}^{m} p_i a_{ij} - r_j \right| \leqslant \frac{1}{p} \qquad (1 \leqslant j \leqslant n).$$

Дать с помощью этого результата второе доказательство предложения 2 («принцип ящиков»).

*12) Для каждой пары вещественных чисел (θ, β) существует бесконечное множество троек (p, q, r) целых чисел таких, что $r > 0$, $|q| \leqslant \frac{1}{2} r$ и $-\frac{1}{r} < \theta q + p - \beta < \frac{1}{r}$. [Пусть m и n — целые числа такие, что $|n\theta - m| < \frac{1}{n}$ (упражнение 10); взять $r = n$ и выбрать p и q так, чтобы $pn + qm$ отличалось от $n\beta$ меньше чем на $\frac{1}{2}$.]

13) *Последовательностью Фарея* порядка n (где n — целое > 0) называют расположенное в порядке возрастания множество F_n рациональных чисел, представление которых в виде несократимой дроби $\frac{p}{q}$ удовлетворяет условиям $0 \leqslant p \leqslant q \leqslant n$.

а) Показать, что если рациональные числа $r = \frac{p}{q}$ и $r' = \frac{p'}{q'}$ таковы, что $qp' - pq' = \pm 1$, то всякая пара целых чисел (p'', q'') может быть представлена в виде $p'' = px + p'y$, $q'' = qx + q'y$, где x

и y — целые числа; для того чтобы дробь $\frac{p''}{q''}$ принадлежала замкнутому интервалу с концами r и r', необходимо и достаточно, чтобы x и y имели одинаковые знаки.

б) Вывести из а), что если $r=\frac{p}{q}$, $r'=\frac{p'}{q'}$ — рациональные числа, принадлежащие интервалу $[0, 1]$ и такие, что $q>0$, $q'>0$ и $qp'-pq'=\pm 1$, то r и r' являются соседями в последовательности F_n, где n — наибольшее из целых чисел q, q'; кроме того, наименьшим из целых чисел m таких, что *открытый* интервал с концами r, r' содержит некоторую точку последовательности F_m, служит целое число $q+q'$, и в этом интервале содержится только одна точка из $F_{q+q'}$, а именно дробь $\frac{p+p'}{q+q'}$.

в) Показать, что, обратно, если r и r' — два последовательных члена из F_n, то $qp'-qp'=\pm 1$. [Применить индукцию по n.]

г) Вывести из в), что для всякого вещественного числа θ такого, что $0\leqslant\theta\leqslant 1$, и всякого целого $n\geqslant 1$ существует по крайней мере одна несократимая дробь $\frac{p}{q}$ такая, что $1\leqslant q\leqslant n$ и $\left|\theta-\frac{p}{q}\right|\leqslant\frac{1}{(n+1)q}$. [См. упражнение 10.]

д) Пусть $\frac{p}{q}$ — несократимая дробь такая, что $\left|\theta-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{q^2}$; тогда θ принадлежит открытому интервалу, концами которого служат два следующих за $\frac{p}{q}$ члена последовательности Фарея F_q.

14) Пусть φ — канонический гомоморфизм $\mathbf{R}$ на $\mathbf{T}$, θ — элемент бесконечного порядка группы $\mathbf{T}$ и θ_0 — вещественное (иррациональное) число такое, что $\varphi(\theta_0)=\theta$. Для каждого целого $n>0$ обозначим через S_n множество элементов $k\theta$ из $\mathbf{T}$, где $1\leqslant k\leqslant n$, и через $N(I, n)$, где I — любой интервал из $\mathbf{R}$, — число элементов множества $I\cap\overset{-1}{\varphi}(S_n)$.

а) Взяв $I=[0, \theta_0[$, показать, что $N(I, n)=[n\theta_0]$. [Заметить, что $N(I, n)$ равно тогда числу пар целых чисел (x, y) таких, что $1\leqslant y\leqslant n$ и $x\leqslant y\theta_0<x+\theta_0$.]

б) Более общим образом, когда $I=[0, m\theta_0]$, где m — целое число, имеем $m[(n-m)\theta_0]\leqslant N(I, n)\leqslant m[n\theta_0]$. [Тот же метод.]

в) Вывести отсюда, что для любого интервала I число $\frac{N(I,n)}{n}$ при неограниченном возрастании n стремится к пределу, равному длине этого интервала [используя б), доказать это сначала для случая, когда I имеет вид $[m\theta_0+a, m'\theta_0+a']$, где m, m', a и a' —

целые числа; перейти отсюда к общему случаю, аппроксимируя концы интервала I числами вида $m\theta_0 + a$] (*«равномерное распределение последовательности* $(k\theta)$ *по модулю* 1»).

°15) Пусть I — замкнутый куб в $\mathbf{R}^n$ со стороной 2π; сопоставим каждой точке $\boldsymbol{x} = (x_i) \in I$ точку $\boldsymbol{y} = (y_j) \in \mathbf{R}^{n+1}$ такую, что

$$y_1 = \sin x_1,$$

$$\cdots\cdots$$

$$y_p = \left(2^{p-1} + \sum_{k=1}^{p-1} 2^{p-k-1} \cos x_{p-k} \cos x_{p-k+1} \ldots \cos x_{p-1}\right) \sin x_p \qquad (2 \leqslant p \leqslant n),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y_{n+1} = \sum_{k=0}^{n-1} 2^{n-k-1} \cos x_{n-k} \cos x_{n-k+1} \ldots \cos x_n.$$

Показать, что образ I при этом отображении гомеоморфен $\mathbf{T}^n$. [Применить индукцию по n, замечая, что y_p при $p \leqslant n$ всегда имеет тот же знак, что и $\sin x_p$.] При $n = 2$ полученное таким образом множество в $\mathbf{R}$ называется *тором вращения*.$_\circ$

*16) Пусть G — подгруппа группы $\mathbf{R}^n$; предположим, что в G существует *связное* компактное подмножество K такое, что порождаемое им аффинное линейное многообразие имеет размерность p. Показать, что тогда G содержит векторное подпространство размерности p. [Применить индукцию по n, используя упражнение 10в § 1 главы VI.]

*17) Пусть E — произведение $(\mathbf{Q}_p)^n$ n сомножителей, каждый из которых совпадает с полем $\mathbf{Q}_p$ p-адических чисел (гл. III, § 6, упражнение 23), наделенное произведением структур аддитивных топологических групп сомножителей, а также своей структурой n-мерного векторного пространства над полем $\mathbf{Q}_p$. Пусть v_p — аддитивная p-адическая норма в $\mathbf{Q}_p$; для каждого $x \neq 0$ из $\mathbf{Q}_p$ положим $|x|_p = p^{-v_p(x)}$; для $x = 0$ положим $|x|_p = 0$; для каждого $\boldsymbol{x} = (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in E$ положим $\|\boldsymbol{x}\| = \sup_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|_p$ (см. гл. IX, § 3, n°n° 2 и 3).

а) Для того чтобы множество $A \subset E$ было относительно компактным, необходимо и достаточно, чтобы $\sup_{\boldsymbol{x} \in A} \|\boldsymbol{x}\| < +\infty$. [Заметить, что v_p есть непрерывное отображение $\mathbf{Q}_p$ в множество $\mathbf{Z}$, наделенное дискретной топологией.]

б) Всякая замкнутая подгруппа G группы E является топологическим модулем над кольцом $\mathbf{Z}_p$ целых p-адических чисел. [Если $\boldsymbol{x} \in G$, то $n\boldsymbol{x} \in G$ для каждого $n \in \mathbf{Z}$, а $\mathbf{Z}$ плотно в $\mathbf{Z}_p$.]

в) Если K — компактная подгруппа группы E, то существует свободная система $m \leqslant n$ точек $\boldsymbol{a}_i$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$ из E такая, что K есть прямая сумма m групп $\mathbf{Z}_p\boldsymbol{a}_i$. [Используя а), показать, что если $(\boldsymbol{e}_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ — канонический базис пространства E, то существует

целое $k \in \mathbf{Z}$ такое, что K содержится в прямой сумме n групп $\mathbf{Z}_p p^k \boldsymbol{e}_j$; затем применить теорию модулей над кольцом главных идеалов (Алг., гл. VII, § 4, n° 2).]

г) Всякая некомпактная замкнутая подгруппа G группы E содержит одномерное векторное подпространство $\mathbf{Q}_p \boldsymbol{a}$, где $\boldsymbol{a} \neq 0$. [Пусть C — компактное множество в E, образованное точками $\boldsymbol{x}$ такими, что $\|\boldsymbol{x}\| = 1$; показать, что $G \cap C$ содержит последовательность точек $(\boldsymbol{x}_r)_{r \in \mathbf{N}}$ такую, что $p^{-r}\boldsymbol{x}_r \in G$, и взять за $\boldsymbol{a}$ какую-либо предельную точку этой последовательности.]

д) Пусть G — замкнутая подгруппа группы E, V — наибольшее векторное подпространство, содержащееся в G, и W — дополнительное к V подпространство; показать, что группа $W \cap G$ компактна, а G есть прямая сумма V и $W \cap G$. [Рассуждать, как при доказательстве теоремы 2.]

е) Пусть G — подгруппа группы E и G^* — множество всех точек $\boldsymbol{u} = (u_i) \in E$ таких, что $(\boldsymbol{u} \mid \boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} u_i x_i$ принадлежит $\mathbf{Z}_p$ для *каждого* $\boldsymbol{x} = (x_i) \in G$. Показать, что G^* замкнуто, $(\overline{G})^* = G^*$ и $(G^*)^* = \overline{G}$.

ж) Для замкнутых подгрупп группы E сформулировать и доказать предложения, аналогичные содержащимся в упражнениях 2—8. В частности, всякая замкнутая подгруппа и всякая отделимая факторгруппа группы вида $(\mathbf{Q}_p)^r \times (\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p)^s \times (\mathbf{Z}_p)^t \times F$ (где F — произведение конечного числа циклических групп, порядок которых равен некоторой степени p) есть группа того же вида.

§ 2. Непрерывные представления группы $\mathbf{R}^n$ и ее факторгрупп

1. *Непрерывные представления группы* $\mathbf{R}^m$ *в группу* $\mathbf{R}^n$

Всякое линейное отображение (см. гл. VI, § 1, n° 3) $\mathbf{R}^m$ в $\mathbf{R}^n$, очевидно, есть *непрерывное представление* аддитивной группы $\mathbf{R}^m$ в аддитивную группу $\mathbf{R}^n$. Обратно:

Предложение 1. *Всякое непрерывное представление f аддитивной группы $\mathbf{R}^m$ в аддитивную группу $\mathbf{R}^n$ есть линейное отображение $\mathbf{R}^m$ в $\mathbf{R}^n$.*

Достаточно показать, что, каковы бы ни были $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^m$ и $t \in \mathbf{R}$, $f(t\boldsymbol{x}) = tf(\boldsymbol{x})$. Рассуждение то же, что и при доказательстве предложения 5 § 1 главы V, с заменой x на $\boldsymbol{x}$ и $\mathbf{R}$ на $\mathbf{R}^m$.

2. *Локальное определение непрерывного представления группы $\mathbf{R}^n$ в топологическую группу*

Предложение 6 § 1 главы V обобщается на все группы $\mathbf{R}^n$:

Предложение 2. *Пусть A — параллелепипед в $\mathbf{R}^n$, содержащий точку 0, и f — непрерывное отображение его в топологическую группу G* (записываемую мультипликативно) *такое, что $f(x+y)=f(x)f(y)$ для любой пары точек x, y, удовлетворяющих условиям $x \in A$, $y \in A$, $x+y \in A$. Тогда существует, и притом единственное, непрерывное представление $\mathbf{R}^n$ в G, продолжающее f.*

Прежде всего, тем же рассуждением, что и при доказательстве предложения 6 § 1 главы V, доказываем, что если представление, продолжающее f, существует, то оно *единственно*. С другой стороны, подгруппа G_1 группы G, порождаемая множеством $f(A)$, *коммутативна*; в самом деле, каковы бы ни были точки x и y из A, точки $\frac{1}{2}x$, $\frac{1}{2}y$, $\frac{1}{2}(x+y)$ принадлежат A, так что $f\left(\frac{1}{2}(x+y)\right)=f\left(\frac{1}{2}x\right)f\left(\frac{1}{2}y\right)=f\left(\frac{1}{2}y\right)f\left(\frac{1}{2}x\right)$; это доказывает перестановочность $f\left(\frac{1}{2}x\right)$ и $f\left(\frac{1}{2}y\right)$, а тем самым также перестановочность $f(x)=\left(f\left(\frac{1}{2}x\right)\right)^2$ и $f(y)=\left(f\left(\frac{1}{2}y\right)\right)^2$, т. е. любых двух элементов из $f(A)$.

Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — ненулевые векторы, содержащиеся в параллелепипеде A и пропорциональные его базисным векторам; пусть D_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ — прямая, проходящая через 0 и a_i, т. е. множество точек ta_i, где t пробегает $\mathbf{R}$. Обозначим через A_i множество значений $t \in \mathbf{R}$, для которых $ta_i \in A$; A_i есть интервал, содержащий $[0, 1]$, а функция $f_i(t)=f(ta_i)$ определена и непрерывна на A_i и удовлетворяет соотношению $f_i(t+t')=f_i(t)f_i(t')$ для $t \in A_i$, $t' \in A_i$, $t+t' \in A_i$. По предложению 6 § 1 главы V существует *непрерывное* представление $\overline{f_i}$ группы $\mathbf{R}$ в G, продолжающее f_i. Так как $\mathbf{R}^n$ есть прямая сумма подгрупп D_i, то мы определим представление $\overline{f}$ группы $\mathbf{R}^n$ в коммутативную группу G, для каждого $x=\sum_{i=1}^{n} t_i a_i$ положив $\overline{f}(x)=\prod_{i=1}^{n} \overline{f_i}(t_i)$; $\overline{f}$ является продолжением f, ибо если вектор x принадлежит A, то

все его составляющие x_i по прямым D_i тоже принадлежат A в силу выбора векторов a_i; кроме того, $\overline{f}$ непрерывно на $\mathbf{R}^n$, поскольку оно непрерывно на каждой прямой D_i, а x_i есть линейная (и тем самым непрерывная) функция от x.

Следствие 1. *Пусть V — окрестность точки 0 в $\mathbf{R}^n$ и f — непрерывное отображение V в топологическую группу G такое, что $f(x+y) = f(x)f(y)$ для любой пары точек x, y, удовлетворяющей условиям $x \in V$, $y \in V$, $x + y \in V$. Существует, и притом единственное, непрерывное представление $\mathbf{R}^n$ в G, совпадающее с f во всех точках некоторой окрестности W точки 0.*

Достаточно принять за W открытый кирпич с центром 0, содержащийся в V, и применить к нему предложение 2.

Позже мы увидим, что это свойство $\mathbf{R}^n$ распространяется на более широкую категорию топологических групп — «односвязные группы».

Следствие 2. *Пусть f — локальный изоморфизм группы $\mathbf{R}^n$ в топологическую группу G; существует, и притом единственный, строгий морфизм группы $\mathbf{R}^n$ на открытую подгруппу группы G, совпадающий с f во всех точках некоторой окрестности нуля.*

В самом деле, пусть $\overline{f}$ — непрерывное представление группы $\mathbf{R}^n$ в G, совпадающее с f во всех точках некоторой окрестности нуля; по предположению $\overline{f}(\mathbf{R}^n)$ содержит окрестность нейтрального элемента группы G и потому (гл. III, § 2, следствие предложения 4) есть открытая подгруппа группы G; при этом в силу предложения 24 § 2 главы III $\overline{f}$ есть строгий морфизм $\mathbf{R}^n$ на $\overline{f}(\mathbf{R}^n)$.

Теорема 1. *Всякая связная группа G, локально изоморфная $\mathbf{R}^n$, изоморфна группе вида $\mathbf{R}^p \times \mathbf{T}^{n-p}$ $(0 \leqslant p \leqslant n)$.*

В самом деле, надлежащий локальный изоморфизм f группы $\mathbf{R}^n$ в G продолжается до строгого морфизма $\mathbf{R}^n$ на открытую подгруппу (следствие 2 предложения 2), т. е. на саму G, поскольку G связна. Отсюда вытекает, что G изоморфна факторгруппе $\mathbf{R}^n/H$ группы $\mathbf{R}^n$, где *H дискретна*, ибо иначе в H существовали бы точки $x \neq 0$, сколь угодно близкие к 0 и такие, что $f(x) = f(0)$, в противоречие с предположением, что f — локальный изоморфизм. Тем самым теорема является следствием теоремы 1 § 1.

3. *Непрерывные представления* $\mathbf{R}^m$ *в* $\mathbf{T}^n$

Предложение 3. *Всякое непрерывное представление* $\mathbf{R}^m$ *в* $\mathbf{T}^n$ *имеет вид* $x \mapsto \varphi(u(x))$, *где* φ — *канонический гомоморфизм* $\mathbf{R}^n$ *на* $\mathbf{T}^n$ (отождествленное с $\mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n$), *а* u — *однородное линейное отображение* $\mathbf{R}^m$ *в* $\mathbf{R}^n$.

Пусть f — непрерывное представление $\mathbf{R}^m$ в $\mathbf{T}^n$; покажем, что существует линейное отображение u пространства $\mathbf{R}^m$ в $\mathbf{R}^n$ такое, что представления $x \mapsto f(x)$ и $x \mapsto \varphi(u(x))$ совпадают во всех точках некоторой *окрестности нуля* в $\mathbf{R}^m$; в силу следствия 1 предложения 2, предложение будет тем самым доказано. Итак, пусть V — окрестность нуля в $\mathbf{R}^n$ такая, что сужение φ на V есть локальный изоморфизм $\mathbf{R}^n$ на $\mathbf{T}^n$; пусть ψ — обратный локальный изоморфизм, определенный на $\varphi(V)$. Так как f непрерывно, то $V' = \overset{-1}{f}(\varphi(V))$ есть окрестность нуля в $\mathbf{R}^m$; сужение отображения $x \mapsto \psi(f(x))$ на V' есть непрерывное отображение V' в $\mathbf{R}^n$ такое, что $\psi(f(x+y)) = \psi(f(x)) + \psi(f(y))$ для любых двух точек из $\mathbf{R}^m$, удовлетворяющих условиям $x \in V'$, $y \in V'$, $x + y \in V'$; тем самым (следствие 1 предложения 2) это отображение совпадает с вполне определенным непрерывным представлением u группы $\mathbf{R}^m$ в $\mathbf{R}^n$ во всех точках некоторой окрестности W нуля в $\mathbf{R}^m$; при этом, согласно предложению 1, u есть линейное отображение $\mathbf{R}^m$ в $\mathbf{R}^n$; таким образом, $f(x) = \varphi(u(x))$ для всех $x \in W$, и предложение доказано.

Замечание. То же рассуждение показывает, более общим образом, что если φ — строгий морфизм группы $\mathbf{R}^n$ в группу G, сужение которого на некоторую окрестность нуля есть локальный изоморфизм $\mathbf{R}^n$ в G, то всякое непрерывное представление $\mathbf{R}^m$ в G имеет вид $x \mapsto \varphi(u(x))$, где u — линейное отображение $\mathbf{R}^m$ в $\mathbf{R}^n$.

В случае, когда $m = n = 1$, предложение 3 дает следующий результат:

Предложение 4. *Если* φ — *канонический гомоморфизм* $\mathbf{R}$ *на* $\mathbf{T}$, *то всякое непрерывное представление* $\mathbf{R}$ *в* $\mathbf{T}$ *имеет вид* $x \mapsto \varphi(ax)$, *где* $a \in \mathbf{R}$; *при этом, если* $a \neq 0$, *то* φ — *строгий морфизм* $\mathbf{R}$ *на* $\mathbf{T}$.

4. *Автоморфизмы группы* $\mathbf{T}^n$

Пусть H — замкнутая подгруппа группы $\mathbf{R}^n$ и φ — канонический гомоморфизм $\mathbf{R}^n$ на факторгруппу $\mathbf{R}^n/H$. Если f — непрерывное представление $\mathbf{R}^n/H$ в топологическую группу G, то $\dot{f} = f \circ \varphi$ есть периодическое непрерывное представление $\mathbf{R}^n$ в G, группа периодов которого содержит H; обратно, всякое периодическое непрерывное представление $\mathbf{R}^n$ в G, группа периодов которого содержит H, имеет этот вид.

В случае, когда $H = \mathbf{Z}^n$, факторгруппа $\mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n = \mathbf{T}^n$ *компактна*; следовательно, всякое непрерывное представление f группы $\mathbf{T}^n$ в отделимую топологическую группу G является *строгим морфизмом* $\mathbf{T}^n$ в G (гл. III, § 2, n° 8, замечание 1), а $\dot{f} = f \circ \varphi$ — строгим морфизмом $\mathbf{R}^n$ в G; при этом $f(\mathbf{T}^n) = \dot{f}(\mathbf{R}^n)$ есть *компактная* подгруппа группы G, изоморфная группе $\mathbf{T}^p$ $(0 \leqslant p \leqslant n)$.

В частности, видим, что единственным непрерывным представлением $\mathbf{T}^n$ в группу $\mathbf{R}^m$ является *тождественно нулевое* отображение ибо $\{0\}$ есть единственная компактная подгруппа группы $\mathbf{R}^m$.

Применим предшествующее к непрерывным представлениям $\mathbf{T}^n$ в $\mathbf{T}^p$; пусть f — такое представление, а φ — канонический гомоморфизм $\mathbf{R}^n$ на $\mathbf{T}^n$; тогда $f \circ \varphi$ есть непрерывное представление $\mathbf{R}^n$ в $\mathbf{T}^p$, а потому (предложение 3) существует линейное отображение u пространства $\mathbf{R}^n$ в $\mathbf{R}^p$ такое, что $f \circ \varphi = \psi \circ u$, где ψ — канонический гомоморфизм $\mathbf{R}^p$ на $\mathbf{T}^p$. Если $x \in \mathbf{Z}^n$, то $f(\varphi(x))$ есть нейтральный элемент группы $\mathbf{T}^p$, так что необходимо, $u(x) \in \mathbf{Z}^p$, иными словами, должно быть $u(\mathbf{Z}^n) \subset \mathbf{Z}^p$. Обратно, каково бы ни было линейное отображение u пространства $\mathbf{R}^n$ в $\mathbf{R}^p$, удовлетворяющее этому условию, $\psi \circ u$ есть непрерывное периодическое представление $\mathbf{R}^n$ в $\mathbf{T}^p$, группа периодов которого содержит $\mathbf{Z}^n$; тем самым оно определяет непрерывное представление $\mathbf{T}^n$ в $\mathbf{T}^p$.

Выясним, при каких условиях f есть *изоморфизм* $\mathbf{T}^n$ на под группу группы $\mathbf{T}^p$. Прежде всего, необходимо, чтобы u было *инъективным* отображением $\mathbf{R}^n$ в $\mathbf{R}^p$, ибо в противном случае векторное подпространство $\overset{-1}{u}(0)$ содержало бы точки $x \neq 0$, сколь угодно близкие к 0, и в такой точке мы имели бы $f(\varphi(x)) =$

$=f(\varphi(0))$, но $\varphi(x)\neq\varphi(0)$, в противоречие с предположением. Это условие влечет поэтому в первую очередь, что $p\geqslant n$. Образ $u(\mathbf{Z}^n)$ является тогда дискретной подгруппой ранга n группы $\mathbf{Z}^p$. *Инвариантные множители* этой подгруппы относительно $\mathbf{Z}^p$ (§ 1, n° 1 и Алг., гл. VII, § 4, n° 2) должны быть все равны *единице*; в самом деле, иначе существовали бы точка $x\in\mathbf{Z}^n$ и целое $k>1$ такие, что $u\left(\frac{1}{k}x\right)\in\mathbf{Z}^n$, но $\frac{1}{k}x\notin\mathbf{Z}^n$, а отсюда вытекало бы, что $f\left(\varphi\left(\frac{1}{k}x\right)\right)=f(\varphi(0))$, но $\varphi\left(\frac{1}{k}x\right)\neq\varphi(0)$, в противоречие с предположением. Обратно, если это условие выполнено, то $u(\mathbf{R}^n)\cap\mathbf{Z}^p$ совпадает с $u(\mathbf{Z}^n)$, и f есть изоморфизм $\mathbf{T}^n$ на $u(\mathbf{R}^n)/u(\mathbf{Z}^n)$.

Применяя это рассуждение к случаю $p=n$, получаем следующий результат:

Предложение 5. *Всякий изоморфизм топологической группы $\mathbf{T}^n$ на какую-либо ее подгруппу есть автоморфизм группы $\mathbf{T}^n$, получающийся посредством факторизации некоторого линейного отображения и пространства $\mathbf{R}^n$ на себя, сужение которого на $\mathbf{Z}^n$ дает автоморфизм этой последней группы.*

Это сводится к тому (§ 1, n° 1), что если $u(e_i)=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}e_j$, то a_{ij} должны быть *целыми числами*, определитель которых $\det(a_{ij})$ равен $+1$ или -1.

В частности, при $n=1$:

Предложение 6. *Единственными изоморфизмами топологической группы $\mathbf{T}$ на какую-либо из ее подгрупп являются тождественное отображение и симметрия $x\mapsto -x$.*

Упражнения

1) Пусть φ — канонический гомоморфизм $\mathbf{R}^n$ на $\mathbf{T}^n$ и u — линейное отображение $\mathbf{R}^m$ в $\mathbf{R}^n$. Для того чтобы $\varphi\circ u$ было строгим морфизмом $\mathbf{R}^m$ в $\mathbf{R}^n$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из следующих условий:

а) $\overset{-1}{u}(\mathbf{Z}^n)$ имеет ранг m;

б) $u(\mathbf{R}^m)\cap\mathbf{Z}^n$ имеет ранг, равный размерности $u(\mathbf{R}^m)$.

2) Показать, что единственное непрерывное представление аддитивной топологической группы p-адических чисел (гл. III, § 6, упражнение 23 и след.) в аддитивную группу $\mathbf{R}$ тождественно равно нулю.

*3) Всякое p-адическое число x (упражнение 2) может быть записано в виде $\sum\limits_{-\infty}^{\infty} \alpha_k p^k$, где α_k — целые рациональные числа и лишь конечное число коэффициентов α_k с индексом $k < 0$ отлично от нуля. При этом, если $\sum\limits_{-\infty}^{\infty} \alpha_k p^k = \sum\limits_{-\infty}^{\infty} \beta_k p^k$, то рациональные числа $\sum\limits_{-\infty}^{-1} \alpha_k p^k$ и $\sum\limits_{-\infty}^{-1} \beta_k p^k$ сравнимы по модулю 1. Пусть $\varphi_p(x)$ — класс рационального числа $\sum\limits_{-\infty}^{-1} \alpha_k p^k \pmod 1$.

а) Показать, что φ_p есть непрерывное представление топологической группы $\mathbf{Q}_p$ в $\mathbf{T}$ и что для всякого непрерывного представления f группы $\mathbf{Q}_p$ в $\mathbf{T}$ существует, и притом единственное, $a \in \mathbf{Q}_p$ такое, что $f(x) = \varphi_p(ax)$ для всех $x \in \mathbf{Q}_p$. [Заметить, что f определяется знанием элементов $f(p^k)$ с $k \leqslant 0$; показать, что каждый из этих элементов есть класс (mod 1) некоторой дроби, имеющей знаменателем степень p; вывести отсюда, что существует такое $a \in \mathbf{Q}_p$, что $f(p^k) = \varphi_p(ap^k)$ для всех $k \leqslant 0$.]

б) Показать, что если $x \in \mathbf{Q}$, то $\varphi(x) = \sum\limits_{p} \varphi_p(x)$, где суммирование распространено на все простые числа, а $\varphi\colon \mathbf{R} \to \mathbf{T}$ есть канонический гомоморфизм. [Заметить, что все члены этой суммы, за исключением конечного их числа, равны нулю.]

*4) а) Пусть G — коммутативная локально компактная группа, H — ее замкнутая подгруппа, изоморфная $\mathbf{R}^p \times \mathbf{T}^q$ с целыми $p \geqslant 0$, $q \geqslant 0$; предположим, что G/H изоморфна $\mathbf{R}$ или $\mathbf{T}$. Показать, что G изоморфна произведению H на некоторую замкнутую подгруппу L, изоморфную G/H. [Применить упражнение 7г § 3 главы V для получения такого непрерывного представления f группы $\mathbf{R}$ в G, что $f(\mathbf{R}) \not\subset H$; получить отсюда другое непрерывное представление g группы $\mathbf{R}$ в G, для которого $f(t) - g(t) \in H$ при всех $t \in \mathbf{R}$, а $f(\mathbf{R}) \cap H = \{e\}$; заметить, что $\overset{-1}{f}(H)$ есть замкнутая подгруппа группы $\mathbf{R}$, отличная от $\mathbf{R}$, и что для каждого элемента $z \neq e$ из H существует непрерывное представление u группы $\mathbf{R}$ в H такое, что $u(1) = z$.]

б) Пусть G — отделимая коммутативная топологическая группа и H — ее замкнутая подгруппа, изоморфная $\mathbf{R}^p \times \mathbf{T}^q$; предположим, что существует сюръективное непрерывное представление $\varphi\colon \mathbf{R} \to G/H$. Показать, что существует такое непрерывное представление

$f\colon \mathbf{R} \to G$, что $f(\mathbf{R}) \cap H = \{e\}$ и $G = Hf(\mathbf{R})$. [Свести к случаю а), рассматривая в G верхнюю грань заданной топологии и топологии, фундаментальную систему окрестностей нуля которой образуют множества $\overset{-1}{p}(\varphi(I))$, где $p\colon G \to G/H$ — каноническое отображение, а I пробегает фундаментальную систему окрестностей нуля в $\mathbf{R}$; доказать локальную компактность G в этой новой топологии (см. упражнение 10д § 4 главы III).]

в) Привести пример, где сужение отображения p на $f(\mathbf{R})$ не было бы взаимно непрерывным. [См. упражнение 2е § 1.]

5) Пусть G — связная топологическая группа и H — ее компактный нормальный делитель, не имеющий сколь угодно малых подгрупп (гл. III, § 2, упражнение 30). Показать, что H содержится в центре группы G. [Заметить, что для s, достаточно близких к e в G, образ H при отображении $x \longmapsto sxs^{-1}$ сколь угодно близок к e.]

6) Пусть G — топологическая группа, а H — ее замкнутый нормальный делитель, изоморфный $\mathbf{R}^n$ ($n \geqslant 1$) и такой, что G/H коммутативна.

а) Предположим, кроме того, что H не содержит ни одного связного нормального делителя группы G, за исключением самого H и $\{e\}$, и не содержится в центре группы G. Показать, что при заданном $x_0^1 \in G$, не перестановочном со всеми элементами из H, для каждого $v \in H$ существует, и притом единственный, элемент $u \in H$ такой, что $x_0^{-1}ux_0u^{-1} = v$. [Заметить, что при аддитивных обозначениях в H это уравнение записывается в виде $u - x_0^{-1}ux_0 = -v$ и что непрерывный эндоморфизм $u \longmapsto u - x_0^{-1}ux_0$ группы H есть линейное отображение $\mathbf{R}^n$ в себя. Доказать, что его ядро является нормальным делителем G.] При этом, если $f(u)$ — тот единственный элемент $u \in H$, для которого $x_0^{-1}ux_0u^{-1} = v$, то f — взаимно непрерывный автоморфизм группы H.

б) Показать, что, в предположениях пункта а), непрерывное отображение $g\colon y \longmapsto (f(x_0^{-1}yx_0y^{-1}))^{-1}y$ группы G в себя имеет образом подгруппу L, состоящую из элементов, перестановочных с x_0, и что отношение $g(y) = g(y')$ равносильно $yy'^{-1} \in H$. Вывести отсюда, что существует непрерывная биекция $h\colon G/H \to L$, обращением которой служит сужение на L канонического отображения $p\colon G \to G/H$ и заключить, что G изоморфна полупрямому топологическому произведению H и L.

*7) Пусть G – топологическая группа и H — ее нормальный делитель, изоморфный $\mathbf{R}^p \times \mathbf{T}^q$ ($p \geqslant 0$, $q \geqslant 0$); предположим, что существует сюръективное непрерывное представление $\varphi\colon \mathbf{R} \to G/H$. Показать, что существует такое непрерывное представление $f\colon \mathbf{R} \to G$, что $f(\mathbf{R}) \cap H = \{e\}$ и $G = Hf(\mathbf{R})$. [Используя упражнение 4б, а также упражнение 8 § 3 главы V, свести к случаю, когда G не коммутативна; затем, используя упражнение 5,— к случаю, когда $q=0$; после этого применить индукцию по p, используя упражнение 6.]

§ 3. Бесконечные суммы в группах $\mathbf{R}^n$

1. *Суммируемые семейства в* $\mathbf{R}^n$

Так как всякая точка из $\mathbf{R}^n$ обладает *счетной* фундаментальной системой окрестностей, то семейство (x_ι) точек аддитивной группы $\mathbf{R}^n$ может быть суммируемым только когда множество тех индексов ι, для которых $x_\iota \neq 0$, *не более чем счетно* (гл. III, § 5, следствие предложения 1), что, по существу, сводит изучение суммируемых семейств в $\mathbf{R}^n$ к изучению суммируемых *последовательностей*. Однако по тем же соображениям, которые были изложены при рассмотрении суммируемых семейств в $\mathbf{R}$ (гл. IV, § 7), мы не будем в последующем накладывать на мощность множества индексов никаких ограничений.

Предложение 1. *Для того чтобы семейство $(x_\iota)_{\iota\in I}$ точек $x_\iota = (x_{\iota,k})_{1\leqslant k\leqslant n}$ группы $\mathbf{R}^n$ было суммируемым, необходимо и достаточно, чтобы каждое из n семейств $(x_{\iota,k})_{\iota\in I}$ вещественных чисел было суммируемо в* $\mathbf{R}$.

Справедливость утверждения вытекает из предложения 4 § 5 главы III.

Это условие может быть преобразовано следующим образом:

Теорема 1. *Для того чтобы семейство $(x_\iota)_{\iota\in I}$ точек из $\mathbf{R}^n$ было суммируемым, необходимо и достаточно, чтобы семейство $(\|x_\iota\|)$ евклидовых норм этих точек было суммируемо в* $\mathbf{R}$.

Это без труда следует из предложения 1, условия суммируемости семейства вещественных чисел (гл. IV, § 7, теорема 3), неравенств $\sup\limits_{1\leqslant k\leqslant n} |x_{\iota,k}| \leqslant \|x_\iota\| \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n} |x_{\iota,i}|$ и принципа сравнения (гл. IV, § 7, теорема 2).

Можно поступать несколько иначе, установив сначала следующее предложение:

Предложение 2. *Для всякого конечного семейства $(x_i)_{i\in I}$ точек из $\mathbf{R}^n$ имеет место неравенство*

$$\sum_{i\in I} \|x_i\| \leqslant 2n\cdot\sup_{J\subset I} \Big\|\sum_{i\in J} x_i\Big\| . \tag{1}$$

В самом деле, если $x_i=(x_{ij})_{1\leqslant j\leqslant n}$, то $\|x_i\|\leqslant\sum_{j=1}^{n}|x_{ij}|$, и потому $\sum_{i\in I}\|x_i\|\leqslant\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i\in I}|x_{ij}|\right)$. Но $\sum_{i\in I}|x_{ij}|=\sum_{i\in I}x_{ij}^{+}+\sum_{i\in I}x_{ij}^{-}$, и так как *для любого подмножества J множества I* $-\sum_{i\in I}x_{ij}^{-}\leqslant-\sum_{i\in J}x_{ij}^{-}\leqslant\leqslant\sum_{i\in J}x_{ij}\leqslant\sum_{i\in J}x_{ij}^{+}\leqslant\sum_{i\in I}x_{ij}^{+}$, то заключаем, что $\sum_{i\in I}|x_{ij}|\leqslant 2\sup_{J\subset I}\left|\sum_{i\in J}x_{ij}\right|$. Замечая, что $\left|\sum_{i\in J}x_{ij}\right|\leqslant\left\|\sum_{i\in J}x_i\right\|$, приходим к неравенству (1).

С другой стороны, теорема 1 равносильна следующему предложению (поскольку $\mathbf{R}^n$ — полная группа): для того чтобы семейство (x_ι) удовлетворяло критерию Коши (гл. III, § 5, теорема 1), необходимо и достаточно, чтобы этому критерию удовлетворяло семейство $(\|x_\iota\|)$. В самом деле, это условие достаточно в силу неравенства треугольника и необходимо в силу неравенства (1).

Кроме того, имеет место неравенство

$$\left\|\sum_\iota x_\iota\right\|\leqslant\sum_\iota\|x_\iota\|, \tag{2}$$

получающееся путем предельного перехода из аналогичного неравенства для конечных частичных сумм.

Следствие. *Для того чтобы семейство (x_ι) точек группы $\mathbf{R}^n$ было суммируемым, необходимо и достаточно, чтобы множество конечных частичных сумм этого семейства было ограниченно в $\mathbf{R}^n$.*

Это условие необходимо в силу теоремы 1 и неравенства треугольника; оно достаточно в силу неравенства (1) и теоремы 1.

Предложение 3. *Пусть $(x_\lambda)_{\lambda\in L}$ — суммируемое семейство точек группы $\mathbf{R}^m$, $(y_\mu)_{\mu\in M}$ — суммируемое семейство точек группы $\mathbf{R}^n$ и f — билинейное отображение $\mathbf{R}^m\times\mathbf{R}^n$ в $\mathbf{R}^p$. Тогда семейство $(f(x_\lambda, y_\mu))_{(\lambda,\mu)\in L\times M}$ суммируемо и*

$$\sum_{(\lambda,\mu)\in L\times M}f(x_\lambda, y_\mu)=f\left(\sum_{\lambda\in L}x_\lambda,\ \sum_{\mu\in M}y_\mu\right). \tag{3}$$

Чтобы доказать суммируемость семейства $(f(x_\lambda, y_\mu))$, достаточно (предложение 1) установить суммируемость каждого из p семейств, образованных координатами точек $f(x_\lambda, y_\mu)\in\mathbf{R}^p$; иначе говоря, можно ограничиться случаем, когда f есть билинейная *форма*; но тогда $f(x, y)=\sum_{i,j}a_{ij}x_iy_j$, что сводит дело к случаю

$f(x, y) = x_i y_j$, а для него предложение уже доказано (гл. IV, § 7, предложение 1).

Специализируя функцию f, получаем, в частности, такие следствия:

Следствие 1. *Если $(a_\lambda)_{\lambda \in L}$ — суммируемое семейство вещественных чисел и $(x_\mu)_{\mu \in M}$ — суммируемое семейство точек из $\mathbf{R}^n$, то семейство $(a_\lambda x_\mu)_{(\lambda, \mu) \in L \times M}$ суммируемо и*

$$\sum_{(\lambda, \mu) \in L \times M} a_\lambda x_\mu = \Big(\sum_{\lambda \in L} a_\lambda\Big)\Big(\sum_{\mu \in M} x_\mu\Big). \tag{4}$$

Следствие 2. *Если $(x_\lambda)_{\lambda \in L}$ и $(y_\mu)_{\mu \in M}$ — суммируемые семейства точек из $\mathbf{R}^n$, то семейство $((x_\lambda \mid y_\mu))$* (см. гл. VI, § 2, n° 2) *суммируемо в $\mathbf{R}$ и*

$$\sum_{(\lambda, \mu) \in L \times M} (x_\lambda \mid y_\mu) = \Big(\sum_{\lambda \in L} x_\lambda \,\Big|\, \sum_{\mu \in M} y_\mu\Big). \tag{5}$$

2. *Ряды в* $\mathbf{R}^n$

Для того чтобы ряд с общим членом $x_m = (x_{mi})_{1 \leqslant i \leqslant n}$ был сходящимся в $\mathbf{R}^n$, очевидно, необходимо и достаточно, чтобы каждый из n рядов $(x_{mi})_{m \in \mathbf{N}}$ был сходящимся в $\mathbf{R}$.

Определение 1. *Ряд точек из $\mathbf{R}^n$ называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд евклидовых норм этих точек.*

Предложение 4. *Для того чтобы ряд точек из $\mathbf{R}^n$ был коммутативно сходящимся, необходимо и достаточно, чтобы он был абсолютно сходящимся.*

Это — следствие предложения 9 § 5 главы III и доказанной выше теоремы 1.

Примеры § 7 главы IV показывают, что ряд в $\mathbf{R}^n$ может быть *сходящимся*, не будучи *абсолютно сходящимся*.

Упражнения

*1) а) Пусть $(x_k)_{1 \leqslant k \leqslant m}$ — конечная последовательность вещественных чисел такая, что $|x_k| \leqslant 1$ $(1 \leqslant k \leqslant m)$ и $\sum_{k=1}^{m} x_k = 0$. Показать, что существует перестановка σ интервала $[1, m] \subset \mathbf{N}$, для которой $\left|\sum_{k=1}^{p} x_{\sigma(k)}\right| \leqslant 1$ при *любом* p $(1 \leqslant p \leqslant m)$ и которая сохраняет порядок тех индексов h, для которых $x_h > 0$, и

тех индексов h, для которых $x_h < 0$ (т. е. если $h < k$, $x_h > 0$ и $x_k > 0$, то $\sigma(h) < \sigma(k)$; и аналогично для индексов h, при которых $x_h < 0$).

б) Пусть $(x_k)_{1 \leqslant k \leqslant m}$ — конечная последовательность точек $x_k = (x_{ki})_{1 \leqslant i \leqslant n}$ из $\mathbf{R}^n$ такая, что $\| x_k \| \leqslant 1$ $(1 \leqslant k \leqslant m)$ и $\sum_{k=1}^{m} x_k = 0$. Показать, что существует перестановка σ интервала $[1, m] \subset \mathbf{N}$, для которой $\left\| \sum_{k=1}^{p} x_{\sigma(k)} \right\| \leqslant 5^{\frac{n-1}{2}}$ при *любом* p $(1 \leqslant p \leqslant m)$. [Применить индукцию по n, рассматривая $\mathbf{R}^n$ как произведение $\mathbf{R}^{n-1} \times \mathbf{R}$ и полагая $x_k = (x'_k, x_{kn})$, где $x'_k \in \mathbf{R}^{n-1}$. Взять подмножество H интервала $[1, m] \subset \mathbf{N}$, при котором $\left\| \sum_{k \in H} x_k \right\|$ максимально; посредством вращения привести к случаю, когда $\sum_{k \in H} x'_k = 0$, и показать, что в этом случае необходимо $x_{kn} \geqslant 0$ для $k \in H$ и $x_{kn} \leqslant 0$ для $k \notin H$; в заключение использовать а) и предположение индукции.]

в) Пусть $(x_k)_{1 \leqslant k \leqslant m}$ — конечная последовательность точек из $\mathbf{R}^n$ такая, что $\| x_k \| \leqslant 1$ $(1 \leqslant k \leqslant m)$ и $\left\| \sum_{k=1}^{m} x_k \right\| = a > 0$; показать, что существует перестановка σ интервала $[1, m] \subset \mathbf{N}$, для которой $\left\| \sum_{k=1}^{p} x_{\sigma(k)} \right\| \leqslant (a+1)\, 5^{\frac{n-1}{2}}$ при *любом* p $(1 \leqslant p \leqslant m)$. [Свести к случаю б).]

*2) Пусть $(x_m)_{m \in \mathbf{N}}$ — бесконечная последовательность точек из $\mathbf{R}^n$ такая, что $\lim_{m \to \infty} x_m = 0$. Для каждого конечного $H \subset \mathbf{N}$ положим $s_H = \sum_{m \in H} x_m$. Показать, что могут представиться два случая:

1° Либо $\lim_{\mathfrak{F}} \| s_H \| = +\infty$, где $\mathfrak{F}$ — множество всех конечных подмножеств из $\mathbf{N}$, фильтрующееся по возрастанию.

2° Либо среди перестановок σ множества $\mathbf{N}$ существуют такие, для которых ряд с общим членом $x_{\sigma(m)}$ сходится в $\mathbf{R}^n$; в этом случае множество A сумм $\mathop{\mathsf{S}}\limits_{m=0}^{\infty} x_{\sigma(m)}$ рядов, отвечающих всевозможным таким перестановкам, есть *аффинное линейное многообразие* в $\mathbf{R}^n$. [С помощью упражнения 1б показать сначала, что всякая предельная точка отображения $H \longmapsto s_H$ по фильтрующемуся множеству $\mathfrak{F}$ есть сумма сходящегося ряда $(x_{\sigma(m)})$, отвечающего надлежащей перестановке σ. Использовать упражнение 3 § 5 главы III для доказательства того, что множество A, если оно не пусто, является смежным классом по некоторой замкнутой подгруппе группы $\mathbf{R}^n$. Наконец, используя упражнение 1в, а также упражнение 15 § 4 главы II, показать, что A *связно*.]

ИСТОРИЧЕСКИЙ ОЧЕРК

К ГЛАВЕ VII

(Римские цифры относятся к библиографии, помещенной в конце настоящего очерка.)

С точностью до языка, основные результаты исследования подгрупп и факторгрупп аддитивных групп $\mathbf{R}^n$ были известны к концу XIX века. В самом деле, многочисленные вопросы арифметики и анализа привели к исследованию строения подгрупп групп $\mathbf{R}^n$, порождаемых *конечным* числом точек. Так, Лагранж, развивая теорию «непрерывных дробей», показывает попутно, что для всякого вещественного числа θ существуют целые m, n, не равные одновременно нулю и такие, что $m - n\theta$ сколь угодно мало ((I), т. VII, стр. 27). В 1835 г. Якоби, в связи со своими исследованиями периодических аналитических функций нескольких комплексных переменных, показывает, что для любых трех векторов $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z} \in \mathbf{R}^2$ существуют целые m, n, p, не равные одновременно нулю и такие, что вектор $m\boldsymbol{x} + n\boldsymbol{y} + p\boldsymbol{z}$ сколь угодно мал ((II), т. II, стр. 25). Несколько позже Дирихле, в связи с работами по теории алгебраических чисел, открывает свой знаменитый «принцип ящиков» (упражнения 10 и 11 § 1), с помощью которого он устанавливает, что p форм $\alpha_{i1}m_1 + \alpha_{i2}m_2 + \ldots + \alpha_{in}m_n - q_i$ $(1 \leqslant i \leqslant p)$ с произвольными α_{ij} и целыми m_j и q_i (не равными все нулю) могут быть одновременно сделаны сколь угодно малыми ((III), т. I, стр. 635). С помощью совершенно другого метода Эрмит приходит в 1850 г. к тому же результату для частного случая форм вида $m\theta_i - q_i$ $(1 \leqslant i \leqslant p)$ ((IV), т. I, стр. 105). Наконец, в 1884 г. Кронекер устанавливает общий результат, сформулированный в предложении 7 § 1 ((V), т. III_1, стр. 47).

Все эти работы, разумеется, не зависели от общей теории локально компактных коммутативных групп, созданной лишь недавно (см. Исторический очерк к главе III); но последняя теория, и в особенности теория двойственности *), позволила представить эти старые работы в новом свете,

*) См., например, A. W e i l, L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications, Actual. Scient. et Ind., n° 869, Paris, Hermann, 1940, стр. 108—109. [Русск. перевод: А. В е й л ь, Интегрирование в топологических группах и его применения, ИЛ, М. 1950, стр. 124.]

выявив с особой наглядностью фундаментальное понятие ассоциированных подгрупп; именно на этих идеях построено изложение, данное в тексте *).

Точка зрения, на которую мы стали в этой главе при изложении указанных результатов, является исключительно *качественной*, т. е. мы доказываем *существование* линейных комбинаций p точек с целыми коэффициентами, сколь угодно близких к заданной точке (возможно, подчиненной надлежащим условиям); но можно задаться вопросом, имеется ли зависимость между полученным приближением и величиной коэффициентов доставивших его линейных комбинаций: это — *количественная* точка зрения «диофантовых приближений», на которой стоит большинство упомянутых выше авторов. Эти вопросы были в течение века предметом непрекращавшихся весьма многочисленных и разнообразных исследований, богатых приложениями к теории чисел; в наши намерения не входит излагать их здесь, и мы ограничимся тем, что отошлем читателя, желающего войти в круг этих теорий, к фундаментальным работам Минковского (VI) и Г. Вейля (VII), послужившим источником весьма обширной литературы **).

---

*) Набросок аналогичного изложения имеется уже у Марселя Рисса. (M. R i e s z, Modules réciproques, Congrès Intern. des Math., Oslo, 1936, т. II, стр. 36.)

**) Библиографию этих вопросов, содержащую и работы сравнительно нового времени, можно найти, например, в книге J. K o k s m a, Diophantische Approximationen, Berlin (Springer), 1936.

БИБЛИОГРАФИЯ

(I) J. L. Lagrange, Œuvres, т. VII, Paris (Gauthier-Villars), 1877.

(II) C. G. J. Jacobi, Gesammelte Werke, т. II, Berlin (G. Reimer), 1882.

(II bis) C. G. J. Jacobi, Ueber die vierfach periodischen Funktionen zweier Variabeln (Ostwald's Klassiker, n° 64, Leipzig (Engelmann), 1895).

(III) P. G. Lejeune-Dirichlet, Werke, т. I, Berlin (G. Reimer), 1889.

(IV) Ch. Hermite, Œuvres, т. I, Paris (Gauthier-Villars), 1905.

(V) L. Kronecker, Werke, т. III_1, Leipzig (Teubner), 1899.

(VI) H. Minkowski, Gesammelte Abhandlungen, 2 тт., Leipzig — Berlin (Teubner), 1911.

(VII) H. Weyl, Ueber die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins, Math Ann., т. LXXVII (1916), стр. 313 (=*Selecta*, Basel — Stuttgart (Birkhäuser), 1956, стр. 111).

ГЛАВА VIII

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

1. Комплексные числа; кватернионы

1. Определение комплексных чисел

Полином $X^2 + 1$ не имеет корней в $\mathbf{R}$, поскольку $x^2 + 1 \geqslant 1$ при любом $x \in \mathbf{R}$; таким образом, этот полином неприводим над $\mathbf{R}$. Впрочем, это — частный случай аналогичного результата, имеющего место для всякого *упорядоченного поля* (Алг., гл. VI, § 2).

Определение 1. *Полем* $\mathbf{C}$ *комплексных чисел называют (коммутативное) поле* $\mathbf{R}[X]/(X^2 + 1)$; *канонический образ* X *в* $\mathbf{C}$ *обозначают* i, *так что* $\mathbf{C}$ *получается путем алгебраического присоединения к полю* $\mathbf{R}$ *корня* i *полинома* $X^2 + 1$; *элементы поля* $\mathbf{C}$ *называют комплексными числами.*

С алгебраической точки зрения важность поля $\mathbf{C}$ коренится в следующей фундаментальной теореме.

Теорема 1 (теорема Даламбера — Гаусса). *Поле* $\mathbf{C}$ *комплексных чисел алгебраически замкнуто.*

Для доказательства достаточно (Алг., гл. VI, § 2, теорема 3) установить, что: 1° всякий элемент $\geqslant 0$ имеет *квадратный корень* в $\mathbf{R}$; 2° всякий полином *нечетной* степени с коэффициентами из $\mathbf{R}$ имеет *по крайней мере один корень* в $\mathbf{R}$. Первое из этих предложений мы уже доказали (гл. IV, § 3, n° 3). С другой стороны, если $f(X) = a_0X^n + a_1X^{n-1} + \ldots + a_n$ есть полином нечетной степени n ($a_0 \neq 0$) с вещественными коэффициентами, то при $x \neq 0$ можно написать $f(x) = a_0x^ng(x)$, где $g(x) = 1 + \frac{a_1}{a_0x} + \ldots$

$\ldots + \frac{a_n}{a_0 x^n}$ стремится к $+1$, когда x стремится к $+\infty$ или $-\infty$. Поэтому существует число $a > 0$ такое, что $f(a)$ имеет знак числа a_0, а $f(-a)$ — знак числа $-a_0$; по теореме Больцано (гл. IV, § 6, теорема 2) f имеет в интервале $[-a, a]$ по крайней мере один корень.

Замечания. 1) Теорему 1 можно доказать без применения теории упорядоченных полей, воспользовавшись свойствами *топологии* поля $\mathbf{C}$, которая будет определена ниже (n° 2); см. упражнение 2 § 2, а также часть настоящего трактата, посвященную алгебраической топологии, где теорема Даламбера — Гаусса будет установлена как следствие результатов, относящихся к *степени отображения*.

2) Так как $\mathbf{C}$ — второй степени относительно $\mathbf{R}$, то мы видим, что, с точностью до изоморфизма, оно есть *единственное* алгебраическое расширение поля $\mathbf{R}$, отличное от $\mathbf{R}$, и не существует поля, содержащегося в $\mathbf{C}$ и содержащего $\mathbf{R}$, которое было бы отлично от $\mathbf{R}$ и от $\mathbf{C}$.

Как известно (Алг., гл. V, § 3), $\mathbf{R}$ может быть отождествлено с подполем поля $\mathbf{C}$ и всякий элемент $z \in \mathbf{C}$ представим, и притом единственным образом, в виде $x + iy$, где x и y — вещественные числа; x называют *вещественной частью* z и обозначают $\mathfrak{R}(z)$, y — *мнимой частью* и обозначают $\mathfrak{J}(z)$; комплексные числа вида iy (где y вещественно и $\neq 0$) называют чисто мнимыми. Отношение $x + iy = 0$ (где x и y вещественны) равносильно отношению «$x = 0$ и $y = 0$».

Так как $i^2 = -1$, то элементы поля $\mathbf{C}$, заданные своими вещественной и мнимой частями, удовлетворяют следующим вычислительным правилам:

$$(x + iy) + (x' + iy') = (x + x') + i(y + y'), \tag{1}$$

$$(x + iy)(x' + iy') = (xx' - yy') + i(xy' + yx'). \tag{2}$$

В частности, $(x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 \in \mathbf{R}$, откуда при $x + iy \neq 0$ получаем

$$\frac{1}{x + iy} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i\frac{y}{x^2 + y^2}. \tag{3}$$

Вторым корнем полинома $X^2 + 1$ в $\mathbf{C}$ служит $-i$; следовательно (Алг., гл. V, § 6, n° 2), единственным *автоморфизмом* поля $\mathbf{C}$, отличным от тождественного отображения и оставляющим инвариантными вещественные числа, является отображение, сопоставляющее каждому комплексному числу $z = x + iy$ комплексное

число $x - iy$, обозначаемое $\bar{z}$ и называемое (в соответствии с общими определениями) комплексным числом, *сопряженным* к z. Имеем $\mathfrak{R}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$, $\mathfrak{I}(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$. Если $f(z)$ — полином с *вещественными* коэффициентами, то в силу этого автоморфизма $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$ для каждого $z \in \mathbf{C}$.

Вещественное число $z\bar{z} = x^2 + y^2$ называется *алгебраической нормой* числа z (или просто *нормой* z, если это не может повлечь недоразумения); оно $\geqslant 0$ и обращается в нуль, только когда $z = 0$. Положительное число $\sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$ равно абсолютному значению z, если z вещественно; его называют *абсолютным значением* z и обозначают $|z|$ также в случае произвольного комплексного z (Алг., гл. VI, § 2, n° 6). Отношения $|z| = 0$ и $z = 0$ равносильны. Каковы бы ни были комплексные числа z и z', числом, сопряженным к zz', служит $\bar{z}\bar{z}'$, так что $|zz'|^2 = zz'\bar{z}\bar{z}' = |z|^2 |z'|^2$, откуда $|zz'| = |z||z'|$, т. е. *абсолютное значение произведения равно произведению абсолютных значений сомножителей.* В частности, при $z \neq 0$ и $z' = \frac{1}{z}$ получаем $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$.

Наконец, для любых комплексных чисел z, z' имеет место *неравенство треугольника*

$$|z + z'| \leqslant |z| + |z'|.$$

2. *Топология поля* C

Отображение $(x, y) \mapsto x + iy$ числовой плоскости $\mathbf{R}^2$ на $\mathbf{C}$ биективно; посредством этого отображения можно *перенести* в $\mathbf{C}$ топологию из $\mathbf{R}^2$ (см. гл. VI, § 1, n° 5). Определенная таким образом в $\mathbf{C}$ топология *согласуется* со структурой тела в $\mathbf{C}$ (гл. III, § 6, n° 7); в самом деле, она согласуется с его структурой кольца (гл. VI, § 1, n° 5), и в силу (3) функция $\frac{1}{z}$ непрерывна на дополнении $\mathbf{C}^*$ к точке 0 в $\mathbf{C}$.

Тем самым, наделяя множество $\mathbf{C}$ этой топологией и структурой тела, определенной выше (определение 1), мы получаем в $\mathbf{C}$ структуру *топологического тела* (гл. III, § 6, n° 7); говоря о топологии в $\mathbf{C}$, мы всегда будем иметь в виду указанную топологию.

В дальнейшем мы будем чаще всего *отождествлять* множества $\mathbf{C}$ и $\mathbf{R}^2$, рассматриваемые как топологические пространства; подполе $\mathbf{R}$ поля $\mathbf{C}$ будет тогда отождествляться с осью абсцисс плоскости $\mathbf{R}^2$, называемой по этой причине *вещественной осью*; аналогично ось ординат плоскости $\mathbf{R}^2$ называется *мнимой осью* (заметим, что она не является подполем поля $\mathbf{C}$). Полупрямая с параметрами $(1, 0)$ (отождествляемая с $\mathbf{R}_+$) называется *положительной вещественной полуосью*, а противоположная ей полупрямая, с параметрами $(-1, 0)$, — *отрицательной вещественной полуосью*.

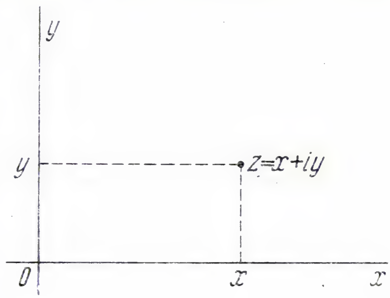

Рис. 8

Чтобы иллюстрировать чертежами то, что будет говориться относительно $\mathbf{C}$ или $\mathbf{R}^2$, используют (хорошо известное из элементарной аналитической геометрии) представление $\mathbf{R}^2$ точками плоскости, на которой проведены две взаимно перпендикулярные координатные оси, изображающие соответственно вещественную и мнимую оси поля $\mathbf{C}$ (рис. 8).

Как и во всяком топологическом теле, всякая *рациональная функция* n комплексных переменных с комплексными коэффициентами непрерывна в каждой точке пространства $\mathbf{C}^n$, в которой знаменатель этой функции отличен от нуля.

Перестановка $z \mapsto \bar{z}$ в $\mathbf{C}$ *непрерывна*; тем самым она является *автоморфизмом* топологического поля $\mathbf{C}$.

При этом можно показать, что это — *единственный* автоморфизм топологического поля $\mathbf{C}$, отличный от тождественного (см. упражнение 4).

Функции $\mathfrak{R}(z)$ и $\mathfrak{I}(z)$ — не что иное, как *проекции* в $\mathbf{R}^2$ и потому *непрерывны*; то же верно и для абсолютного значения $|z|$, являющегося не чем иным, как *евклидовой нормой* (гл. VI, § 2, n° 1) точки (x, y) в $\mathbf{R}^2$.

Свойства абсолютного значения позволяют дать другое доказательство того, что топология в $\mathbf{C}$ согласуется со структурой тела (см. гл. IX, § 3, n° 2). В самом деле, непрерывность $z + z'$ вытекает из неравенства треугольника $|z + z'| \leqslant |z| + |z'|$;

непрерывность zz' — из того, что

$$|zz'-z_0z_0'| = |z_0(z'-z_0') + (z-z_0)z_0' + (z-z_0)(z'-z_0')| \leqslant$$
$$\leqslant |z_0|\,|z'-z_0'| + |z_0'|\,|z-z_0| + |z-z_0|\,|z'-z_0'|.$$

Наконец, непрерывность z^{-1} следует из формулы

$$|z^{-1}-z_0^{-1}| = |z|^{-1}\,|z-z_0|\,|z_0|^{-1}.$$

3. Мультипликативная группа C*

Как известно (гл. III, § 6, n° 7), топология, индуцируемая из **C** в мультипликативной группе **C*** комплексных чисел $\neq 0$, согласуется со структурой группы в **C***; будучи *открытой* в **C**, **C*** является *локально компактной* топологической группой (гл. I, § 9, предложение 13), тем самым *полной* (разумеется, относительно мультипликативной равномерной структуры; см. предложение 8 § 6 главы III). Мультипликативная группа $\mathbf{R}_+^*$ вещественных чисел >0 есть *замкнутая подгруппа* группы **C***. Другую подгруппу образует множество **U** всех комплексных чисел с *абсолютным значением, равным* 1; она отождествима с *единичной окружностью* S_1 в плоскости $\mathbf{R}^2$ и, следовательно, является *компактной* группой. При этом:

Предложение 1. *Топологическая группа* **C*** *изоморфна произведению топологических групп* $\mathbf{R}_+^*$ *и* **U**.

В самом деле, отображение $z \mapsto \left(|z|, \dfrac{z}{|z|}\right)$ есть *гомеоморфизм* **C*** на $\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{U}$ (гл. VI, § 2, предложение 3); с другой стороны, непосредственно ясно, что это есть изоморфизм структуры группы в **C*** на структуру группы в произведении $\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{U}$.

Как мы знаем, топологическая группа $\mathbf{R}_+^*$ изоморфна аддитивной группе **R** (гл. V, § 4, теорема 1); поэтому изучение топологической группы **C*** сводится к изучению группы **U**, которым мы займемся в § 2.

4. Тело кватернионов

В силу теоремы 1 поле **R** есть *максимальное* упорядоченное поле (Алг., гл. VI, § 2, n° 5); поэтому единственным (с точностью до изоморфизма) *некоммутативным* телом *конечного* ранга над **R** является тело кватернионов над **R** (Алг., гл. VIII, § 11, теорема 2):

оно будет обозначаться $\mathbf{H}$ и называться *телом вещественных кватернионов* (или просто *телом кватернионов*, когда не будет опасности недоразумений).

Так как $\mathbf{H}$ — ранга 4 над полем $\mathbf{R}$, то в $\mathbf{H}$ можно определить топологию, гомеоморфную топологии пространства $\mathbf{R}^4$ (гл. VI, § 1, n° 5). Точнее говоря, мы будем обычно *отождествлять* $\mathbf{H}$ и $\mathbf{R}^4$, отождествляя элементы 1, i, j, k канонического базиса тела $\mathbf{H}$ (Алг., гл. III, 3-е изд., § 1) соответственно с векторами e_0, e_1, e_2, e_3 канонического базиса пространства $\mathbf{R}^4$.

Напомним, что таблица умножения канонического базиса тела $\mathbf{H}$ задается формулами

$$i^2=j^2=k^2=-1, \quad ij=-ji=k, \quad jk=-kj=i, \quad ki=-ik=j.$$

Топология в $\mathbf{H}$ согласуется не только со структурой кольца в $\mathbf{H}$ (гл. VI, § 1, n° 5), но также со структурой *тела* в $\mathbf{H}$, ибо если x — кватернион $\neq 0$, то координаты кватерниона x^{-1} являются рациональными функциями координат кватерниона x, имеющими знаменатель, отличный от нуля. Тело $\mathbf{H}$, наделенное этой топологией, является, таким образом, *некоммутативным топологическим телом*; кватернионы $a+bi$ (где a и b — вещественные числа) образуют (топологическое) *подтело* тела $\mathbf{H}$, изоморфное полю $\mathbf{C}$, с которым оно обычно отождествляется.

Итак, наряду с $\mathbf{R}$ и $\mathbf{C}$ мы получили еще третий пример *связного локально компактного* топологического тела; можно показать, что это—*единственные* топологические тела, обладающие указанными двумя свойствами (Коммутат. алг., VI, § 9, следствие теоремы 1).

Напомним (Алг., гл. VIII, § 12, n° 3), что алгебраическая норма кватерниона $x=x_0+x_1i+x_2j+x_3k$ есть число $N(x)= x_0^2+x_1^2+x_2^2+x_3^2=\|x\|^2$ (т. е. квадрат его *евклидовой нормы*). Так как $N(xy)=N(x)\,N(y)$, то видим, что множество всех кватернионов с нормой 1, совпадающее со сферой $\mathbf{S}_3$, образует компактную подгруппу мультипликативной группы $\mathbf{H}^*$ кватернионов $\neq 0$.

Предложение 2. *Мультипликативная группа $\mathbf{H}^*$ кватернионов $\neq 0$ есть топологическая группа, изоморфная произведению ее подгрупп $\mathbf{R}_+^*$ и $\mathbf{S}_3$.*

В самом деле, всякий кватернион $x \neq 0$ может быть записан в виде $x = \|x\| z$, где z — кватернион с нормой 1; так как $\|xx'\| = \|x\| \|x'\|$, то отображение $x \mapsto \left(\|x\|, \frac{x}{\|x\|}\right)$ группы $\mathbf{H}^*$ на $\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{S}_3$ есть изоморфизм структуры группы в $\mathbf{H}^*$ на структуру группы в $\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{S}_3$; с другой стороны, как мы знаем (гл. VI, § 2, предложение 3), это есть гомеоморфизм $\mathbf{H}^*$ на $\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{S}_3$.

Замечания. 1) С помощью соотношений $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ и $\|xy\| = \|x\| \|y\|$ можно доказать непосредственно, как выше для поля комплексных чисел (n° 2), что топология пространства $\mathbf{R}^4$ согласуется со структурой тела в $\mathbf{H}$ (см. гл. IX, § 3, n° 2)

2) Согласно предыдущему, в сферах $\mathbf{S}_1$ и $\mathbf{S}_3$ существует структура группы, согласующаяся с их топологией. Мы увидим позже, что ни при каком целом n, отличном от 1 и 3, в $\mathbf{S}_n$ не существует *никакой* структуры группы, согласующейся с топологией в $\mathbf{S}_n$.

3) Всякая точка группы $\mathbf{S}_3$ обладает окрестностью, гомеоморфной $\mathbf{R}^3$ (гл. VI, § 2, предложение 5), но $\mathbf{S}_3$ не локально изоморфна группе $\mathbf{R}^3$, ибо иначе, будучи связной, она была бы коммутативна (гл. VII, § 2, теорема 1), что не имеет места, поскольку i и j принадлежат $\mathbf{S}_3$, но $ij \neq ji$ (см. гл. V, § 3).

Упражнения

1) Пусть $f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n$ — полином степени n с комплексными коэффициентами; положим $f(z) = \prod_{i=1}^{n} (z - z_i)$, и пусть $r_0 = \sup_i |z_i|$.

а) Показать, что если вещественное число $r > 0$ таково, что

$$r^n \geqslant |a_1| r^{n-1} + |a_2| r^{n-2} + \ldots + |a_{n-1}| r + |a_n|,$$

то $r_0 \leqslant r$; вывести отсюда, что $r_0 \leqslant \sup\left(1, \sum_{k=1}^{n} |a_k|\right)$.

б) Показать, что если $(\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ — конечная последовательность n чисел > 0 таких, что $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda_i} = 1$, то $r_0 \leqslant \sup_k (\lambda_k |a_k|)^{\frac{1}{k}}$. [Использовать а).]

в) Вывести из а), что если все $a_i \neq 0$, то

$$r_0 \leqslant \sup\left(2|a_1|, 2\left|\frac{a_2}{a_1}\right|, \ldots, 2\left|\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\right|, \left|\frac{a_n}{a_{n-1}}\right|\right).$$

г) Вывести из а), что

$$r_0 \leqslant |a_1 - 1| + |a_2 - a_1| + \ldots + |a_{n-1} - a_n| + |a_n|.$$

[Рассмотреть полином $(z-1)f(z)$.] Заключить отсюда, что если все a_i вещественные >0, то

$$r_0 \leqslant \sup\left(a_1, \frac{a_2}{a_1}, \ldots, \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}, \frac{a_n}{a_{n-1}}\right).$$

2) *Алгебраическими числами* называют комплексные числа, алгебраические над полем $\mathbf{Q}$ рациональных чисел. Показать, что упорядоченное поле B вещественных алгебраических чисел есть максимальное упорядоченное поле, которое не полно в топологии, индуцируемой из $\mathbf{R}$ (и совпадающей с $\mathcal{T}_0(B)$; см. упражнение 2б § 3 главы IV).

*3) а) Пусть K — максимальное упорядоченное поле (Алг., гл. VI, § 2, n° 5), наделенное топологией $\mathcal{T}_0(K)$, согласующейся с его структурой тела (гл. IV, § 3, упражнение 2). Пусть

$$f(X)=a_0X^n+a_1X^{n-1}+\ldots+a_n$$

— полином из $K[X]$, обладающий *простым* корнем α в K. Показать, что для всякого элемента $\varepsilon>0$ из K существует такое $\eta>0$ в K, что каждый полином $g(X)=b_0X^n+b_1X^{n-1}+\ \ldots\ +b_n$, у которого $|a_i-b_i|\leqslant\eta$ при любом i, обладает, и притом единственным, корнем $\beta\in K$ таким, что $|\beta-\alpha|\leqslant\varepsilon$. [Разложить f и g по степеням $X-\alpha$ и использовать упражнение 13 § 2 главы VI Алгебры.] Дать оценку сверху для η в функции от a_i, α и ε.

б) Вывести из а), что если K — максимальное упорядоченное поле, то его *пополнение* $\hat{K}$ в топологии $\mathcal{T}_0(K)$, являющееся полем, естественно наделенным структурой порядка (гл. IV, § 4, упражнение 2), есть максимальное упорядоченное поле.

в) Пусть K_0 — упорядоченное поле и $S=K_0((X))$ — поле формальных рядов от одной переменной над K_0; упорядочим (совершенно) S, приняв в нем за элементы $\geqslant 0$ элемент 0 и формальные ряды с коэффициентами >0 при члене наименьшей степени. Показать, что S, наделенное топологией $\mathcal{T}_0(S)$, *полно*, но не есть максимальное упорядоченное поле. [Доказать, что полиномы Y^p-X из $S[Y]$ неприводимы для каждого целого $p>1$ (Алг., гл. V, § 11, упражнение 12).]

г) Возьмем в примере пункта в) $K_0=\mathbf{R}$. Пусть K — максимальное упорядоченное алгебраическое расширение поля S; показать, что K не полно в топологии $\mathcal{T}_0(K)$. [Погрузить S в поле E формальных рядов с вполне упорядоченными показателями (Алг., гл. IV, § 5, упражнение 11б), упорядоченное тем же способом, что и S, а K — в максимальное упорядоченное расширение Ω поля E. Заметить, что E полно, и дать пример последовательности Коши, образованной элементами из K и сходящейся к некоторому элементу $f\in E$, не алгебраическому над S; выбрать f так, чтобы существовало бесконечно много S-изоморфизмов поля E в алгебраическое замыкание поля Ω, при которых образы элемента f были бы все различны.]

4) Показать, что всякое (необходимо инъективное) непрерывное представление f топологического поля $\mathbf{C}$ на некоторое его подполе есть либо тождественный автоморфизм поля $\mathbf{C}$, либо автоморфизм $z \longmapsto \bar{z}$. [Заметить, что необходимо $f(x) = x$ для всех $x \in \mathbf{Q}$, и вывести отсюда, что $f(x) = x$ для каждого $x \in \mathbf{R}$.] Показать, что существует бесконечно много разрывных изоморфизмов поля $\mathbf{C}$ на его подполя, отличные от $\mathbf{C}$ [см. Алг., гл. V, § 6, упражнение 1 и Коммутат. алг., гл. VI, § 9, упражнение 2].

*5) а) Пусть K — *некоммутативное* подтело тела кватернионов $\mathbf{H}$; показать, что центр Z тела K есть подполе центра $\mathbf{R}$ тела $\mathbf{H}$. [Заметить, что всякий элемент из K перестановочен со всяким элементом поля L, порождаемого множеством $Z \cup \mathbf{R}$; если бы $Z \not\subset \mathbf{R}$, то L было бы максимальным коммутативным подтелом тела $\mathbf{H}$ и K содержалось бы в L, в противоречие с предположением.]

б) Вывести отсюда, что всякий (не обязательно непрерывный) изоморфизм f тела $\mathbf{H}$ на его подтело есть внутренний автоморфизм $x \longmapsto axa^{-1}$ тела $\mathbf{H}$. [Сужение f на $\mathbf{R}$ есть в силу а) изоморфизм поля $\mathbf{R}$ на его подполе; использовать упражнение 3 § 3 главы IV Общей топологии и следствие теоремы 1 § 10 главы VIII Алгебры.]

§ 2. Измерение углов; тригонометрические функции

1. *Мультипликативная группа* U

Теорема 1. *Топологическая* (*мультипликативная*) *группа* $\mathbf{U}$ *комплексных чисел с абсолютным значением* 1 *изоморфна топологической* (*аддитивной*) *группе* $\mathbf{T}$ *вещественных чисел, приведенных по модулю* 1.

В самом деле, группа $\mathbf{U} = \mathbf{S}_1$ *компактна*, *связна* и обладает окрестностью нейтрального элемента $+1$, гомеоморфной открытому интервалу числовой прямой $\mathbf{R}$ (гл. VI, § 2, предложение 5); теорема является поэтому следствием топологической характеризации группы $\mathbf{T}$, данной в § 3 главы V (теорема 2).

Следствие. *Мультипликативная группа* $\mathbf{C}^*$ *комплексных чисел* $\neq 0$ *изоморфна группе* $\mathbf{R} \times \mathbf{T}$ (см. предложение 1 § 1).

Замечание. Изоморфизм групп $\mathbf{C}^*$ и $\mathbf{R} \times \mathbf{T}$ влечет существование в поле $\mathbf{C}$ корней всякого «двучленного уравнения» $z^n = a$; опираясь на это свойство (и на локальную компактность поля $\mathbf{C}$), можно получить новое доказательство теоремы Даламбера — Гаусса (упражнение 2).

Существуют только *два* различных изоморфизма группы $\mathbf{T}$ на группу $\mathbf{U}$; в самом деле, если g и g' — изоморфизмы $\mathbf{T}$ на $\mathbf{U}$ и h' — изоморфизм, обратный к g', то $h' \circ g$ есть автоморфизм группы $\mathbf{T}$, и, следовательно (гл. VII, § 2, предложение 6), имеет место тождество $g'(x) = g(x)$ или $g'(x) = g(-x)$. Можно всегда предполагать, что изоморфизм g выбран так, что i является образом класса (mod 1) точки $\frac{1}{4}$ при отображении g; тогда, обозначив через φ канонический гомоморфизм $\mathbf{R}$ на $\mathbf{T}$, заключаем, что всякий строгий морфизм аддитивной группы $\mathbf{R}$ на мультипликативную группу $\mathbf{U}$ имеет вид $x \mapsto g\left(\varphi\left(\frac{x}{a}\right)\right)$, где a — вещественное число $\neq 0$ (гл. VII, § 2, предложение 4); отметим, что $\left]-\frac{|a|}{2}, \frac{|a|}{2}\right[$ есть наибольший симметричный открытый интервал в $\mathbf{R}$, взаимно однозначно отображаемый этим строгим морфизмом на свой образ, и что $g\left(\varphi\left(\frac{1}{4}\right)\right) = i$. Мы будем обозначать гомоморфизм $x \mapsto g(\varphi(x))$ через $x \mapsto \boldsymbol{e}(x)$; таким образом, всякий строгий морфизм $\mathbf{R}$ на $\mathbf{U}$ имеет вид $x \mapsto \boldsymbol{e}\left(\frac{x}{a}\right)$, где $a \neq 0$. $\boldsymbol{e}(x)$ есть непрерывная функция на $\mathbf{R}$, принимающая комплексные значения, удовлетворяющие тождествам

$$|\boldsymbol{e}(x)| = 1, \tag{1}$$

$$\boldsymbol{e}(x+y) = \boldsymbol{e}(x)\,\boldsymbol{e}(y), \tag{2}$$

а также соотношениям

$$\boldsymbol{e}(0) = 1, \quad \boldsymbol{e}\left(\frac{1}{4}\right) = i, \quad \boldsymbol{e}\left(\frac{1}{2}\right) = -1, \quad \boldsymbol{e}\left(\frac{3}{4}\right) = -i, \quad \boldsymbol{e}(1) = 1. \tag{3}$$

Из (1) и (2) вытекают тождества

$$\boldsymbol{e}(-x) = \frac{1}{\boldsymbol{e}(x)} = \overline{\boldsymbol{e}(x)}, \tag{4}$$

а из (2) и (3) — тождества

$$\boldsymbol{e}\left(x+\frac{1}{4}\right) = i\boldsymbol{e}(x), \qquad \boldsymbol{e}\left(x+\frac{1}{2}\right) = -\boldsymbol{e}(x),$$

$$\boldsymbol{e}\left(x+\frac{3}{4}\right) = -i\boldsymbol{e}(x), \qquad \boldsymbol{e}(x+1) = \boldsymbol{e}(x).$$

Функция $\boldsymbol{e}(x)$ *периодическая* с главным периодом 1.

Замечание. Отображение $x + iy \mapsto e^x e(y)$ есть строгий морфизм аддитивной группы **C** на мультипликативную группу $\mathbf{C}^*$, а его сужение на надлежащую окрестность нуля — локальный изоморфизм **C** в $\mathbf{C}^*$. Следовательно (гл. VII, § 2, n° 3), всякий строгий морфизм **C** на $\mathbf{C}^*$ имеет вид $x + iy \mapsto e^{\alpha x + \beta y} e(\gamma x + \delta y)$, где α, β, γ, δ — произвольные вещественные числа, для которых $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$. Мы увидим позже (Функц. действ. пер., гл. III, § 1, n° 5), что существует только один из этих гомоморфизмов, — обозначаемый $z \mapsto e^z$, — такой, что $\lim\limits_{z \to 0} \frac{e^z - 1}{z} = 1$; сужение этого гомоморфизма на вещественную ось совпадает с e^x (чем и объясняется обозначение).

2. Углы между полупрямыми

Пользуясь *упорядоченностью* поля **R**, *ориентируем* числовую плоскость $\mathbf{R}^2$, приняв $e_1 \wedge e_2$ (где e_1, e_2 — векторы канонического базиса) за положительный бивектор; на ориентированной числовой плоскости $\mathbf{R}^2$ (отождествляемой в дальнейшем с **C**) можно тогда определить *угол* $(\widehat{\Delta_1, \Delta_2})$, образуемый произвольной парой (Δ_1, Δ_2) полупрямых *). Множество $\mathfrak{A}$ всевозможных углов между полупрямыми наделено структурой коммутативной группы (с аддитивно записываемой операцией), определяемой отношением

$$(\widehat{\Delta_1, \Delta_3}) = (\widehat{\Delta_1, \Delta_2}) + (\widehat{\Delta_2, \Delta_3}),$$

откуда, в частности, $(\widehat{\Delta_1, \Delta_1}) = 0$, $(\widehat{\Delta_2, \Delta_1}) = -(\widehat{\Delta_1, \Delta_2})$.

Развернутый угол $\tilde{\omega}$ есть ненулевое решение уравнения $2\theta = 0$ в $\mathfrak{A}$; это — угол, образуемый отрицательной вещественной полуосью с положительной вещественной полуосью.

Пусть z — произвольное комплексное число $\neq 0$; его *амплитудой*, обозначаемой $\operatorname{Am}(z)$, называют угол, образуемый с положительной вещественной осью полупрямою с началом 0, проходящей через z. Отображение $z \mapsto \operatorname{Am}(z)$ есть *представление*

---

*) Напомним (Алг., гл. IX, § 10, n° 3), что в множестве всех пар (Δ_1, Δ_2) полупрямых с началом 0 можно определить *отношение эквивалентности*, считая пары (Δ_1, Δ_2) и (Δ_1', Δ_2') эквивалентными, если существует *вращение*, переводящее одновременно Δ_1 в Δ_1' и Δ_2 в Δ_2'; *углом* пары (Δ_1, Δ_2) (или *углом, образуемым* Δ_2 *с* Δ_1) называется, по определению, класс эквивалентности этой пары.

мультипликативной группы $\mathbf{C}^*$ на аддитивную группу $\mathfrak{A}$; таким образом,

$$\mathrm{Am}(zz') = \mathrm{Am}(z) + \mathrm{Am}(z') \text{ и } \mathrm{Am}(\bar{z}) = \mathrm{Am}(z^{-1}) = -\mathrm{Am}(z).$$

Угол $\delta = \mathrm{Am}(i)$ называется *положительным прямым углом*; это — одно из решений уравнения $2\theta = \tilde{\omega}$ в группе $\mathfrak{A}$; другим служит $-\delta = \delta + \tilde{\omega}$.

Сужение представления $z \mapsto \mathrm{Am}(z)$ на подгруппу $\mathbf{U}$ группы $\mathbf{C}^*$ есть изоморфизм структуры группы в $\mathbf{U}$ *на* структуру группы в $\mathfrak{A}$ *); если посредством этого изоморфизма *перенести* в $\mathfrak{A}$ топологию из $\mathbf{U}$, то $\mathfrak{A}$ станет компактной топологической группой, а представление $z \mapsto \mathrm{Am}(z)$ будет *строгим морфизмом* топологической группы $\mathbf{C}^*$ на топологическую группу $\mathfrak{A}$.

Обозначим через $\theta \mapsto f(\theta)$ изоморфизм $\mathfrak{A}$ на $\mathbf{U}$, обратный к изоморфизму $z \mapsto \mathrm{Am}(z)$ группы $\mathbf{U}$ на $\mathfrak{A}$. По определению (Алг., гл. IX, § 10, n° 3) $\mathfrak{R}(f(\theta))$ обозначают $\cos\theta$ и называют *косинусом* угла θ, а $\mathfrak{J}(f(\theta))$ обозначают $\sin\theta$ и называют *синусом* угла θ. Эти функции *непрерывны* на топологической группе $\mathfrak{A}$ и удовлетворяют следующим соотношениям (там же), непосредственно вытекающим из предыдущих определений:

$$\cos 0 = 1,\ \sin 0 = 0,\ \cos\tilde{\omega} = -1,\ \sin\tilde{\omega} = 0,$$
$$\cos(-\theta) = \cos\theta,\quad \sin(-\theta) = -\sin\theta,$$
$$\cos(\theta+\theta') = \cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta',$$
$$\sin(\theta+\theta') = \sin\theta\cos\theta' + \sin\theta'\cos\theta,$$
$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1.$$

По определению *тангенс* угла $\theta \in \mathfrak{A}$ существует, когда $\cos\theta \neq 0$, и равен $\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ (там же); это — непрерывная функция, которая продолжается по непрерывности на $\tilde{\mathbf{R}}$ (гл. VI, § 3, n° 4), принимая для углов δ и $-\delta$ значение ∞; имеем $\mathrm{tg}(\theta + \tilde{\omega}) = \mathrm{tg}\,\theta$. *Котангенсом* угла θ называют элемент $\mathrm{ctg}\,\theta$ из $\tilde{\mathbf{R}}$, равный $\dfrac{1}{\mathrm{tg}\,\theta}$.

Заметим, что если $\mathrm{Am}(z) = \theta$, то $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$; это выражение называют *тригонометрической формой* комплексного числа.

*) Это обусловлено тем, что всякая полупрямая, выходящая из 0, пересекает окружность $\mathbf{S}_1$, поскольку поле $\mathbf{R}$ *пифагорово* (Алг., гл. VI, § 2, упражнение 8).

3. Измерение углов между полупрямыми

В силу теоремы 1 топологическая группа $\mathfrak{A}$ углов между полупрямыми *изоморфна* $\mathbf{T}$. Всякий строгий морфизм $\mathbf{R}$ на $\mathfrak{A}$ получается посредством композиции изоморфизма $z \mapsto \mathrm{Am}(z)$ группы $\mathbf{U}$ на $\mathfrak{A}$ и строгого морфизма $\mathbf{R}$ на $\mathbf{U}$; таким образом, если положить $\vartheta(x) = \mathrm{Am}(\boldsymbol{e}(x))$, всякий строгий морфизм $\mathbf{R}$ на $\mathfrak{A}$ имеет вид $x \mapsto \vartheta\left(\frac{x}{a}\right)$ $(a \neq 0)$. Пусть a — раз навсегда зафиксированное число >0; гомоморфизм $x \mapsto \vartheta\left(\frac{x}{a}\right)$ относит всякому углу θ *класс* вещественных чисел, сравнимых по модулю a (элемент факторгруппы $\mathbf{R}/a\mathbf{Z}$); он называется *мерой* угла θ относительно *основания* a; допуская вольность речи, всякое вещественное число из этого класса также называют *мерой* угла θ; угол $\vartheta\left(\frac{x}{a}\right)$ есть *угол меры* x (относительно основания a). Если x есть мера угла θ, а x' — мера угла θ' (относительно одного и того же основания), то $x + x'$ является мерой угла $\theta + \theta'$, а $-x$ мерой угла $-\theta$. Иногда *главной мерой* угла (относительно основания a) называют ту из его мер, которая принадлежит интервалу $[0, a[$.

Выбор основания a. Мы будем всегда ограничиваться рассмотрением оснований $a > 1$. Каждому $a > 1$ отвечает угол между полупрямыми $\omega = \vartheta\left(\frac{1}{a}\right)$, имеющий главную меру 1 и называемый *единичным углом* относительно основания a; обратно, для любого угла $\omega \neq 0$ существует, и притом единственное, $a > 1$ такое, что $\vartheta\left(\frac{1}{a}\right) = \omega$; таким образом, задание единичного угла ω вполне определяет основание $a > 1$.

Для числовых расчетов обычно берут $a = 360$ или $a = 400$; соответствующий единичный угол называется *градусом* (для $a = 360$) или *десятичным градусом* (для $a = 400$).

В анализе и во всех разделах математики, где не имеются в виду числовые расчеты, пользуются основанием a, определяемым условием

$$\lim_{x \to 0} \frac{\boldsymbol{e}(x/a) - 1}{x} = i$$

и обозначаемым 2π (мы докажем в дальнейшем (Функц. действ. пер., гл. III, § 1, n° 3) существование такого числа и укажем способ вычисления его приближенных значений); соответствующий единичный угол называют *радианом*. По приведенному выше определению e^z для комплексных z имеем $\boldsymbol{e}(x) = e^{2\pi i x}$ для каждого $x \in \mathbf{R}$.

Раз основание a выбрано, под *углом* между полупрямыми чаще всего подразумевают *меру* этого угла относительно основания a; эта вольность речи не создает неудобств, если (как всегда, когда не имеют дела с числовыми расчетами) основание a остается все время фиксированным и если помнить, что два вещественных числа, сравнимых по модулю a, соответствуют *одному и тому же* углу между полупрямыми.

Например, то, что чаще всего понимают под *амплитудой* комплексного числа $z \neq 0$, будет *радианной мерой* этого угла, определяемого условиями, зависящими от изучаемого вопроса; после того, как эти условия поставлены, через $\mathrm{Am}(z)$ обозначают и меру выбранной таким образом амплитуды.

4. *Тригонометрические функции*

Если образовать композицию функций $\cos\theta$, $\sin\theta$, $\operatorname{tg}\theta$, $\operatorname{ctg}\theta$ (определенных на $\mathfrak{A}$) и гомоморфизма $x \mapsto \vartheta\left(\frac{x}{a}\right)$ группы $\mathbf{R}$ на $\mathfrak{A}$, то получатся функции $\cos\vartheta\left(\frac{x}{a}\right)$, $\sin\vartheta\left(\frac{x}{a}\right)$, $\operatorname{tg}\vartheta\left(\frac{x}{a}\right)$, $\operatorname{ctg}\vartheta\left(\frac{x}{a}\right)$, называемые соответственно *косинусом*, *синусом*, *тангенсом* и *котангенсом числа* x относительно основания a и обозначаемые $\cos_a x$, $\sin_a x$, $\operatorname{tg}_a x$, $\operatorname{ctg}_a x$. Отображение $x \mapsto \cos_a x + i\sin_a x$ есть композиция отображений $\theta \mapsto \cos\theta + i\sin\theta$ и $x \mapsto \vartheta\left(\frac{x}{a}\right)$, откуда в силу определения $\cos\theta$ и $\sin\theta$ (n° 2) следует тождество

$$e\left(\frac{x}{a}\right) = \cos_a x + i\sin_a x, \tag{5}$$

равносильное тождествам

$$\cos_a x = \Re\left(e\left(\frac{x}{a}\right)\right), \quad \sin_a x = \Im\left(e\left(\frac{x}{a}\right)\right),$$

а также, в силу (4), — тождествам

$$\cos_a x = \frac{1}{2}\left(e\left(\frac{x}{a}\right) + e\left(-\frac{x}{a}\right)\right),$$
$$\sin_a x = \frac{1}{2i}\left(e\left(\frac{x}{a}\right) - e\left(-\frac{x}{a}\right)\right).$$

Отсюда вытекают тождества

$$\cos_b x = \cos_a\left(\frac{ax}{b}\right), \quad \sin_b x = \sin_a\left(\frac{ax}{b}\right). \tag{6}$$

Единственными тригонометрическими функциями, встречающимися во всевозможных разделах математики, где не имеются в виду числовые расчеты, являются тригонометрические функции, отнесенные к основанию $a = 2\pi$, о котором говорилось выше; вместо $\cos_{2\pi} x$, $\sin_{2\pi} x$, $\operatorname{tg}_{2\pi} x$, $\operatorname{ctg}_{2\pi} x$ их обозначают просто $\cos x$, $\sin x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$. Для вычислительных целей существуют таблицы тригонометрических функций, соответствующие основаниям $a = 360$ и $a = 400$; впрочем, формулы (6) позволяют с помощью этих таблиц получить значения тригонометрических функций, отнесенных к любому другому основанию.

Приведенные выше соотношения между косинусом и синусом *углов* дают, очевидно, такие же соотношения между косинусом и синусом *чисел*, измеряющих эти углы; в частности, имеем

$$\cos_a (x+y) = \cos_a x \cos_a y - \sin_a x \sin_a y,$$
$$\sin_a (x+y) = \sin_a x \cos_a y + \sin_a y \cos_a x,$$
$$\cos_a (-x) = \cos_a x, \quad \sin_a (-x) = -\sin_a x,$$
$$\cos_a^2 x + \sin_a^2 x = 1.$$

Функции $\cos_a x$ и $\sin_a x$ непрерывны на $\mathbf{R}$ и периодичны с периодом a; при этом a является их *главным периодом*; в самом деле, если $\cos_a x = \cos_a y$, то $\sin_a x = \sin_a y$ или $\sin_a x = -\sin_a y$, т. е. $e\left(\frac{x}{a}\right) = e\left(\frac{y}{a}\right)$ или $e\left(\frac{x}{a}\right) = e\left(-\frac{y}{a}\right)$, откуда $x \equiv y \pmod a$ или $x \equiv -y \pmod a$; так же убеждаемся в том, что $\sin_a x = \sin_a y$ равносильно тому, что $x \equiv y \pmod a$ или $x + y \equiv \frac{1}{2} a \pmod a$.

Из предшествующего вытекает, что $\cos_a x$ не принимает дважды одного и того же значения в интервале $\left[0, \frac{1}{2} a\right]$; таким образом, рассматриваемое на этом интервале, это — *биективное* отображение его на интервал $[-1, +1]$. Так как $\cos_a 0 = 1$ и $\cos_a \left(\frac{1}{2} a\right) = -1$, то $x \mapsto \cos_a x$ есть *строго убывающее* отображение интервала $\left[0, \frac{1}{2} a\right]$ *на* интервал $[-1, +1]$ (гл. IV, § 2, теорема 5 и замечание). Имеем $\cos_a x = 0$ при $x = \frac{a}{4}$, $\cos_a x > 0$, если $0 \leqslant x < \frac{a}{4}$, $\cos_a x < 0$, если $\frac{a}{4} < x \leqslant \frac{a}{2}$. Приняв во внимание, что $\cos_a (-x) = \cos_a x$, получаем отсюда изменение

$\cos_a x$ на интервале $\left[-\frac{1}{2}a, 0\right]$, а в силу периодичности — и на всем $\mathbf{R}$ (рис. 9). Так как $\sin_a x = -\cos_a\left(x + \frac{a}{4}\right)$, то получаем отсюда и изменение $\sin_a x$ на $\mathbf{R}$ (рис. 9).

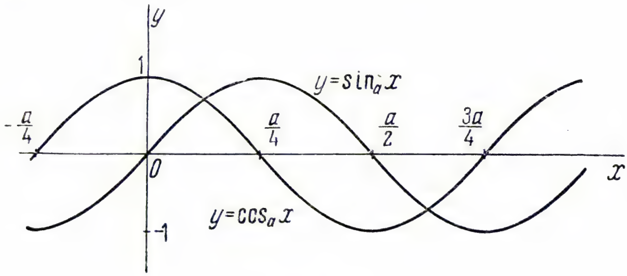

Рис. 9

Функция $\operatorname{tg}_a x$ есть непрерывное отображение $\mathbf{R}$ на $\widetilde{\mathbf{R}}$; она принимает значение ∞ для значений $x = \frac{a}{4} + k\frac{a}{2}$ (где k — произ-

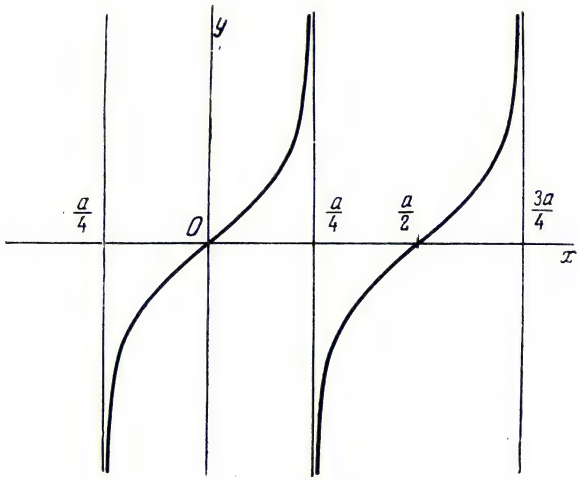

Рис. 10,

вольное целое число). Поскольку она обладает периодом $\frac{1}{2}a$, он является ее *главным периодом*. На интервале $\left[0, \frac{a}{4}\right]$

функция $\sin_a x$ возрастает от 0 до 1, а $\cos_a x$ убывает от 1 до 0; следовательно, $\operatorname{tg}_a x$ *строго возрастает* на $\left[0, \frac{a}{4}\right[$ и отображает $\left[0, \frac{a}{4}\right[$ *на* $[0, +\infty[$; отсюда заключаем, что $\operatorname{tg}_a x$ строго возрастает на $\left]-\frac{a}{4}, \frac{a}{4}\right[$ и является гомеоморфизмом этого интервала на $\mathbf{R}$ (рис. 10).

5. *Угловые секторы*

Пусть Δ_1, Δ_2 — две *различные* замкнутые полупрямые с началом 0 и x — главная мера угла $(\widehat{\Delta_1, \Delta_2})$ (относительно выбранного раз навсегда основания a). Объединение замкнутых (соотв. открытых) полупрямых Δ с началом 0, для которых главная мера y угла $(\widehat{\Delta_1, \Delta})$ удовлетворяет неравенствам $0 \leqslant y \leqslant x$ (соотв. $0 < y < x$), совпадает с определенным в Алгебре (Алг., гл. IX, § 10, n° 4) *замкнутым* (соотв. *открытым*) *угловым сектором* S, началом которого служит Δ_1, а концом Δ_2.

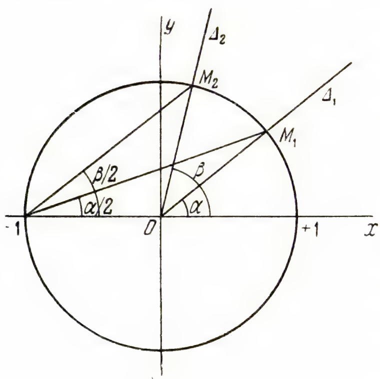

Рис. 11

В самом деле, посредством вращения всегда можно свести дело к случаю, когда S не содержит полупрямой, проходящей через точку -1. Если α и β — углы, которые образуют тогда соответственно Δ_1 и Δ_2 с положительной вещественной полуосью, то замкнутый угловой сектор S есть не что иное (Алг., гл. IX, § 10, предложение 12), как объединение замкнутых полупрямых Δ, образующих с положительной вещественной полуосью угол θ, для которого $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \leqslant \operatorname{tg}\frac{\theta}{2} \leqslant \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$. Но эти неравенства равносильны неравенствам $\operatorname{tg}_a \frac{u}{2} \leqslant \operatorname{tg}_a \frac{t}{2} \leqslant \operatorname{tg}_a \frac{v}{2}$, где u, v, t — соответственно меры углов α, β, θ, содержащиеся

в интервале $\left]-\frac{a}{2}, +\frac{a}{2}\right[$; а так как $\operatorname{tg}_a x$ — возрастающая функция в интервале $\left]-\frac{a}{4}, +\frac{a}{4}\right[$, то последние в свою очередь равносильны неравенствам $u \leqslant t \leqslant v$ или $0 \leqslant t-u \leqslant v-u$; и так как $x=v-u$, $y=t-u$, то предложение доказано для замкнутых угловых секторов. Так же проводится рассуждение и для открытых угловых секторов.

Замкнутый угловой сектор есть *замкнутое* множество в $\mathbf{R}^2$, а *открытый* угловой сектор с теми же началом и концом есть его *внутренность* в $\mathbf{R}^2$ (гл. VI, § 2, предложение 3). Угол $(\widehat{\Delta_1, \Delta_2})$ с главной мерой x называется *раствором* сектора S; S называется *выступающим*, если $x < \frac{1}{2} a$, *развернутым* (или *замкнутой полуплоскостью*), если $x = \frac{1}{2} a$, *входящим*, если $x > \frac{1}{2} a$; выступающий угловой сектор называется *острым*, если $x < \frac{a}{4}$, *прямым* (или *квадрантом*), если $x = \frac{a}{4}$, *тупым*, если $x > \frac{a}{4}$. *Биссектриса* сектора S есть не что иное, как полупрямая Δ, образующая с Δ_1 угол $y = \frac{1}{2} x$.

Отличные друг от друга замкнутые полупрямые Δ_1 и Δ_2 определяют два замкнутых угловых сектора: один с началом Δ_1 и концом Δ_2, другой с началом Δ_2 и концом Δ_1; их объединение есть числовая плоскость $\mathbf{R}^2$, их пересечение есть объединение полупрямых Δ_1 и Δ_2

6. *Углы между прямыми*

В Алгебре (Алг., гл. IX, § 10, n° 3) определяется также понятие *угла* между двумя *прямыми* в двумерном векторном пространстве над максимальным упорядоченным полем *); это определение применимо, в частности, к числовой плоскости $\mathbf{R}^2$. Множество

*) Напомним, что в множестве всех пар (D_1, D_2) неизотропных прямых определяют отношение эквивалентности, считая пары (D_1, D_2) и (D_1', D_2') эквивалентными, если существует *преобразование подобия первого рода*, переводящее одновременно D_1 в D_1' и D_2 в D_2'; *угол* между парой прямых (D_1, D_2) есть класс эквивалентности этой пары.

$\mathfrak{A}_0$ углов между прямыми наделено структурой коммутативной группы (с аддитивно записываемой операцией), определяемой отношением

$$(\widehat{D_1, D_3}) = (\widehat{D_1, D_2}) + (\widehat{D_2, D_3}),$$

откуда, в частности,

$$(\widehat{D_1, D_1}) = 0, \quad (\widehat{D_2, D_1}) = -(\widehat{D_1, D_2}).$$

Прямой угол δ_0 есть ненулевое решение уравнения $2\theta = 0$ в $\mathfrak{A}_0$; это — угол, образуемый мнимой осью с вещественной.

Относя углу, образуемому полупрямой Δ с положительной вещественной полуосью, угол, образуемый прямой D, содержащей Δ, с вещественной осью, получаем *каноническое представление* φ группы $\mathfrak{A}$ углов между полупрямыми на группу $\mathfrak{A}_0$ углов между прямыми (Алг., гл. IX, § 10, следствие предложения 3); угол θ_0 между прямыми есть образ при отображении φ двух углов θ и $\theta + \widetilde{\omega}$ между полупрямыми; другими словами, группа $\mathfrak{A}_0$ изоморфна факторгруппе группы $\mathfrak{A}$ по подгруппе $\{0, \widetilde{\omega}\}$. Если *перенести* на $\mathfrak{A}_0$ топологию факторгруппы $\mathfrak{A}/\{0, \widetilde{\omega}\}$ (посредством биективного представления, ассоциированного с φ), то $\mathfrak{A}_0$ станет компактной топологической группой, а φ — строгим морфизмом $\mathfrak{A}$ на $\mathfrak{A}_0$.

Составляя композицию гомоморфизма φ группы $\mathfrak{A}$ на $\mathfrak{A}_0$ и гомоморфизма $x \mapsto \vartheta\left(\frac{x}{a}\right)$ группы $\mathbf{R}$ на $\mathfrak{A}$, получаем гомоморфизм $x \mapsto \vartheta_0\left(\frac{x}{a}\right)$ группы $\mathbf{R}$ на $\mathfrak{A}_0$. Всякий угол $\theta_0 \in \mathfrak{A}_0$ соответствует при этом гомоморфизме *классу* сравнимых по модулю $\frac{1}{2}a$ вещественных чисел, называемому по-прежнему *мерой* угла θ_0 (относительно основания a); допуская вольность речи, также каждое число этого класса называют *мерой* угла θ_0, а то, которое принадлежит интервалу $\left[0, \frac{a}{2}\right[$,— *главным значением меры угла* θ_0; угол $\vartheta_0\left(\frac{x}{a}\right)$ есть *угол меры x между прямыми*. Каждая мера угла θ_0 есть вместе с тем мера одного из двух углов θ, $\theta + \widetilde{\omega}$ между полупрямыми, имеющих θ_0 своим образом при гомоморфизме φ.

И здесь, раз основание a выбрано, говоря *угол* между прямыми, чаще всего, допуская вольность речи, подразумевают меру этого угла относительно основания a.

Замечание. Относя каждому комплексному числу $z \neq 0$ угол, образованный прямой, проходящей через 0 и z, с вещественной осью, получаем представление группы $\mathbf{C}^*$ на $\mathfrak{A}_0$; очевидно, оно является композицией гомоморфизма φ и представления $z \longmapsto \mathrm{Am}'(z)$ группы $\mathbf{C}^*$ на $\mathfrak{A}$; таким образом, это есть *строгий морфизм* топологической группы $\mathbf{C}^*$ на топологическую группу $\mathfrak{A}_0$, а ассоциированное с ним биективное представление есть *изоморфизм* факторгруппы $\mathbf{C}^*/\mathbf{R}^*$ на $\mathfrak{A}_0$.

Как известно (Алг., гл. IX, § 10, n° 3), если D — прямая, образующая с вещественной осью угол θ_0, и (a, b) — пара ее направляющих параметров, то *тангенс* угла θ_0 (обозначаемый по-прежнему $\operatorname{tg}\theta_0$) есть элемент $\frac{b}{a}$ из $\widetilde{\mathbf{R}}$ ($= \infty$, если $a = 0$), называемый также *наклоном* прямой D. Пусть θ и $\theta + \widetilde{\omega}$ — два угла между полупрямыми, имеющие θ_0 своим образом при гомоморфизме φ; тогда $\operatorname{tg}\theta_0 = \operatorname{tg}\theta = \operatorname{tg}(\theta + \widetilde{\omega})$. Отображение $\theta_0 \longmapsto \operatorname{tg}\theta_0$ есть *гомеоморфизм* $\mathfrak{A}_0$ на $\widetilde{\mathbf{R}}$, ибо топологическое пространство $\mathbf{C}^*/\mathbf{R}^*$ есть не что иное, как *вещественная проективная прямая* $\mathbf{P}_1$, а мы знаем (гл. VI, § 3, n° 3), что отображение, сопоставляющее прямой (рассматриваемой как точка из $\mathbf{P}_1$) ее наклон, есть гомеоморфизм $\mathbf{P}_1$ на $\widetilde{\mathbf{R}}$. Если теперь посредством отображения $\theta_0 \longmapsto \operatorname{tg}\theta_0$ перенести на $\widetilde{\mathbf{R}}$ структуру группы из $\mathfrak{A}_0$, то в $\widetilde{\mathbf{R}}$ будет определена структура *коммутативной топологической группы*, в которой композицией элементов t_1, t_2, принадлежащих $\mathbf{R}$ и таких, что $t_1 t_2 \neq 1$, служит $\frac{1 - t_1 t_2}{t_1 + t_2}$, а для пар (t_1, t_2), не удовлетворяющих этим условиям, композиция t_1 и t_2 получается путем продолжения по непрерывности функции $\frac{x+y}{1-xy}$ на $\widetilde{\mathbf{R}} \times \widetilde{\mathbf{R}}$ и записывается по-прежнему в виде $\frac{t_1 + t_2}{1 - t_1 t_2}$.

Упражнения

1) Пусть a — комплексное число $\neq 0$, n — целое > 0; показать, что для всякого числа $r > 0$ такого, что $r^n \leqslant |a|$, существует такое $z \in \mathbf{C}$, что $|z| = r$ и $|a + z^n| = |a| - r^n$. Вывести отсюда, что если f — полином степени > 0 с комплексными коэффициентами, то неравенство $|f(z_0)| \leqslant |f(z)|$ может иметь место для всех z из некоторой окрестности точки z_0, только когда $f(z_0) = 0$.

2) Показать, что для всякого полинома f с комплексными коэффициентами, не равного тождественно нулю, существует такое число

$r > 0$, что если $|z| \geqslant r$, то $|f(z)| > |f(0)|$. Получить отсюда с помощью упражнения 1 и теоремы Вейерштрасса (гл. IV, § 6, теорема 1) новое доказательство алгебраической замкнутости поля $\mathbf{C}$. [Рассмотреть функцию f на компактном множестве точек z, для которых $|z| \leqslant r$.]

3) Показать (не применяя теорему 1), что отображение $z \mapsto z/\bar{z}$ есть строгий морфизм топологической группы $\mathbf{C}^*$ на топологическую группу $\mathbf{U}$. Вывести отсюда, что отображение $t \mapsto \frac{1+it}{1-it}$ (где $\frac{1+it}{1-it} = -1$, если $t = \infty$) есть изоморфизм топологической группы $\widetilde{\mathbf{R}}$ (n° 6) на топологическую группу $\mathbf{U}$; получить отсюда другое доказательство теоремы 1.

*4) Пусть K — наименьшее пифагорово подполе (Алг., гл. VI, § 2, упражнение 8) поля $\mathbf{R}$, K' — поле, получаемое присоединением i к K, и G — мультипликативная группа всех элементов из K' с абсолютным значением 1 (подгруппа группы $\mathbf{U}$). Показать, что G не изоморфна аддитивной группе чисел из K, приведенных по модулю 1. [Заметить, что в этой последней группе существуют элементы любого простого порядка p; с другой стороны, беря p так, чтобы $p-1$ не было степенью двойки, показать, что G не может содержать корня p-й степени из 1, отличного от 1, поскольку степень любого элемента из K' относительно $\mathbf{Q}$ равна степени двойки.]

§ 3. Бесконечные суммы и произведения комплексных чисел

1. Бесконечные суммы комплексных чисел

Так как аддитивная группа поля $\mathbf{C}$ совпадает с аддитивной группой $\mathbf{R}^2$, то нет надобности возвращаться к изучению суммируемых семейств и рядов в $\mathbf{C}$, содержащемуся в общей теории, изложенной в § 3 главы VII; мы предоставляем читателю перевод результатов этой теории на язык теории комплексных чисел. Отметим только следующее предложение, являющееся следствием предложения 3 § 3 главы VII:

Предложение 1. *Если $(u_\lambda)_{\lambda \in L}$ и $(v_\mu)_{\mu \in M}$ — суммируемые семейства комплексных чисел, то семейство $(u_\lambda v_\mu)_{(\lambda,\, \mu) \in L \times M}$ суммируемо и*

$$\sum_{(\lambda,\, \mu) \in L \times M} u_\lambda v_\mu = \Big(\sum_{\lambda \in L} u_\lambda\Big) \Big(\sum_{\mu \in M} v_\mu\Big). \qquad (1)$$

Предоставляем читателю сформулировать аналогичное предложение для кватернионов.

2. *Перемножаемые семейства в* $\mathbf{C}^*$

В мультипликативной группе $\mathbf{C}^*$ комплексных чисел $\neq 0$ семейство $(z_\iota)_{\iota \in I}$ может быть перемножаемым только в том случае, когда $\lim z_\iota = 1$, где предел берется по фильтру дополнений к конечным подмножествам множества I (гл. III, § 5, предложение 1); при этом, поскольку всякая точка из $\mathbf{C}^*$ имеет счетную фундаментальную систему окрестностей, для перемножаемого семейства (z_ι) множество значений ι таких, что $z_\iota \neq 1$, не более чем счетно (гл. III, § 5, следствие предложения 1).

Предложение 2. *Для того чтобы семейство* (z_ι) *комплексных чисел* $z_\iota = r_\iota(\cos\theta_\iota + i \sin\theta_\iota)$ *было перемножаемым в* $\mathbf{C}^*$, *необходимо и достаточно, чтобы семейство* (r_ι) *их абсолютных значений было перемножаемо в* $\mathbf{R}_+^*$, *а семейство* (θ_ι) *амплитуд суммируемо в группе углов* $\mathfrak{A}$.

Вследствие строения группы $\mathbf{C}^*$ (§ 1, предложение 1) это предложение есть непосредственное следствие предложения 4 § 5 главы III.

Отображение, сопоставляющее каждому углу θ ту из его мер (относительно произвольного основания a), которая содержится в интервале $\left]-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right]$, есть *локальный изоморфизм* $\mathfrak{A}$ в $\mathbf{R}$ (§ 2, n° 2); так как $\lim \theta_\iota = 0$ по фильтру дополнений к конечным подмножествам множества I, то в формулировке предложения 2 условие суммируемости семейства (θ_ι) в $\mathfrak{A}$ можно заменить условием *суммируемости в* $\mathbf{R}$ семейства (t_ι) *мер* углов θ_ι, принадлежащих интервалу $\left]-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right]$.

Следующая теорема дает другой критерий перемножаемости в $\mathbf{C}^*$ семейства комплексных чисел, записанного в виде $(1 + u_\iota)$ (обобщающий теорему 4 § 7 главы IV; см. главу IX, Приложение, предложение 1):

Теорема 1. *Для того чтобы семейство* $(1 + u_\iota)_{\iota \in I}$ *было перемножаемым в* $\mathbf{C}^*$, *необходимо и достаточно, чтобы семейство* $(|u_\iota|)$ *было суммируемо в* $\mathbf{R}$.

Для каждого конечного подмножества J множества I положим

$$p_J = \prod_{\iota \in J} (1 + a_\iota), \quad s_J = \sum_{\iota \in J} a_\iota, \quad \sigma_J = \sum_{\iota \in J} |a_\iota|.$$

Лемма 1. *Пусть* $\varphi(J)=\sup\limits_{L\subset J}|p_L-1|$ *для каждого конечного* $J\subset I$. *Тогда для каждого* $L\subset J$ *имеем*

$$|p_L-1-s_L|\leqslant\varphi(J)\,\sigma_L. \tag{2}$$

Лемма очевидна, когда L пусто; проведем доказательство индукцией по $\operatorname{Card}(L)$. Пусть $L=K\cup\{\lambda\}$, где $\lambda\not\subset K$; тогда $p_L=p_K(1+a_\lambda)$ и $s_L=s_K+a_\lambda$, откуда $p_L-1-s_L=(p_K-1-s_K)+(p_K-1)a_\lambda$ и, в силу предположения индукции и определения $\varphi(J)$, $|p_L-1-s_L|\leqslant\varphi(J)\sigma_K+\varphi(J)|a_\lambda|=\varphi(J)\sigma_L$, и доказана.

Лемма 2. *Если* $\varphi(J)<\frac{1}{4}$ *для конечного* $J\subset I$, *то*

$$|\sigma_J|\leqslant\frac{4\varphi(J)}{1-4\varphi(J)}.$$

Так как $\sigma_L\leqslant\sigma_J$ для всех $L\subset J$, то согласно (2) $|s_L|\leqslant\varphi(J)\sigma_J+|p_L-1|\leqslant(1+\sigma_J)\varphi(J)$; но в силу предложения 2 § 3 главы VII $|\sigma_J|\leqslant 4\sup\limits_{L\subset J}|s_L|$, поэтому $\sigma_J\leqslant 4\varphi(J)(1+\sigma_J)$, и лемма доказана.

Теперь докажем сначала *достаточность* условия теоремы 1. Оно влечет *перемножаемость* семейства $(1+|u_\iota|)$ в $\mathbf{R}_+^*$ (гл. IV, § 7, теорема 4); таким образом, для каждого $\varepsilon>0$ существует конечное множество $J_0\subset I$ такое, что $\prod\limits_{\iota\in L}(1+|u_\iota|)-1\leqslant\varepsilon$, каково бы ни было конечное $L\subset I$, не пересекающееся с J_0. Но $\prod\limits_{\iota\in L}(1+u_\iota)-1=\sum\limits_{M}\big(\prod\limits_{\iota\in M}u_\iota\big)$, где M пробегает множество всех непустых подмножеств из L, и так как $\big|\prod\limits_{\iota\in M}u_\iota\big|=\prod\limits_{\iota\in M}|u_\iota|$, то

$$\Big|\prod_{\iota\in L}(1+u_\iota)-1\Big|\leqslant\sum_{M}\Big(\prod_{\iota\in M}|u_\iota|\Big)=\prod_{\iota\in L}(1+|u_\iota|)-1\leqslant\varepsilon;$$

этим, в силу критерия Коши, наше утверждение доказано, поскольку $\mathbf{C}^*$ — полная группа.

Докажем теперь *необходимость* условия теоремы. Действительно, если $(1+u_\iota)_{\iota\in I}$ — перемножаемое семейство в $\mathbf{C}^*$, то существует такое конечное $J\subset I$, что для любого конечного $H\subset I$, не пересекающегося с J, $\left|\prod\limits_{\iota\in H}(1+u_\iota)-1\right|\leqslant\frac{1}{8}$. По лемме 2 отсюда следует, что $\sum\limits_{\iota\in H}|u_\iota|\leqslant 1$ для каждого конечного $H\subset I$, не пере-

секающегося с J, а это влечет суммируемость семейства $(|u_\iota|)$ в $\mathbf{R}$ (гл. IV, § 7, теорема 1).

Позже мы дадим этой теореме более простое доказательство, основанное на дифференциальных свойствах показательных и логарифмических функций (Функц. действ. пер., гл. V, § 4, n° 3). Приведенное доказательство имеет то преимущество, что его принцип применим также к (упорядоченным) бесконечным произведениям в некоторых некоммутативных телах и алгебрах (см. упражнение 6 и главу IX, Приложение).

3. *Бесконечные произведения комплексных чисел*

Для того чтобы бесконечное произведение комплексных чисел $\neq 0$ с общим членом $z_n = r_n(\cos\theta_n + i\sin\theta_n)$ было сходящимся в $\mathbf{C}^*$, необходимо и достаточно, вследствие строения группы $\mathbf{C}^*$, чтобы произведение с общим членом r_n было сходящимся в $\mathbf{R}_+^*$, а ряд с общим членом t_n (мерой угла θ_n, принадлежащей интервалу $\left]-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right]$) был сходящимся в $\mathbf{R}$.

Определение 1. *Бесконечное произведение комплексных чисел с общим членом $1 + u_n$ называют абсолютно сходящимся, если сходится произведение с общим членом $1 + |u_n|$* (или, что то же, если сходится ряд с общим членом $|u_n|$).

Предложение 3. *Для того чтобы бесконечное произведение комплексных чисел было коммутативно сходящимся, необходимо и достаточно, чтобы оно было абсолютно сходящимся.*

Это вытекает из предложения 9 § 5 главы III и предыдущей теоремы 1.

Замечания. 1) Произведение с общим членом $|1 + u_n|$ может быть сходящимся, и даже абсолютно сходящимся в $\mathbf{R}_+^*$ без того, чтобы произведение с общим членом $1 + |u_n|$ сходилось (см. упражнение 4); разумеется, это не может иметь места, если все $1 + u_n$, начиная с некоторого номера, вещественны и >0.

2) Как уже было отмечено для бесконечных произведений с членами >0, *сходимость* ряда с общим членом u_n *не является ни необходимым, ни достаточным условием сходимости* произведения с общим членом $1 + u_n$.

Упражнения

*1) Для каждой конечной последовательности $s=(z_k)_{k\in I}$ комплексных чисел положим (см. предложение 2 § 3 главы VII) $\sum_{k\in I}|z_k|=\rho_s \sup_{J\subset I}\left|\sum_{k\in J} z_k\right|$.

а) °Пусть $z_k=r_k(\cos\varphi_k+i\sin\varphi_k)$, где $r_k=|z_k|$, а φ_k есть главная радианная мера амплитуды числа z_k; для каждого φ из интервала $[0, 2\pi[$ положим $f(\varphi)=\sum_{k\in I} r_k(\cos(\varphi-\varphi_k))^+$.

Показать, что верхняя грань $f(\varphi)$ в интервале $[0, 2\pi[$ равна $\sup_{J\subset I}\left|\sum_{k\in J} z_k\right|$. Рассматривая интеграл $\int_0^{2\pi} f(\varphi)\,d\varphi$, вывести отсюда, что $\rho_s\leqslant\pi$ для *любой* конечной последовательности s и что не существует конечной последовательности $s=(z_k)$, для которой бы $\rho_s=\pi$.

б) Показать, что для всякого $\varepsilon>0$ существует конечная последовательность $s=(z_k)$ такая, что $\rho_s>\pi-\varepsilon$. [Взять за z_k корни двучленного уравнения достаточно высокой степени.]$_\circ$

2) Пусть (z_n) — бесконечная последовательность комплексных чисел $z_n=x_n+iy_n$ такая, что $x_n\geqslant 0$ для каждого n. Показать, что если ряды с общими членами z_n и z_n^2 сходятся, то ряд с общим членом z_n^2 абсолютно сходится. Привести пример, когда этот результат теряет силу при замене условия $x_n\geqslant 0\left(\text{т.е.} -\frac{\pi}{2}\leqslant \operatorname{Am}(z_n)\leqslant +\frac{\pi}{2}\right)$ условием $-(1+\varepsilon)\frac{\pi}{2}\leqslant \operatorname{Am}(z_n)\leqslant(1+\varepsilon)\frac{\pi}{2}$, сколь бы мало ни было число $\varepsilon>0$ (через $\operatorname{Am}(z)$ обозначена радианная мера амплитуды числа z, заключенная в интервале $]-\pi, \pi]$).

3) Пусть $(z_\iota)_{\iota\in I}$ — семейство комплексных чисел такое, что $\prod_{\iota\in I}|z_\iota|=+\infty$ $\left(\text{соотв.} \prod_{\iota\in I}|z_\iota|=0\right)$. Показать, что в пространстве $\widetilde{\mathbf{C}}$ (§ 4, n° 3) (z_ι) перемножаемо и имеет произведением ∞ (соотв. 0).

4) Показать, что бесконечное произведение с общим членом $1+\frac{i}{n}$ не сходится, но произведение абсолютных значений его членов абсолютно сходится.

5) Пусть (z_n) — бесконечная последовательность комплексных чисел $\neq 0$ такая, что $\lim_{n\to\infty} z_n=1$. Показать, что если существуют перестановки σ множества $\mathbf{N}$ такие, что бесконечное произведение с общим членом $z_{\sigma(n)}$ сходится, то множество произведений $\mathop{\mathsf{P}}_{n=0}^{\infty} z_{\sigma(n)}$, соответствующих всевозможным перестановкам σ этого рода, есть либо точка, либо вся группа $\mathbf{C}^*$, либо открытая полупрямая с началом 0, либо окружность с центром в 0, либо, наконец, «логарифми-

ческая спираль», т. е. образ прямой $\mathbf{R}$ при отображении $t \longmapsto a^{t-t_0}(\cos t + i \sin t)$ (где $a > 0$ и $\neq 1$). [Рассуждать, как в упражнении 2 § 3 главы VII, используя тот факт, что мультипликативная группа $\mathbf{C}^*$ изоморфна аддитивной группе $\mathbf{R} \times \mathbf{T}$.]

§ 4. Комплексные числовые и проективные пространства

1. *Векторное пространство* $\mathbf{C}^n$

Так как топологическое пространство $\mathbf{C}$ отождествимо с $\mathbf{R}^2$, то $\mathbf{C}^n$, произведение n пространств, совпадающих с $\mathbf{C}$, как *топологическое пространство*, отождествимо с $\mathbf{R}^{2n}$; аналогично и структура топологической группы в $\mathbf{C}^n$, являющаяся произведением структур аддитивных (топологических) групп n сомножителей произведения $\mathbf{C}^n$, отождествима со структурой аддитивной группы в $\mathbf{R}^{2n}$. Но поскольку $\mathbf{C}$ является полем, в $\mathbf{C}^n$ можно определить структуру *векторного пространства размерности n относительно* $\mathbf{C}$, приняв за произведение az комплексного числа a и точки $z = (z_i) \in \mathbf{C}^n$ точку (az_i); следует тщательно различать эту структуру и структуру *векторного пространства размерности* $2n$ *относительно* $\mathbf{R}$, определенную в $\mathbf{R}^{2n}$ (гл. VI, § 1, n° 3); мы закрепим обозначение $\mathbf{C}^n$ за произведением n топологических пространств, совпадающих с $\mathbf{C}$, наделенным, кроме того, определенной выше структурой векторного пространства относительно $\mathbf{C}$, и будем называть его *n-мерным комплексным числовым пространством*. Отметим, что $(t, z) \longmapsto tz$ непрерывно на $\mathbf{C} \times \mathbf{C}^n$.

Аффинное линейное отображение $\mathbf{C}^n$ в $\mathbf{C}^m$ есть также аффинное линейное отображение $\mathbf{R}^{2n}$ в $\mathbf{R}^{2m}$, но обратное неверно.

Например, отображение $z \longmapsto \bar{z}$ есть линейное отображение векторного пространства $\mathbf{R}^2$ на себя, но не является линейным отображением векторного пространства $\mathbf{C}$ на себя.

Тем самым всякое аффинное линейное отображение $\mathbf{C}^n$ в $\mathbf{C}^m$ *равномерно непрерывно*; в частности, всякое аффинное линейное отображение $\mathbf{C}^n$ на себя есть *гомеоморфизм*.

Всякое *аффинное линейное многообразие размерности* p ($\leqslant n$) векторного пространства $\mathbf{C}^n$ является также *аффинным линейным многообразием размерности* $2p$ векторного пространства $\mathbf{R}^{2n}$; и здесь обратное неверно. Чтобы избежать путаницы, линейные

(аффинные) многообразия размерности p пространства $\mathbf{C}^n$ называют *комплексными линейными многообразиями размерности* p (а линейные многообразия пространства $\mathbf{R}^{2n}$ — *вещественными линейными многообразиями*, когда хотят обезопасить себя от всякой ошибки). В частности, *комплексными прямыми* (соотв. *комплексными плоскостями*) называют одномерные (соотв. двумерные) комплексные линейные многообразия пространства $\mathbf{C}^n$, а *комплексными гиперплоскостями* — $(n-1)$-мерные комплексные линейные многообразия.

Часто бывает удобно считать числовое пространство $\mathbf{R}^n$ *погруженным* в комплексное числовое пространство $\mathbf{C}^n$, отождествляя с $\mathbf{R}^n$ часть $\mathbf{C}^n$, определяемую условиями $\mathfrak{J}(z_k) = 0$ ($k = 1, 2, \ldots, n$), структура топологической группы которой (индуцируемая из $\mathbf{C}^n$) изоморфна структуре топологической группы в $\mathbf{R}^n$.

Отметим, что $\mathbf{R}^n$, погруженное указанным образом в $\mathbf{C}^n$, не является комплексным линейным многообразием в $\mathbf{C}^n$.

Система p векторов из $\mathbf{R}^n$, *свободная* относительно поля $\mathbf{R}$, *свободна* и относительно поля $\mathbf{C}$; всякое *вещественное* линейное многообразие V размерности p пространства $\mathbf{R}^n$ *порождает* в $\mathbf{C}^n$ комплексное линейное многообразие V' размерности p, *следом* которого на $\mathbf{R}^n$ оно является (Алг., гл. II; 3-е изд., § 8); пусть V определено системой $n-p$ линейных уравнений $f_k(x) = a_k$, где f_k — линейные формы на $\mathbf{R}^n$ (с вещественными коэффициентами и линейно независимые), а a_k — вещественные числа; тогда *те же* уравнения, но с приданием координатам вектора x комплексных значений определяют и V'.

Обратно, если комплексное линейное многообразие размерности p имеет непустое пересечение с $\mathbf{R}^n$, то это пересечение является вещественным линейным многообразием; однако размерность этого многообразия может быть $<p$.

2. Топология векторных пространств и алгебр над полем C

Все определения и результаты n°n° 5 и 6 § 1 главы VI, касающиеся топологий векторных пространств и алгебр над полем $\mathbf{R}$ и, в частности, пространств и алгебр матриц с элементами из $\mathbf{R}$, остаются в силе без изменений, если заменить всюду $\mathbf{R}$ на $\mathbf{C}$.

3. *Комплексные проективные пространства*

Используя терминологию и обозначения n° 1 § 3 главы VI, введем следующее определение, аналогичное определению вещественных проективных пространств:

Определение 1. *n-мерным комплексным проективным пространством называется проективное пространство $\mathbf{P}_n(\mathbf{C})$, наделенное фактортопологией топологии пространства $\mathbf{C}^*_{n+1}$ по отношению эквивалентности $\Delta_n(\mathbf{C})$.*

Проективное пространство $\mathbf{P}_1(\mathbf{C})$ называется *комплексной проективной прямой*, проективное пространство $\mathbf{P}_2(\mathbf{C})$ — *комплексной проективной плоскостью*.

Во всех вопросах, где рассматриваются исключительно комплексные проективные пространства, вместо $\mathbf{P}_n(\mathbf{C})$ мы пишем просто $\mathbf{P}_n$.

Большинство рассуждений, относящихся к вещественным проективным пространствам, распространяется с очень незначительными изменениями на комплексные проективные пространства.

Прежде всего, топологическое пространство $\mathbf{P}_n(\mathbf{C})$ *отделимо*, как показывает доказательство предложения 1 § 3 главы VI, полностью переносящееся на комплексный случай путем простой замены $\mathbf{R}$ на $\mathbf{C}$. Точно так же доказательство предложения 2 § 3 главы VI показывает, что $\mathbf{P}_n(\mathbf{C})$ *компактно*, *связно* и гомеоморфно факторпространству сферы $\mathbf{S}_{2n+1}$ (которая считается погруженной в пространство $\mathbf{C}^*_{n+1}$, отождествленное с $\mathbf{R}^*_{2n+2}$) по отношению эквивалентности, индуцируемому на этой сфере отношением $\Delta_n(\mathbf{C})$; отметим только, что при $n \geqslant 0$ классы эквивалентности по этому отношению будут здесь множествами, гомеоморфными окружности $\mathbf{S}_1$.

Именно по этой причине предложение 3 § 3 главы VI не имеет аналога для комплексных проективных пространств.

Далее, как и в n° 2 § 3 главы VI, устанавливается, что всякое проективное линейное многообразие размерности p пространства $\mathbf{P}_n(\mathbf{C})$ есть замкнутое множество, гомеоморфное $\mathbf{P}_p(\mathbf{C})$, дополнение которого всюду плотно, если $p < n$. Доказательство

предложения 5 § 3 главы VI переносится без каких бы то ни было изменений путем простой замены $\mathbf{R}$ на $\mathbf{C}$ и показывает, что в $\mathbf{P}_n(\mathbf{C})$ (при $n \geqslant 0$) дополнение к проективной гиперплоскости гомеоморфно $\mathbf{C}^n$, а следовательно, всякая точка имеет окрестность, гомеоморфную $\mathbf{C}^n$. Это позволяет *погрузить* комплексное числовое пространство $\mathbf{C}^n$ в комплексное проективное пространство $\mathbf{P}_n(\mathbf{C})$, отождествляя его с дополнением некоторой проективной гиперплоскости, называемой «бесконечно удаленной гиперплоскостью» (чаще всего — гиперплоскости, записываемой уравнением $x_0 = 0$). В частном случае, когда $n = 1$, бесконечно удаленная гиперплоскость есть *точка*; теорема Александрова показывает тогда, что $\mathbf{P}_1(\mathbf{C})$ гомеоморфно компактному пространству $\widetilde{\mathbf{C}}$, полученному из локально компактного пространства $\mathbf{C}$ путем присоединения «бесконечно удаленной точки», обозначаемой ∞; предложение 4 § 2 главы VI показывает тогда, что *комплексная проективная прямая* $\mathbf{P}_1(\mathbf{C})$ *гомеоморфна сфере* $\mathbf{S}_2$.

Мы предоставляем читателю сформулировать для функций со значениями в $\mathbf{C}$ результаты, аналогичные результатам n° 4 § 3 главы VI.

Будем считать пространство $\mathbf{R}^{n+1}$ *погруженным* в $\mathbf{C}^{n+1}$ (n° 1). Пусть f — каноническое отображение $\mathbf{C}^*_{n+1}$ на факторпространство $\mathbf{P}_n(\mathbf{C})$. Подпространство $f(\mathbf{R}^*_{n+1})$ будет состоять из тех точек пространства $\mathbf{P}_n(\mathbf{C})$, которые обладают по крайней мере одной системой *вещественных* однородных координат; покажем, что $f(\mathbf{R}^*_{n+1})$ гомеоморфно вещественному проективному пространству $\mathbf{P}_n(\mathbf{R})$, что позволит, отождествляя его с этим последним, считать пространство $\mathbf{P}_n(\mathbf{R})$ *погруженным* в $\mathbf{P}_n(\mathbf{C})$. Заметим для этого, что отношение, индуцируемое в $\mathbf{R}^*_{n+1}$ отношением $\Delta_n(\mathbf{C})$, есть не что иное, как $\Delta_n(\mathbf{R})$; каноническое же отображение φ факторпространства $\mathbf{R}^*_{n+1}/\Delta_n(\mathbf{R}) = \mathbf{P}_n(\mathbf{R})$ на $f(\mathbf{R}^*_{n+1})$ *непрерывно* (гл. I, § 3, предложение 10); поскольку $\mathbf{P}_n(\mathbf{R})$ компактно, φ есть, таким образом, гомеоморфизм (гл. I, § 9, следствие 2 теоремы 2).

То, что φ взаимно непрерывно, можно доказать также с помощью критерия предложения 10 § 3 главы I, не используя компактность $\mathbf{P}_n(\mathbf{R})$ (см. упражнение 3).

Так как всякое $(p+1)$-мерное векторное подпространство пространства $\mathbf{R}^{n+1}$ порождает в $\mathbf{C}^{n+1}$ $(p+1)$-мерное комплексное

векторное подпространство, то мы видим, что всякое p-мерное проективное линейное многообразие V пространства $\mathbf{P}_n(\mathbf{R})$ (называемое *вещественным* проективным линейным многообразием) порождает в $\mathbf{P}_n(\mathbf{C})$ p-мерное проективное линейное многообразие V' (называемое *комплексным* проективным линейным многообразием), следом которого на $\mathbf{P}_n(\mathbf{R})$ оно служит; при этом всякая система (однородных) уравнений многообразия V будет вместе с тем системой (однородных) уравнений многообразия V', если придавать переменным комплексные значения.

4. *Пространства комплексных проективных линейных многообразий*

Используя терминологию и обозначения n° 5 § 3 главы VI, определим, так же как там, пространства проективных линейных многообразий комплексного проективного пространства.

Определение 2. *Пространством проективных линейных многообразий размерности $p \geqslant 0$ проективного пространства $\mathbf{P}_n(\mathbf{C})$ называется факторпространство $\mathbf{P}_{n,p}(\mathbf{C})$ топологического пространства $L_{n+1,p+1}(\mathbf{C})$ по отношению эквивалентности $\Delta_{n,p}(\mathbf{C})$.*

Из доказательства предложения 6 § 3 главы VI прежде всего видим, что $\mathbf{P}_{n,p}(\mathbf{C})$ *отделимо*. Далее доказываем *компактность* $\mathbf{P}_{n,p}(\mathbf{C})$, заменяя в доказательстве предложения 7 § 3 главы VI подпространство $V_{n+1,p+1}$ подпространством $W_{n+1,p+1}$ пространства $L_{n+1,p+1}(\mathbf{C})$, образованным системами из $p+1$ векторов, образующих *ортонормированный эрмитов базис* порождаемого ими векторного подпространства (Алг., гл. IX § 6, n° 1); то же можно выразить, сказав, что $W_{n+1,p+1}$ состоит из матриц $X=(x_{ij})$, удовлетворяющих условиям

$$\sum_{j=0}^{n} x_{ij}\bar{x}_{ij}=1 \quad (1 \leqslant i \leqslant p+1), \qquad \sum_{j=0}^{n} x_{ij}\bar{x}_{kj}=0 \quad \text{при } i \neq k.$$

Доказательство предложения 8 § 3 главы VI переносится на случай пространства $\mathbf{P}_{n,p}(\mathbf{C})$ без изменений и показывает, что это пространство *связно* и *локально связно* и что каждая из его точек обладает окрестностью, гомеоморфной $\mathbf{C}^{(p+1)(n-p)}$. Наконец, доказательство предложения 9 § 3 главы VI тоже

применимо без всяких изменений, так что мы видим, что грассманиан $G_{n,p}(\mathbf{C})$ гомеоморфен $\mathbf{P}_{n,p}(\mathbf{C})$.

Замечание. Бо́льшая часть свойств, общих для вещественных и комплексных числовых (или проективных) пространств, остается в силе и для числовых (соотв. проективных) пространств, определенных аналогичным образом, отправляясь от *тела кватернионов* $\mathbf{H}$; они распространимы даже на многие другие топологические тела (см. упражнения 2 и 6).

Упражнения

1) Пусть f — полином с комплексными коэффициентами от n комплексных переменных, не равный тождественно нулю. Показать, что в $\mathbf{C}^n$ дополнение к множеству S таких точек $z = (z_i)$, что $f(z_1, z_2, \ldots, z_n) = 0$ («алгебраическому многообразию», определяемому уравнением $f = 0$), связно. [Рассмотреть пересечение S с комплексной прямой, проходящей через любые две точки $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ из $\complement S$.]

*2) Пусть K — недискретное отделимое топологическое тело.

а) Пусть E — левое векторное пространство размерности n над K и $(\boldsymbol{a}_i)_{1 \leq i \leq n}$ — базис пространства E. Топология, получаемая путем перенесения в E посредством биективного линейного отображения $(x_i) \longmapsto \sum_{i=1}^{n} x_i \boldsymbol{a}_i$ топологии произведения K^n (произведения топологий сомножителей), не зависит от рассматриваемого базиса $(\boldsymbol{a}_i)$, согласуется со структурой аддитивной группы в E и такова, что отображение $(t, x) \longmapsto tx$ произведения $K \times E$ в E непрерывно. Пусть F — векторное подпространство пространства E; топология, индуцируемая в F из E, совпадает с топологией, определяемой в F описанным способом, исходя из любого базиса пространства F; F замкнуто в E, и если $F \neq E$, то $\complement F$ всюду плотно в E.

б) Обобщить на тело K предложения 4, 5 и 6 § 1 главы VI. [В случае некоммутативного тела K доказательство непрерывности отображения $X \longmapsto X^{-1}$ в окрестности любой обратимой квадратной матрицы n-го порядка над K провести индукцией по n; ограничиваясь окрестностью единичной матрицы I_n n-го порядка, заметить, что всякая матрица X, достаточно близкая к I_n, может быть представлена в виде

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \; \ldots \; 0 \\ \lambda_2 & \\ \cdot & \\ \cdot & I_{n-1} \\ \cdot & \\ \lambda_n & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 \mu_2 \; \ldots \; \mu_n \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \qquad Y \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix},$$

где I_{n-1} — единичная матрица $(n-1)$-го порядка, а Y — обратимая матрица $(n-1)$-го порядка.

в) Если K коммутативно, а E — алгебра ранга n над K, то топология в E согласуется со структурой кольца. Кроме того, если E обладает единичным элементом, группа G обратимых элементов алгебры E открыта и всюду плотна в E, а топология, индуцируемая в G из E, согласуется со структурой группы в G. [Если e — единичный, а x — обратимый элементы в E, то каждое из уравнений $xy = e$, $yx = e$ относительно y имеет *одно* и *только одно* решение; рассмотреть для каждого из этих уравнений равносильную ему систему n линейных уравнений, дающую составляющие элемента y относительно некоторого базиса в E.]

г) Пусть K — неполное коммутативное тело и E — алгебра ранга n над K; если пополнение $\hat{K}$ тела K есть тело, то пополнение $\hat{E}$ алгебры E есть алгебра, получаемая путем расширения до $\hat{K}$ кольца операторов алгебры E (Алг., гл. III); получить отсюда примеры топологических тел, пополнение которых не являлось бы телом.

3) Доказать с помощью предложения 10 § 3 главы I, что вещественное проективное пространство $\mathbf{P}_n(\mathbf{R})$ гомеоморфно подпространству пространства $\mathbf{P}_n(\mathbf{C})$, состоящему из всех точек, обладающих по крайней мере одной системой вещественных однородных координат. [Пусть A — замкнутое множество, насыщенное по $\Delta_n(\mathbf{R})$, в $\mathbf{R}^*_{n+1}$, рассматриваемом как погруженное в $\mathbf{C}^*_{n+1}$, и B — множество точек ζx, где x пробегает A, а ζ — единичную окружность $\mathbf{U}$; показать, что $\overline{B}$ насыщено по $\Delta_n(\mathbf{C})$ и что A есть след $\overline{B}$ на $\mathbf{R}^*_{n+1}$.]

4) Пусть H_n —«квадрика» в комплексном проективном пространстве $\mathbf{P}_n(\mathbf{C})$, определяемая уравнением $x_0^2 + x_1^2 + \ldots + x_n^2 = 0$. Показать, что каждая точка в H_n имеет открытую окрестность, гомеоморфную $\mathbf{C}^{n-1}$, и что H_n связна, так же как и ее пересечение с любой комплексной проективной гиперплоскостью. [Свести доказательство последнего пункта к случаю, когда $n = 2$.]

Показать, что H_2 гомеоморфна $\mathbf{S}_2$, а H_3 — произведению $\mathbf{S}_2 \times \mathbf{S}_2$. [Использовать параметрическое представление этой квадрики с помощью ее прямолинейных образующих.]

5) Рассматривая сферу $\mathbf{S}_5$ как подпространство пространства $\mathbf{C}^3$, рассмотрим отображение $\mathbf{S}_5$ в $\mathbf{R}^7$, сопоставляющее каждой точке $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{S}_5$ (x_1, x_2, x_3 — комплексные числа) точку $y = (y_i)_{1 \leq i \leq 7} \in \mathbf{R}^7$ такую, что

$$y_1 = |x_1|^2 - |x_2|^2, \quad y_2 = \Re(x_1\overline{x}_2), \quad y_3 = \Im(x_1\overline{x}_2),$$

$$y_4 = \Re(x_1\overline{x}_3), \quad y_5 = \Im(x_1\overline{x}_3), \quad y_6 = \Re(x_2\overline{x}_3), \quad y_7 = \Im(x_2\overline{x}_3).$$

Эта функция принимает одинаковые значения в любых точках x, $x' \in \mathbf{S}_5$ таких, что $x' = \zeta x$, где $|\zeta| = 1$; показать, что при факторизации она дает гомеоморфизм $\mathbf{P}_2(\mathbf{C})$ на подпространство пространства $\mathbf{R}^7$.

*6) Пусть K — недискретное отделимое топологическое тело (коммутативное или нет).

а) Наделим левое проективное пространство $\mathbf{P}_n(K)$ фактортопологией топологии пространства K^*_{n+1} по отношению эквивалентности $\Delta_n(K)$. Распространить на $\mathbf{P}_n(K)$, наделенное этой топологией, предложения 1, 4 и 5 § 3 главы VI; если K связно, то $\mathbf{P}_n(K)$ связно; в противном случае $\mathbf{P}_n(K)$ вполне несвязно.

°б) Показать, что если K — (недискретное) локально компактное тело, то $\mathbf{P}_n(K)$ компактно. [Пусть U — компактная окрестность нуля в K и a — элемент из K такой, что $\lim\limits_{m\to 0} a^m = 0$ (см. Коммутат. алг., гл. VI, § 9); пусть S — множество тех точек в K^*_{n+1}, все координаты x_i которых принадлежат U и существует номер k, для которого $x_k \in \overline{a\complement U}$; показать, что $\mathbf{P}_n(K)$ есть канонический образ S.]$_\circ$

в) Точно так же распространить на множество $\mathbf{P}_{n,\,p}(K)$ проективных линейных многообразий размерности $p \geqslant 0$ пространства $\mathbf{P}_n(K)$ определение 2 и предложения 6 и 8 § 3 главы VI, °а также предложение 7, если K локально компактно. [Для предложения 7 сопоставить каждой последовательности индексов σ множество $S_\sigma \subset A_\sigma$, состоящее из матриц, все строки которых принадлежат множеству S, определенному в б); показать, что $\mathbf{P}_{n,\,p}(K)$ есть канонический образ объединения множеств S_σ.]$_\circ$ В случае, когда K коммутативно, обобщить также предложение 9 § 3 главы VI.

г) Пусть K не коммутативно и $\mathbf{P}'_{n,p}(K)$ обозначает пространство проективных линейных многообразий размерности p *правого* проективного пространства размерности n над телом K (причем топология в $\mathbf{P}'_{n,p}(K)$ определена тем же способом, что и топология в $\mathbf{P}_{n,\,p}(K)$). Показать, что $\mathbf{P}_{n,\,p}(K)$ и $\mathbf{P}'_{n,\,n-p-1}(K)$ гомеоморфны. [Каждому $(p+1)$-мерному векторному подпространству V левого векторного пространства $E = K_s^{n+1}$ сопоставить векторное подпространство пространства E^*, сопряженного к E, ортогональное к V (см. Алг., гл. II, § 4; 3-е изд., § 7, n° 5).]

7) Распространить результаты упражнения 6 § 3 главы VI на пространства проективных линейных многообразий над телами $\mathbf{C}$ и $\mathbf{H}$.

*8) Распространить результаты упражнений 7, 8, 9 § 3 главы VI на пространства $W_{n,\,p}$ (n° 4).

Пусть в векторном пространстве $\mathbf{H}^n$ над телом кватернионов $W_{n,\,p}$ обозначает по-прежнему множество всех таких последовательностей $(x_k)_{1\leqslant k\leqslant p}$ из p векторов $x_k = (x_{kj})_{1\leqslant j\leqslant n}$, что

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}\bar{x}_{ij} = 1 \quad (1 \leqslant i \leqslant p), \qquad \sum_{j=1}^{n} x_{ij}\bar{x}_{kj} = 0 \quad \text{при} \quad i \neq k$$

(где $\bar{x}$ обозначает кватернион, сопряженный с кватернионом x). Распространить на $W_{n,\,p}$ результаты упражнений 7, 8, 9 § 3 главы VI.

ИСТОРИЧЕСКИЙ ОЧЕРК

К ГЛАВЕ VIII

(Римские цифры относятся к библиографии, помещенной в конце настоящего очерка.)

Мы не будем вновь давать здесь полного изложения исторического развития теории комплексных чисел или кватернионов, поскольку эти теории являются в основном достоянием Алгебры (см. Алг., Исторические очерки к главам II—III и VIII), но скажем несколько слов о геометрическом представлении мнимых чисел, которое во многих отношениях означало решающий прогресс в истории математики.

Первая отчетливая концепция взаимно однозначного соответствия между комплексными числами и точками плоскости бесспорно принадлежит К. Ф. Гауссу *), особенной заслугой которого явилось то, что он первый применил эту идею к теории комплексных чисел и ясно предвидел всю ту пользу, которую смогли извлечь из нее аналисты XIX века. В течение XVII и XVIII веков математики мало-помалу пришли к убеждению, что мнимые числа, позволяющие решать уравнения второй степени, позволяют также решать алгебраические уравнения любой степени. На протяжении XVIII века были опубликованы многочисленные попытки доказательства этой теоремы; но среди них, не говоря уже о впадавших в порочный круг, не было ни одной, которая не подавала бы повод к серьезным возражениям. Гаусс, после тщательного изучения этих попыток и обстоятельной критики имевшихся в них пробелов, в своей диссертации (написанной в 1797 г. и изданной в 1799 г.), задался целью дать, наконец, строгое доказательство; вернувшись к идее, мимоходом высказанной Даламбером (в доказательстве, опубликованном последним в 1746 г. **)), он замечает, что точки (a, b) плоскости, для которых

---

*) Идея подобного соответствия несомненно впервые была высказана Валлисом в его Treatise of Algebra, опубликованном в 1685 г.; но его соображения по этому вопросу оставались неясными и не оказали влияния на современников.

**) Это доказательство (в котором Даламбер к тому же совершенно не использует замечания, послужившего отправным пунктом для Гаусса) является первым по времени, не сводящимся к грубой логической ошибке;

$a + ib$ есть корень полинома $P(x + iy) = X(x, y) + iY(x, y)$,— это точки пересечения кривых $X = 0$ и $Y = 0$; путем качественного изучения этих кривых он показывает, что некоторая непрерывная дуга одной из них соединяет точки двух различных областей, ограниченных другой, и заключает отсюда, что кривые пересекаются ((I), т. III, стр. 3; см. также (I bis)),— доказательство, по своей ясности и оригинальности представляющее значительный шаг вперед по сравнению с прежними попытками и несомненно являющееся одним из первых примеров чисто топологического рассуждения, примененного к алгебраической проблеме *).

В своей диссертации Гаусс не определяет явно соответствия между точками плоскости и мнимыми числами; по отношению к этим последним и вопросам «существования», которые они возбуждали на протяжении двух веков, он занимает довольно-таки сдержанную позицию, намеренно представляя все свои рассуждения в такой форме, где встречаются только вещественные числа. Но ход идей его доказательства был бы совершенно непонятен, если бы оно не предполагало вполне сознательного отождествления точек плоскости с комплексными числами; и относящиеся к тому же времени его исследования по теории чисел и теории эллиптических функций, в которых тоже участвуют комплексные числа, только подкрепляют эту гипотезу. До какой степени геометрическое представление мнимых чисел стало для него привычным и к каким результатам оно могло привести в его руках, ясно показывают заметки (опубликованные лишь в наши дни), в которых он применяет комплексные числа к решению вопросов элементарной геометрии ((I), т. IV, стр. 396 и т. VIII, стр. 307). Еще более определенный характер имеет письмо к Бесселю от 1811 г. ((I), т. VIII, стр. 90, 91), где он набрасывает основы теории интегрирования функций комплексной переменной: «*Подобно тому*,— говорит он,— *как всю область вещественных величин можно представить посредством бесконечной прямой, полную область всех величин, вещественных и мнимых, можно представить себе* («sinnlich machen») *посредством бесконечной плоскости, каждая точка которой, опре-*

и Гаусс, справедливо критикуя его слабые места, не отказывается, однако, признать ценность основной идеи Даламбера. «*Истинный стержень доказательства*,— говорит он,— *как мне представляется, не затрагивается всеми этими возражениями*» ((I), т. III, стр. 11); несколько далее он намечает метод, который позволяет придать рассуждениям Даламбера строгость и совпадает, с точностью до некоторых деталей, с рассуждением Коши в одном из его доказательств той же теоремы (см. § 2, упражнение 2).

*) Всего Гаусс опубликовал четыре доказательства «теоремы Даламбера — Гаусса»; последнее есть вариант первого и, как и первое, апеллирует к интуитивно очевидным топологическим свойствам плоскости; но второе и третье основываются на совершенно других принципах. Доказательство, приведенное нами в § 1, в существенных чертах совпадает со вторым доказательством Гаусса, которое в свою очередь представляет собой не что иное, как применение одной идеи Эйлера и де Фонсене, как это уже было отмечено в Алгебре (см. Исторический очерк к главам VI — VII Книги II).

деленная своей абсциссой a и своей ординатой b, представляет в то же время величину $a + bi$. Следовательно, непрерывный переход от одного значения x к другому выполняется вдоль некоторой линии и может быть поэтому осуществлен бесчисленным множеством способов...»

Но только в 1831 г. (в связи с введением «гауссовых чисел» $a + bi$, где a и b — целые) Гаусс публично излагает свои мысли на этот счет вполне отчетливым образом ((I), т. II, Theoria Residuorum Biquadraticorum, Commentatio secunda, art. 38, стр. 109 и Anzeige, стр. 174 и след.). Тем временем идея геометрического представления мнимых чисел была вновь найдена независимо двумя скромными исследователями, которые оба были математиками-любителями, более или менее самоучками, сделавшими этот свой единственный вклад в науку почти без всякого контакта с научными кругами того времени. В связи с этим их работам угрожала опасность остаться совершенно незамеченными. Это и произошло с первым из них — датчанином К. Весселем, небольшое, очень ясно изложенное сочинение которого, появившееся в 1798 г., было извлечено из забвения лишь веком позже; и такое же злоключение чуть не произошло со вторым из них — швейцарцем Ж. Арганом, сочинение которого было лишь благодаря случайности обнаружено в 1813 г., через семь лет после его опубликования *). Это сочинение вызвало оживленную дискуссию в Annales de Gergonne, и его тема стала, во Франции и Англии, предметом нескольких публикаций (малоизвестных авторов) между 1820 и 1830 гг.; но не хватало авторитета крупного имени, чтобы положить конец этим спорам и склонить математиков к новой точке зрения; и только к середине века геометрическое представление мнимых чисел сделалось, наконец, общепринятым после (указанных выше) публикаций Гаусса в Германии, работ Гамильтона и Кэли по гиперкомплексным системам в Англии и, наконец, во Франции — признания со стороны Коши **), всего за несколько лет до того, как Риман путем гениального обобщения еще более расширяет роль геометрии в теории аналитических функций и заодно вызывает к жизни топологию.

* * *

*) В противоположность Гауссу, Вессель и Арган больше озабочены *обоснованием* действий над комплексными числами, чем использованием предложенного ими геометрического представления в новых исследованиях; Вессель не приводит вообще никаких приложений, а единственным приложением, которое дает Арган, служит доказательство теоремы Даламбера — Гаусса, являющееся лишь вариантом доказательства Даламбера и вызывающее те же возражения.

**) В своих первых работах об интегралах функций комплексных переменных (между 1814 и 1826 гг.) Коши рассматривает комплексные числа как «символические» выражения и не отождествляет их с точками плоскости, но это не мешает ему постоянно связывать с числом $x + iy$ точку (x, y) и свободно пользоваться при этом геометрическим языком.

Измерение углов дугами, отсекаемыми ими на окружности, так же старо, как и само понятие угла, и было уже известно вавилонянам, от которых у нас сохранилась единица угла — градус; впрочем, для них имело значение только измерение углов, заключенных между 0 и 360°, что было им достаточно, поскольку углы служили им прежде всего для определения положения небесных тел в тех или иных точках их видимых траекторий и для составления таблиц, используемых в научных или астрологических целях.

У греческих геометров классической эпохи определение угла (Eucl. El., I, определения 8 и 9) еще более узко, поскольку оно относится лишь к углам, меньшим двух прямых; и так как, с другой стороны, их теория отношений и меры основывалась на сравнении произвольно больших кратных измеряемых величин, то углы не могли быть для них измеримой величиной, хотя у них, естественно, имелись понятия равных углов, углов бо́льших или меньших один другого, а также суммы двух углов, если эта сумма не превосходит двух прямых. Так же как сложение дробей, измерение углов должно было быть поэтому в их глазах эмпирической процедурой, не имеющей научного значения. Эта точка зрения хорошо иллюстрируется блестящим мемуаром Архимеда о спиралях ((III), т. II, стр. 1—121), где, не имея возможности определить их пропорциональностью радиуса-вектора и угла, он дает им кинематическое определение (определение 1, стр. 44; см. формулировку предложения 12 на стр. 46), с помощью которого ему удается получить, как показывает дальнейшая часть его сочинения, все, что могло бы ему дать общее понятие меры углов, если бы он им обладал. Что касается греческих астрономов, то, по-видимому, в этом пункте, как и во многих других, они довольствовались тем, что следовали своим предшественникам — вавилонянам.

И здесь, так же как в эволюции понятия вещественного числа (см. Исторический очерк к главе IV), ослабление духа строгости в процессе упадка греческой науки приводит к возврату к «наивной» точке зрения, в некоторых отношениях более близкой к нашей, чем строгая евклидова концепция. Так, этим вызвано, что один мало осведомленный интерполятор вставляет в текст Евклида знаменитое предложение (Eucl. El., VI, 33): «Углы пропорциональны дугам, которые они отсекают на окружности» *), а анонимный схоласт, комментирующий «доказательство» этого предложения, не колеб-

*) То, что это действительно вставка, не подлежит никакому сомнению ввиду абсурдности доказательства, неумело подражающего классическим образцам метода Евдокса; кроме того, очевидно, что этому результату совсем не место в конце Книги VI. Любопытно отметить, что Теон, в IV веке н. э., наивно ставит себе в заслугу сделанное им дополнение к этой вставке, претендующее на доказательство того, что площади секторов круга пропорциональны их центральным углам (Eucl. El., изд. Гейберга, т. 5, стр. XXIV); и это спустя шесть веков после нахождения Архимедом площади секторов спиралей.

лясь вводит, конечно без какого бы то ни было обоснования, дуги, равные произвольно большим кратным длины окружности, и соответствующие этим дугам углы *). Но даже Виета, в XVI веке, как будто вплотную подошедший к нашему современному пониманию угла, открыв, что уравнение $\sin nx = \sin \alpha$ обладает многими корнями, получает лишь те из них, которые соответствуют углам, меньшим двух прямых ((IV), стр. 305). Окончательно эта точка зрения была преодолена только в XVII веке; и после того, как открытие Ньютоном разложений $\sin x$ и $\cos x$ в ряд дало для этих функций выражения, пригодные для всех значений аргумента, мы находим наконец у Эйлера, в связи с рассмотрением логарифмов «мнимых» чисел, четкую концепцию понятия меры произвольного угла ((V), (1), т. XVII, стр. 220).

Разумеется классическое определение меры угла длиной дуги окружности не только интуитивно, но и по сути корректно; однако, чтобы сделаться строгим, оно требует понятия длины дуги, т. е. интегрального исчисления. С точки зрения участвующих здесь структур это очень обходный путь, и можно, как мы видели в тексте, не использовать никаких средств, кроме доставляемых теорией топологических групп; вещественная и комплексная показательные функции получаются, таким образом, из одного и того же источника — теоремы, характеризующей «однопараметрические группы» (гл. V, § 3, теорема 1).

*) Eucl. El., изд. Гейберга, т. 5., стр. 357.

БИБЛИОГРАФИЯ

(I) C. F. G a u s s, Werke, т. II (2-е изд., Göttingen, 1876), III (2-е изд., там же, 1876), IV (там же, 1873) и VIII (там же, 1900).

(I bis) Die vier Gauss'schen Beweise für die Zerlegung ganzer algebraischer Functionen in reelle Factoren ersten oder zweiten Grades (Ostwald's Klassiker, n° 14, Leipzig (Teubner), 1904).

(II) Euclidis Elementa, 5 тт., изд. J. L. Heiberg, Leipzig (Teubner), 1883—1888. [Начала Евклида, 3 тт., Гостехиздат, М.— Л., 1948 | 1950.]

(III) Archimedis Opera Omnia, 3 тт., изд. J. L. Heiberg, 2-е изд., Leipzig (Teubner), 1913—1915. [А р х и м е д, Сочинения, Физматгиз, М., 1962.]

(III bis) Les Œuvres complètes d'Archimède, trad. P. Ver Eecke, Paris — Bruxelles (Desclée-de Brouwer), 1921.

(IV) F r a n c i s c i V i e t a e, Opera Mathematica, Leyde (Bonaventure et Abraham Elzevir), 1646.

(V) L. E u l e r, Opera omnia (1), т. XVII, Leipzig (Teubner), 1915.

УКАЗАТЕЛЬ ОБОЗНАЧЕНИЙ

	Гл.	§	n°
E/G (G — группа, действующая в пространстве E)	III	2	4
$P(K, L)$ (K, L — подмножества пространства с операторами)	III	4	5
$\sum_{\iota \in I} x_\iota$, $\sum_i x_\iota$, $\sum x_\iota$	III	5	1
$\prod_{\iota \in I} x_\iota$, $\prod_i x_\iota$, $\prod x_\iota$	III	5	1
(x_n) (ряд, при вольности речи)	III	5	6
$\underset{n=0}{\overset{\infty}{\mathsf{S}}} x_n$, $x_0 + x_1 + \ldots + x_n + \ldots$, $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$	III	5	6
$\underset{n=0}{\overset{\infty}{\mathsf{P}}} x_n$, $\prod_{n=0}^{\infty} x_n$	III	5	7
K^* (K — тело)	III	6	7
$\mathbf{R}$, $\mathbf{R}^*$, $\mathbf{R}_+$, $\mathbf{R}_+^*$	IV	1	3
$\sqrt[m]{x}$, $\sqrt{x}$, $x^{1/m}$ (x — вещественное число $\geqslant 0$)	IV	3	3
$\overline{\mathbf{R}}$, $+\infty$, $-\infty$	IV	4	2
$\sup A$, $\inf A$ ($A \subset \overline{\mathbf{R}}$)	IV	4	2
$\overline{\mathbf{R}}^*$	IV	4	3
$\lim\limits_{x \to a,\ x > a,\ x \in A} f(x)$, $\lim\limits_{x \to a,\ x < a,\ x \in A} f(x)$	IV	5	3
$f(a-)$, $f(a+)$	IV	5	3
$\sup\limits_{x \in A} f(x)$, $\inf\limits_{x \in A} f(x)$ (f — числовая функция)	IV	5	4
$\sup\limits_{\iota \in I} f_\iota$, $\sup\limits_{\iota} f_\iota$, $\inf\limits_{\iota \in I} f_\iota$, $\inf\limits_{\iota} f_\iota$ (f_ι — числовые функции)	IV	5	5
$\limsup_{\mathfrak{G}} f$, $\liminf_{\mathfrak{G}} f$, $\limsup_{x, \mathfrak{G}} f(x)$, $\liminf_{x, \mathfrak{G}} f(x)$	IV	5	6
$\limsup f$, $\liminf f$, $\limsup_x f(x)$, $\liminf_x f(x)$	IV	5	6
$\limsup\limits_{x \to a} f(x)$, $\liminf\limits_{x \to a} f(x)$	IV	5	6
$\limsup\limits_{x \to a,\ x \in E} f(x)$, $\liminf\limits_{x \to a,\ x \in E} f(x)$, $\limsup\limits_{x \to a,\ x \neq a} f(x)$, $\liminf\limits_{x \to a,\ x \neq a} f(x)$	IV	5	6
$\limsup\limits_{n \to \infty} u_n$, $\liminf\limits_{n \to \infty} u_n$ ((u_n) — последовательность чисел)	IV	5	6
$\limsup\limits_{n \to \infty} f_n$, $\liminf\limits_{n \to \infty} f_n$ ((f_n) — последовательность функций)	IV	5	6

	Гл.	§	n°
$f+g$, fg, $1/f$ (f, g — функции со значениями в $\overline{\mathbf{R}}$)	IV	5	7
$[x]$ (x — вещественное число)	IV	8	2
$\mathbf{T}$	V	1	2
a^x (a — вещественное число >0, x — вещественное число)	V	4	1
$\log_a x$ (a и x — вещественные числа >0, $a \neq 1$)	V	4	1
$\mathbf{R}^n$	VI	1	1
$d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ (евклидово расстояние)	VI	2	1
$\Vert \mathbf{x} \Vert$ (евклидова норма)	VI	2	1
$(\mathbf{x} \mid \mathbf{y})$ (скалярное произведение)	VI	2	2
$\mathbf{S}_n$, $\mathbf{B}_n$, $\mathbf{R}_n^*$	VI	2	3
$\mathbf{P}_n(\mathbf{R})$, $\mathbf{P}_n$	VI	3	1
$\widetilde{\mathbf{R}}$	VI	3	3
∞ (точка из $\widetilde{\mathbf{R}}$)	VI	3	3
$\mathbf{P}_{n,p}(\mathbf{R})$, $\mathbf{P}_{n,p}$	VI	3	5
$r(G)$, $d(G)$ (G — замкнутая подгруппа группы $\mathbf{R}^n$)	VII	1	2
G^* (G — подгруппа группы $\mathbf{R}^n$)	VII	1	3
$\mathbf{T}^n$	VII	1	4
$\mathbf{C}$, i	VIII	1	1
$\Re(z)$, $\Im(z)$, $\bar{z}$, $\vert z \vert$ (z — комплексное число)	VIII	1	1
$\mathbf{C}^*$, $\mathbf{U}$	VIII	1	3
$\mathbf{H}$	VIII	1	4
$e(x)$ $(=e^{2\pi i x})$	VIII	2	1
$\widehat{(\Delta_1, \Delta_2)}$ (Δ_1, Δ_2 — полупрямые)	VIII	2	2
δ, $\widetilde{\omega}$	VIII	2	2
$\mathrm{Am}(z)$ (z — комплексное число)	VIII	2	2
$\cos\theta$, $\sin\theta$, $\operatorname{tg}\theta$ (θ — угол)	VIII	2	2
$\cos_a x$, $\sin_a x$, $\operatorname{tg}_a x$, $\operatorname{ctg}_a x$ (x — вещественное число)	VIII	2	4
$\cos x$, $\sin x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$ (x — вещественное число)	VIII	2	4
$\widehat{(D_1, D_2)}$ (D_1, D_2 — прямые).	VIII	2	6
δ_0	VIII	2	6
$\mathbf{C}^n$	VIII	4	1
$\mathbf{P}_n(\mathbf{C})$, $\widetilde{\mathbf{C}}$	VIII	4	3
∞ (точка из $\widetilde{\mathbf{C}}$)	VIII	4	3
$\mathbf{P}_{n,p}(\mathbf{C})$	VIII	4	4

УКАЗАТЕЛЬ ТЕРМИНОВ

	Гл.	§	n°
Абсолютно сходящееся бесконечное произведение	IV	7	6
— — — — комплексных чисел	VIII	3	3
— сходящийся ряд	IV	7	6
— — — точек из $\mathbf{R}^n$	VII	3	2
Абсолютное значение вещественного числа	IV	1	6
Автоморфизм	III	1	3
— внутренний топологической группы	III	1	3
— локальный — —	III	1	3
Аксиома Архимеда	IV	2	1
Алгебраические числа	VIII	1	упр. 2
Амплитуда комплексного числа	VIII	2	2
Архимеда аксиома	IV	2	1
Ассоциированная отделимая группа	III	2	6
— подгруппа (с некоторой подгруппой из $\mathbf{R}^n$*)*	VII	1	3
Ассоциированное биективное представление	III	2	8
— отделимое кольцо	III	6	4
Ассоциированный отделимый модуль	III	6	6
Базис канонический в $\mathbf{R}^n$	VI	1	3
Базисная последовательность	IV	8	2
Биссектриса углового сектора	VIII	2	5
Больцано теорема	IV	6	1
Бореля — Лебега теорема	IV	2	2
Вейерштрасса теорема	IV	6	1
Вектор направляющий прямой	VI	1	4
Векторы ортогональные	VI	2	2
Верхний предел	IV	5	6
Верхняя огибающая	IV	5	5
Вещественная функция	IV	5	5
Вещественное число	IV	1	3
	IV	4	2
Внешнее полупрямое произведение	III	2	10
— топологическое полупрямое произведение	III	2	10
Входящий угловой сектор	VIII	2	5

	Гл.	§	n°
Выступающий угловой сектор	VIII	2	5
Гиперплоскость диаметральная	VI	2	4
— комплексная в $\mathbf{C}^n$	VIII	4	1
— проектирования (при стереографической проекции)	VI	2	4
Гомоморфизм топологической группы в топологическую группу	III	2	8
Градус (единица угла)	VIII	2	3
Грань нижняя (верхняя) функции	IV	5	9
Группа аддитивная вещественных чисел, сравнимых по модулю a	V	1	2
— — рациональной прямой	IV	1	2
— — числового пространства	VI	1	2
— — числовой прямой	IV	1	3
—, действующая свободно в множестве	III	4	3
—, — тривиально в множестве	III	2	4
— евклидовых движений	VI	2	2
— квазитопологическая	III	2	упр. 5
— однопараметрическая	V	3	
— ортогональная	VI	2	2
— паратопологическая	III	1	упр. 4
— полутопологическая	III	1	упр. 2
— топологическая	III	1	1
Группа топологическая, действующая непрерывно в пространстве	III	2	4
— —, — совершенно в пространстве	III	4	1
— — дискретная	III	1	1
— — отделимая, ассоциированная с топологической группой	III	2	6
— — полная	III	3	3
— — с операторами	III	6	1
Группы, действующие в пространстве перестановочно	III	2	4
— топологические, локально изоморфные	III	1	3
Движение евклидово	VI	2	2
Двоичное разложение	IV	8	5
Десятичное разложение	IV	8	5
Дискретная группа	III	1	1
Дискретное кольцо	III	6	3
— тело	III	6	7
Длина интервала	IV	1	5
Дополнение алгебраическое подгруппы	III	6	2
— топологическое подгруппы	III	6	2
Евклидово движение	VI	2	2
— расстояние	VI	2	1
Единичный угол	VIII	2	3

	Гл.	§	n°
Звездное множество	VI	2	упр. 12
Знак вещественного числа	IV	3	2
Знакочередующийся ряд	IV	7	6
Значение абсолютное комплексного числа	VIII	1	1
Изоморфизм локальный топологической группы в топологическую группу	III	1	3
— топологической группы в топологическую группу	III	1	3
Интервалы смежные	IV	2	5
Иррациональные числа	IV	1	3
Кантора теорема	IV	1	3
Канторово множество	IV	2	5
Квадрант	VIII	2	5
Квадрат открытый (замкнутый)	VI	1	1
Квазикольцо	III	6	упр. 20
Кирпич открытый (замкнутый)	VI	1	1
Колебание числовой функции	IV	6	упр. 6
Кольцо топологическое	III	6	3
— — дискретное	III	6	3
— — локально ограниченное	III	6	упр. 12
— — отделимое, ассоциированное с топологическим кольцом	III	6	4
— — полное	III	6	5
Коммутативно сходящийся ряд	III	5	7
Комплексные прямые в пространстве	VIII	4	1
Конечная частичная сумма	III	5	1
Конечное вещественное число	IV	4	2
— разложение	IV	8	3
Континуума мощность	IV	8	6
Корень квадратный	IV	3	3
— кубический	IV	3	3
— n-й степени	IV	3	3
Косинус угла	VIII	2	2
— числа	VIII	2	4
Котангенс числа	VIII	2	4
Коши критерий	III	5	2
	III	5	6
Кривая Пеано	VI	1	упр. 2
Критерий Коши для рядов	III	5	6
— — — суммируемых семейств	III	5	2
Куб открытый (замкнутый)	VI	1	1
Куба сторона	VI	1	1
Кусочно линейное отображение	VI	1	упр. 6
Левая равномерная структура топологической группы	III	3	1
— точка прикосновения	IV	2	упр. 1
Логарифмов основание	V	4	1
Локально изоморфные топологические группы	III	1	3
— обратно ограниченная топология	III	6	упр. 22

	Гл.	§	n°
Локально ограниченная топология	III	6	упр. 12
Локальный автоморфизм, изоморфизм	III	1	3
Ломаная линия	VI	1	упр. 6
— — простая	VI	1	упр. 9
Мажорированная функция	IV	5	1
Максимум относительный	IV	6	2
— — строгий	IV	5	упр. 10
Мера главная угла между полупрямыми	VIII	2	3
Меры угла между полупрямыми	VIII	2	3
— — — прямыми	VIII	2	6
Минимум относительный	IV	6	2
Минорированная функция	IV	5	1
Многообразия комплексные (вещественные) линейные в $\mathbf{C}^n$	VIII	4	1
— ортогональные аффинные линейные	VI	2	2
Множество канторово	IV	2	5
— ограниченное снизу (сверху)	IV	2	3
Модуль топологический правый	III	6	6
Морфизм пространств с операторами	III	2	4
— строгий топологических групп	III	2	8
— топологических групп	III	2	8
Мощность континуума	IV	8	6

	Гл.	§	n°
Насыщение подмножества по группе операторов	III	2	4
Непрерывно действующая группа	III	2	4
Неравенство треугольника	VI	2	1
Несобственное разложение	IV	8	3
Нижняя огибающая	IV	5	5
Норма алгебраическая комплексного числа	VIII	1	1
— евклидова в $\mathbf{R}^n$	VI	2	1
Обратимое справа (слева) линейное отображение	III	6	2
Обратно ограниченное множество	III	6	упр. 22
Общий сомножитель бесконечного произведения	III	5	7
— член ряда	III	5	6
Огибающая нижняя (верхняя) семейства функций	IV	5	5
Ограниченная сверху (снизу) функция	IV	5	1
— функция	IV	5	1
Ограниченное слева (справа) множество	III	6	упр. 12
Однопараметрические группы	V	3	
Однородные пространства	III	2	5
Окрестность симметричная	III	1	2
Окружность единичная	VI	2	3
Орбит пространство	III	2	4

	Гл.	§	n°
Ортогональные аффинные линейные многообразия	VI	2	2
— *векторные подпространства*	VI	2	2
— *векторы*	VI	2	2
Основание разложения вещественного числа	IV	8	5
— *системы логарифмов*	V	4	1
— — *мер углов*	VIII	2	3
Остаток ряда	III	5	6
Острый угловой сектор	VIII	2	5
Ось вещественная	VIII	1	2
— *мнимая*	VIII	1	2
Отделимая группа, ассоциированная с топологической группой	III	2	6
Отделимое кольцо, ассоциированное с топологическим кольцом	III	6	4
— *пополнение топологического кольца*	III	6	5
— — — *модуля*	III	6	6
— — *топологической группы*	III	3	4
Отделимый модуль, ассоциированный с топологическим модулем	III	6	6
Отношение эквивалентности, определенное группой операторов	III	2	4
Отображение линейное, обратимое справа (слева)	III	6	2
— *существенное, несущественное в* $\mathbf{S}_1$	VI	2	упр. 6
— —, — *в* $\mathbf{P}_n$	VI	2	упр. 2
Отрезок замкнутый (открытый)	VI	1	4
— *открытый в* x, *замкнутый в* y	VI	1	4
Параллелепипед открытый (замкнутый)	VI	1	3
Параметры направляющие прямой	VI	1	4
Пеано кривая	VI	1	упр. 2
Перемена порядка суммирования	III	5	3
Перемножаемое семейство	III	5	1
Перестановочно действующие группы	III	2	4
Периодическая функция	VII	1	6
Периоды периодической функции	VII	1	6
Плоскости комплексные в пространстве $\mathbf{C}^n$	VIII	4	1
Плоскость вещественная проективная	VI	3	1
— *комплексная проективная*	VIII	4	3
Подгруппа, ассоциированная с подгруппой в $\mathbf{R}^n$	VII	1	3
Подпространство векторное ортогональное	VI	2	2
Показательная функция	V	4	1
Полная группа	III	3	3
Полное кольцо	III	6	5
Полунепрерывная сверху (снизу) функция	IV	6	2
— — — *регуляризация*	IV	6	2

	Гл.	§	n°
Полуось вещественная положительная (отрицательная)	VIII	1	2
Полупространство открытое (замкнутое), определенное гиперплоскостью	VI	1	4
Полупрямая Александрова	IV	2	упр. 12
— открытая (замкнутая)	VI	1	4
Полупрямое внешнее произведение	III	2	10
— произведение	III	2	10
— — топологическое	III	2	10
Полусфера открытая (замкнутая)	VI	2	4
Пополнение отделимого топологического кольца	III	6	5
— — — модуля	III	6	6
— отделимое топологической группы	III	3	4
Последовательность Фарея	VII	1	упр. 13
Правая равномерная структура топологической группы	III	3	1
Правое (левое) обращение линейного отображения	III	6	2
Предел верхний	IV	5	6
— монотонной последовательности	IV	5	2
— нижний	IV	5	6
— по фильтрующемуся множеству	IV	5	2
— слева	IV	5	3
— справа	IV	5	3
Представление биективное, ассоциированное с данным представлением	III	2	8
Преобразование ортогональное	VI	2	2
Приближенное (с точностью до ε) значение вещественного числа	IV	8	1
Принцип продолжения неравенств	IV	5	2
— — тождеств	IV	3	4
— сравнения	VI	7	1
— ящиков	VII	1	упр. 11
Проективная прямая вещественная	VI	3	1
— — комплексная	VIII	4	3
Проективный предел проективной системы колец (групп)	III	7	1
— — — — множеств, наделенных внешним (внутренним) законом	III	7	1
— — системы топологических колец (групп, модулей)	III	7	2
Проекция стереографическая	VI	2	4
— центральная	VI	2	3
Произведение абсолютно сходящееся комплексных чисел	VIII	3	3
— бесконечное вещественных чисел	IV	7	6
— —, определяемое последовательностью (x_n)	III	5	7
— — с общим членом x_n	III	5	7
— — сходящееся	III	5	7
— перемножаемого семейства	III	5	1

	Гл.	§	n°
Произведение полупрямое внешнее	III	2	10
— — подгрупп	III	2	10
— — топологическое внешнее	III	2	10
— — — подгрупп	III	2	10
— прямое локальное топологических групп	III	2	упр. 26
— скалярное	VI	2	2
— топологических групп	III	2	9
— — — с операторами	III	6	1
— — колец	III	6	4
Пространство вещественное проективное размерности n	VI	3	1
— комплексное проективное размерности n	VIII	4	3
— однородное топологическое	III	2	5
— — топологической группы	III	2	5
— орбит группы, действующей непрерывно в топологическом пространстве	III	2	4
— p-мерных проективных линейных многообразий в n-мерном вещественном проективном пространстве	VI	3	5
— числовое комплексное размерности n	VIII	4	1
— — размерности n	VI	1	1
Противоположные полупрямые	VI	1	4
Прямая проективная вещественная	VI	3	1
— — комплексная	VIII	4	3
— расширенная	IV	4	2
— рациональная	IV	1	2
— числовая	IV	1	3
Равномерное распределение по модулю 1	VII	1	упр. 14
Равномерно мажорированное семейство	IV	5	5
— минорированное семейство	IV	5	5
— ограниченное семейство	IV	5	5
Радиан	VIII	2	3
Радиус открытого шара (замкнутого шара, сферы)	VI	2	3
Развернутый угловой сектор	VIII	2	5
Разложение вещественного числа относительно базисной последовательности	IV	8	2
— двоичное	IV	8	5
— десятичное	IV	8	5
— конечное	IV	8	3
— несобственное	IV	8	3
— по базису a	IV	8	5
— троичное	IV	8	5
Ранг рациональный подгруппы группы $\mathbf{R}^n$	VII		1
Расстояние евклидово	VI	2	1
Раствор углового сектора	VIII	2	5
Расширенная числовая прямая	IV	4	2

	Гл.	§	n°
Рациональная прямая	IV	1	2
Регуляризация полунепрерывная снизу (сверху) числовой функции	IV	6	2
Ряд абсолютно сходящийся	IV	7	6
— — — точек в $\mathbf{R}^n$	VII	3	2
— знакочередующийся	IV	7	6
—, определяемый последовательностью (x_n)	III	5	6
— с общим членом x_n	III	5	6
— сходящийся	III	5	6
— — вещественных чисел	IV	7	6
— — коммутативно	III	5	7
Свободно действующая группа	III	4	3
Сектор входящий	VIII	2	5
— выступающий	VIII	2	5
— острый	VIII	2	5
— прямой	VIII	2	5
— развернутый	VIII	2	5
— тупой	VIII	2	5
— угловой	VIII	2	5
Семейство перемножаемое элементов мультипликативной группы	III	5	1
— равномерно мажорированное, минорированное, ограниченное числовых функций	IV	5	5
— суммируемое элементов аддитивной группы	III	5	1
Сеть в $\mathbf{P}^n$	VII	1	1
Симметричная окрестность	III	1	2
Синус угла	VIII	2	4
— числа	VIII	2	4
Система главная периодов q-периодической функции	VII	1	6
— проективная колец (групп)	III	7	1
— — топологических колец (групп, модулей)	III	7	2
Скалярное произведение	VI	2	2
Смежные интервалы	IV	2	5
Совершенно действующая топологическая группа	III	4	1
Согласующиеся отношение эквивалентности и группа операторов	III	2	4
— отображение пространства с операторами и представление группы операторов	III	2	4
— структура группы и топология	III	1	1
— — — с операторами и топология	III	6	1
— — кольца и топология	III	6	3
— — тела и топология	III	6	7
— — упорядоченной группы и топология	IV	1	упр. 1
Соленоид p-адический	III	7	упр. 6
Сопряженное комплексное число	VIII	1	1

	Гл.	§	n°
Сравнения принцип	IV	7	1
Стабилизатор	III	2	4
Стереографическая проекция	VI	2	4
Сторона куба	VI	1	1
Строгий морфизм	III	2	8
Структура аддитивная равномерная в $\mathbf{R}^n$	VI	1	2
— — числовой прямой	IV	1	6
— равномерная аддитивная топологического тела	III	6	8
— — мультипликативная топологического тела	III	6	8
— — правая (левая) топологической группы	III	3	1
Сумма прямая топологическая подгрупп с операторами	III	6	2
— ряда	III	5	6
— семейства	III	5	1
— частичная	III	5	3
— — конечная	III	5	1
Суммируемое семейство	III	5	1
Существенное (несущественное) отображение в $\mathbf{P}_n$	VI	3	упр. 2
— — — в $\mathbf{S}_1$	VI	2	упр. 6
Сфера	VI	2	3
— единичная	VI	2	3
Сходящееся бесконечное произведение	III	5	7
— — — вещественных чисел	IV	7	6
Сходящийся ряд	III	5	6
— — вещественных чисел	IV	7	6

	Гл.	§	n°
Тангенс угла	VIII	2	2
— числа	VIII	2	4
Тело вещественных чисел	IV	3	1
— кватернионов	VIII	1	1
— комплексных чисел	VIII	1	1
— топологическое	III	6	7
— — дискретное	III	6	7
Теорема Больцано	IV	6	1
— Бореля—Лебега	IV	2	2
— Вейерштрасса	IV	6	1
— Кантора	IV	8	6
— о пределе монотонной последовательности	IV	5	2
Топологическая группа	III	1	1
— — с операторами	III	6	1
Топологически нильпотентный элемент, идеал	III	6	упр. 9
Топологическое кольцо	III	6	3
— полупрямое произведение	III	2	10
— тело	III	6	7
Тор вращения	VII	1	упр. 15
— n-мерный	VII	1	4
— одномерный	V	1	2
Тривиально действующая группа	III	2	4
Троичное разложение	IV	8	5
Тупой угловой сектор	VIII	2	5
Угол между полупрямыми	VIII	2	2
— между прямыми	VIII	2	6
— прямой	VIII	2	6
— — положительный	VIII	2	2
— развернутый	VIII	2	2

	Гл.	§	n°
Факторгруппа топологическая	III	2	6
— — с операторами	III	6	1
Факторкольцо топологическое	III	6	4
Факторпространство пространства с операторами по его группе операторов	III	2	4
Фактортопология топологии группы по подгруппе	III	2	5
— — пространства с операторами по его группе операторов	III	2	4
Форма тригонометрическая комплексного числа	VIII	2	2
Формула перемены порядка суммирования	III	5	3
Функция вещественная	IV	5	1
— конечная	IV	5	1
— мажорированная	IV	5	1
— минорированная	IV	5	1
— ограниченная	IV	5	1
— — снизу (сверху)	IV	5	4
— периодическая (определенная в $\mathbf{R}^n$*)*	VII	1	6
— q-периодическая	VII	1	6
— показательная	V	4	1
— полунепрерывная сверху	IV	6	2
Функция полунепрерывная снизу	IV	6	2
— числовая	IV	5	1
Целая часть вещественного числа	IV	8	2
Центр стереографической проекции	VI	2	4
— шара, сферы	VI	2	3
Центральная проекция	VI	2	3
Частичная сумма	III	5	3
Часть вещественная комплексного числа	VIII	1	1
— мнимая комплексного числа	VIII	1	1
Число алгебраическое	VIII	1	упр. 2
— вещественное	IV	1	3
— — конечное	IV	4	2
— иррациональное	IV	1	3
— комплексное	VIII	1	1
— — сопряженное	VIII	1	1
— чисто мнимое	VIII	1	1
Числовая прямая	IV	1	3
— функция	IV	5	1
Шар евклидов открытый (замкнутый)	VI	2	3
— единичный	VI	2	3
— открытый (замкнутый)	VI	2	3
Ящиков принцип	VII	1	упр. 11

ТАБЛИЦА СООТВЕТСТВИЯ ВТОРОГО *) И ТРЕТЬЕГО ИЗДАНИЙ

Глава III

§ 1

2-е издание	3-е издание
Упр. 2	Опущено
— 3	Упр. 5
— 4	— 9
— 5	— 3
— 6	§ 4, сл. 1 предл. 1

§ 2

2-е издание	3-е издание
Предл. 2	Опущено
Сл. предл. 2	Замечание после предл. 5
Предл. 3	Предл. 5
— 4	Сл. предл. 4
— 5	Предл. 6
— 6	— 7
— 7	— 8
— 8	— 9
Теор. 1	Лемма 2
Сл. теор. 1	Предл. 17
Теор. 2	Предл. 18а
Предл. 9	— 19
— 10	— 18б
— 11	Сл. предл. 22
— 12	Предл. 20
— 13	— 23
Теор. 3	— 24
Предл. 14	Лемма 2
— 15	Предл. 13
— 16	— 14
— 17	Сл. предл. 26
Упр. 1	Опущено
— 2	Упр. 4а
— 3	— 4б
Упр. 4	Упр. 5б
— 5	Предл. 3
— 6	Опущено
— 7	Упр. 13
— 8	Опущено
— 9	Упр. 14
— 10	Опущено
— 11	Упр. 16
Упр. 12	Упр. 17
— 13	§ 4, предл. 13
— 14	§ 4, предл. 10
— 15	Опущено
— 16	Упр. 18
— 17	— 19
— 18	— 20
— 19	— 21
— 20	Предл. 25
— 21	Упр. 22
— 22	— 23
— 23	§ 7, сл. 2 предл. 2

§ 3

2-е издание	3-е издание
Предл. 4	Сл. 1 предл. 4
Сл. предл. 4	Сл. 2 предл. 4
Предл. 5	Предл. 6
— 6	— 5
Упр. 9	Опущено
— 10	Опущено
— 11	Опущено
— 12	Опущено
— 13	Опущено
— 14	Упр. 8
— 15	§ 4, сл. 1 предл. 1
— 16	§ 4, сл. 3 предл. 1
Упр. 17	§ 4, предл. 2 и сл. 2 предл. 2
— 18	§ 4, предл. 14
— 19	§ 4, упр. 18
— 20	Опущено
— 21	Опущено
— 22	Сл. 3 предл. 14
— 23	Упр. 19

§ 4 § 5

Все определения, теоремы и предложения сохраняют свои номера

2-е издание	3-е издание
Упр. 6	Опущено
— 7	Упр. 6а

---

*) Перевод со второго издания главы III вошел в состав книги: Н. Бурбаки, Общая топология; основные структуры, Физматгиз, Москва, 1958. Перевод со второго издания глав IV—VIII вышел отдельной книгой: Н. Бурбаки, Общая топология; числа и связанные с ними группы и пространства, Физматгиз, Москва, 1959.

2-издание	3-издание
Упр. 8	Упр. 6б
— 9	— 7
§ 5	**§ 6**
Опр. 1	Опр. 2
Предл. 1	Предл. 5
— 2	— 6
Опр. 2	Опр. 4
Предл. 3	Предл. 7
— 4	— 8
Упр. 6	Опущено
— 7	Упр. 12в
— 8	Опущено
— 9	Опущено
— 10	Упр. 3
— 11	— 17
— 12	— 19
— 13	— 22
— 14	— 18
— 15	Опущено
— 16	Опущено
— 17	Упр. 12е и 13
18—29	Опущены (см. Коммутат. алг., гл VI)
— 30	Упр. 23б
— 31	— 23в
— 32	— 24б
— 33	— 24в
— 34	— 25а
— 35	— 25в
	Глава IV
	§ 1
Упр. 1	Опущено
— 2	Опущено
— 4	Опущено
— 5	Опущено
	§ 2
Упр. 14	Упр. 18а
— 15	— 18б
— 17	— 14г

2-е издание	3-е издание
	Глава IV
	§ 5
Упр. 3	Упр. 2б
— 16	— 3
	§ 6
Упр. 1	Упр. 10
— 2	Опущено
— 3	Упр. 11
— 7	— 6в
— 8	— 6г
— 9	— 7
	§ 7
Упр. 16	Опущено
	§ 8
Упр. 14	Гл. I, § 9, упр. 17
— 15	Упр. 14
— 17	— 15
— 18	— 17
— 19	Гл. I, § 8, упр. 6а
	Глава V
	§ 3
Упр. 5	Упр. 6
	Глава VI
	§ 1
Упр. 7	Гл. I, § 11, упр.
— 8	Упр. 13
— 10	— 7
— 11	— 8
	Глава VII
	§ 1
Упр. 16	Упр. 17
	§ 2
Упр. 2а	Упр. 2
— 2б и в	— 3
	Глава VIII
	§ 3
Упр. 6	Опущено (см. гл. IX, Приложение)

ОПРЕДЕЛЕНИЯ И АКСИОМЫ ГЛАВЫ III

Аксиомы топологических групп:

(GT_{I}) Отображение $(x, y) \longmapsto xy$ произведения $G \times G$ в G непрерывно.

(GT_{II}) Отображение $x \longmapsto x^{-1}$ группы G в себя непрерывно.

Для того чтобы группа была *отделимой*, необходимо и достаточно, чтобы множество, состоящее из одного нейтрального элемента, было *замкнутым*.

Аксиомы окрестностей нейтрального элемента e в топологической группе:

(GV_{I}) Какова бы ни была окрестность U элемента e, существует его окрестность V такая, что $VV \subset U$.

(GV_{II}) Какова бы ни была окрестность U элемента e, U^{-1} также есть его окрестность.

(GV_{III}) Каковы бы ни были окрестность U элемента e и элемент a группы, aUa^{-1} есть окрестность e.

(Для коммутативных групп (GV_{III}) выполняется автоматически.)

Для того чтобы группа была *отделимой*, необходимо и достаточно, чтобы пересечение всех окрестностей e сводилось к e.

Определение строгого морфизма:

Представление f топологической группы G *на* топологическую группу G' есть *строгий морфизм*, если оно есть композиция *изоморфизма* G/H на G' и канонического отображения G на G/H, где H — нормальный делитель, образованный теми элементами $x \in G$, для которых $f(x)$ — нейтральный элемент группы G'.

Представление f группы G *в* G' есть *строгий морфизм*, если это — строгий морфизм G на подгруппу $f(G)$ группы G'.

Определение правой равномерной структуры топологической группы:

Каждой окрестности V нейтрального элемента ставится в соответствие множество V_d тех пар (x, y), для которых $yx^{-1} \in V$.

Множества V_d образуют фундаментальную систему окружений правой равномерной структуры.

Определение топологической группы, действующей непрерывно в топологическом пространстве:

Говорят, что топологическая группа G *действует непрерывно слева* (соотв. *справа*) в топологическом пространстве E по внешнему закону $(s, x) \longmapsto sx$ (соотв. $(s, x) \longmapsto xs$), для которого G служит множеством операторов, если выполнены следующие условия:

1° $ex = x$ (соотв. $xe = x$) и $s(tx) = (st)x$ (соотв. $(xs)t = x(st)$) для любых $x \in E$ и $s, t \in G$.

2° Отображение $(s, x) \longmapsto sx$ (соотв. $(s, x) \longmapsto xs$) непрерывно на $G \times E$.

Определение топологической группы, действующей совершенно в топологическом пространстве:

Говорят, что топологическая группа G *действует совершенно* (слева) в топологическом пространстве E по внешнему закону $(s, x) \longmapsto sx$, если отображение $(s, x) \longmapsto (x, sx)$ произведения $G \times E$ в $E \times E$ совершенно.

Определение суммируемого семейства элементов коммутативной группы:

Семейство $(x_\iota)_{\iota \in I}$ суммируемо и имеет сумму s, если для любой окрестности V нуля группы существует такое *конечное* подмножество J_0 множества I, что $\sum_{\iota \in J} x_\iota \in s + V$, каково бы ни было конечное $J \subset I$, содержащее J_0.

Определение сходящегося ряда элементов коммутативной группы:

Ряд (x_n) сходится и имеет сумму s, если последовательность частичных сумм $s_n = \sum_{p=0}^{n} x_p$ имеет предел s.

Аксиомы топологических групп с операторами:

Топологическая группа с операторами есть группа с операторами G, наделенная топологией, удовлетворяющей аксиомам (GT_I) и (GT_{II}) и такой, что для любого оператора α отображение $x \longmapsto \alpha x$ группы G в себя непрерывно.

Аксиомы топологических колец:

(AT_{I}) Отображение $(x, y) \longmapsto x + y$ произведения $A \times A$ в A непрерывно.

(AT_{II}) Отображение $x \longmapsto -x$ кольца A в себя непрерывно.

(AT_{III}) Отображение $(x, y) \longmapsto xy$ произведения $A \times A$ в A непрерывно.

Аксиомы топологических тел:

Топологическое тело есть тело K, наделенное топологической структурой, удовлетворяющей аксиомам (AT_{I}), (AT_{II}), (AT_{III}) и, кроме того, следующей аксиоме:

(KT) Отображение $x \longmapsto x^{-1}$ группы $K^* = \complement \{0\}$ в себя непрерывно.

Цена 1 ~~р. 85~~ к.

Н. БУРБАКИ

ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИКИ

Книга I. Теория множеств
Книга II. Алгебра
Книга III. Общая топология
Книга IV. Функции действительного переменного
Книга V. Топологические векторные пространства
Книга VI. Интегрирование
Книги без номера:
Группы и алгебры Ли
Коммутативная алгебра
Спектральные теории
Дифференцируемые и аналитические многообразия

ОБЩАЯ ТОПОЛОГИЯ

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ГРУППЫ · ЧИСЛА

БУРБАКИ